УДК 625.7/8+539.376

А. П. Лащенко, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СЛОИСТЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

В статье автором предлагается решение задачи по определению деформаций дорожных одежд и земляного полотна с учетом реологических свойств материалов на основе решения задач математической теории упругости и задач теории ползучести исходя из математических моделей исследуемых процессов. Рассматриваемая задача решена методом интегральных преобразований по временной координате.

The author suggests in his article the solution to the deformation determination problem of pavement surfacing and road subgrade with reference to materials rheologic characteristics based on problem solutions of mathematical theory of elasticity and creep theory problems considering mathematical models of processes under investigation. The problem under review was solved by intergal transformation method on time coordinate.

Введение. В опубликованных работах В. Ф. Бабкова, А. К. Бирули, Н. Н. Иванова, Б. И. Когана, М. Б. Корсунского и других даны различные решения вопросов расчета слоистых дорожных одежд. Однако расчету дорожных одежд с учетом ползучести материалов уделено недостаточное внимание. Так, в 1961 г. М. Б. Корсунский [1] указал пути учета ползучести материалов при расчете дорожных одежд. Исходя из предположений о том, что известна функциональная зависимость изменений величины модуля упругости от скорости нагружения и продолжительности действия нагрузки, он сумел свести задачу теории ползучести к известным задачам теории упругости. Позже Б. С. Радовским [2] дана постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии многослойного упруго-вязкого полупространства и получено решение для однородного упруго-вязкого полупространства в интегральном виде. Ползучесть материалов учтена И. А. Медниковым [3] в 1969 г. при решении задачи об изгибе бесконечно длинной упруго-вязкой балки на упруго-вязком основании, причем, как указывает автор, при некоторых принятых допущениях можно свести данную задачу к расчету дорожных одежд. Поэтому задача исследования изменения напряжений и перемещений в слоистой системе с учетом реологических свойств материалов, применяемых в дорожном строительстве, является актуальной.

Основная часть. Анализ показал, что в литературных источниках в недостаточной мере проведено исследование напряженно-деформированного состояния слоистых систем с учетом ползучести материалов при математически строгой постановке задачи.

На основании экспериментально полученных кривых ползучести и сравнения решений дифференциальных уравнений, полученных на АВМ, нами был выбран и обоснован закон деформирования с учетом временной координаты для наиболее распространенных дорожно-строительных материалов.

Установлено, что для материалов, используемых в дорожном строительстве, с достаточной точностью для практических целей, может быть принята следующая зависимость:

$$En\frac{d\varepsilon}{dt}+H\varepsilon=n\frac{d\sigma}{dt}+\sigma, \qquad (1)$$

где E – мгновенный модуль упругости; n – коэффициент времени релаксации, зависящий от упруго-вязких свойств материала и вида нагружения; ε – деформация; H – длительный модуль упругости; σ – напряжение.

Расчетной математической моделью дорожной одежды и земляного полотна может служить многослойное квазистатическое упруго-вязкое полупространство, на поверхность которого действует нагрузка, равномерно распределенная по площади круга. Каждый i-й слой характеризуется параметрами: E_i, H_i, n_i, коэффициентом Пуассона μ_i и толщиной h_i.

Обозначим компоненты тензора перемещения вдоль оси z в цилиндрической системе координат – w, а вдоль оси r – u.

Решение задачи сводится к отысканию системы бигармонических функций $\varphi_i(r,z)$, с которой горизонтальные и вертикальные деформации тензора перемещения связаны следующими зависимостями:

$$w_i=\frac{1+\mu_i}{E_i}\{[2(1-\mu_i)\nabla^2\varphi_i-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}]+\frac{E_i-H_i}{E_i n_i}\times$$

$$\times\int\limits_0^t[\,2(1-\mu_i)\nabla^2\varphi_i-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}\,]\,e^{-\frac{H_i(t-\tau)}{E_i n_i}}\,d\tau\},$$

$$u_i=-\frac{1-\mu_i}{E_i}[\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z\partial r}+\frac{E_i-H_i}{E_i n_i}\int\limits_0^t\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z\partial r}e^{-\frac{H_i(t-\tau)}{E_i n_i}}\,d\tau]. \qquad (2)$$

Как известно, искомая функция $\varphi_i(r,z)$ приемлема, если она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi_i(r,z)=0, \qquad (3)$$

где ∇^2 – символ, аналогичный оператору Лапласа и граничным условиям.

В пределах каждого слоя искомая функция $\varphi_i(r,z)$ непрерывна и для любого i-го слоя может быть представлена аналитической зависимостью вида:

$$\varphi_i(r,z)=\int_0^\infty\{A+B[\alpha(\eta-1)+2\mu_i]+\sum_{k=2}[C_k[(1-2\mu_i)(1-e^{-2\lambda_k})+\lambda_k(1+e^{-2\lambda_k})]+D_k[2\mu_i(1+e^{-2\lambda_k})-\lambda_k(1-e^{-2\lambda_k})]\}\}e^{-\alpha\eta}J_0(\rho\alpha)\,d\alpha, \qquad (4)$$

где $\eta = z/h$; $\rho = r/h$; $\lambda_k = (h_{k-1} - z)/h$; h_i – суммарная толщина слоев лежащих выше i-го; $J_0(\rho\alpha)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Коэффициенты A, B, C_k, D_k, входящие в формулу (3), представляют собой неопределенные функции, зависящие от нагрузки, параметра α и времени действия нагрузки. Для определения данных функций используются следующие граничные условия:

на поверхности, при $z = 0$

$$\sigma_z=\begin{cases}-P(r), & R\ge r,\\ 0, & R<r;\end{cases} \qquad (5)$$

на границе между $i-1$ и i-слоями

$$\sigma_z^i=\sigma_z^{i-1},\ w_i=w_{i-1},\ u_i=u_{i-1}; \qquad (6)$$

на бесконечности, при $z\to\infty$

$$\sigma_z\to 0,\ w\to 0,\ u\to 0. \qquad (7)$$

Система функций (4) удовлетворяет бигармоническому уравнению в цилиндрических координатах (3), а поэтому составляющие компоненты тензора перемещений могут быть определены из следующих зависимостей:

$$w_i=-\frac{1+\mu_i}{E_ih^2}\int_0^\infty\{A+B(2+2\mu_i-\eta)+\sum_{k=2}\{C_k[(1-2\mu_i)(1-e^{-2\lambda_k})-\lambda_k(1+e^{-2\lambda_k})-D_k[2(1-2\mu_i)\times(1+e^{-2\lambda_k})-\lambda_k(1-e^{-2\lambda_k})]]\}\alpha^2e^{-\alpha\eta}J_0(\rho\alpha)d\alpha-$$
$$-\frac{(1+\mu_i)(E_i-H_i)}{E_i^2h^2n_i}\int_o^t\int_0^\infty\{A+B(2+2\mu_i-\eta)+\sum_{k=2}\{C_k[(1-2\mu_i)(1-e^{-2\lambda_k})-\lambda_k(1+e^{-2\lambda_k})]-D_k[2(1-\mu_i)(1+e^{-2\lambda_k})-\lambda_k(1-e^{-2\lambda_k}))]\}\}\times\alpha^2e^{\frac{-H_i(t-\tau)}{E_in_i}-\alpha\eta}J_0(\rho\alpha)\,d\alpha\,d\tau; \qquad (8)$$

для горизонтальных перемещений:

$$u_i=-\frac{1+\mu_i}{E_ih^2}\int_0^\infty\{A-B(1-2\mu_i+\eta)+\sum_{k=2}\{C_k[2(1-\mu_i)(1+e^{-2\lambda_k})+\lambda_k(1-e^{-2\lambda_k})]+D_k[(2\mu_i-1)\times(1-e^{-2\lambda_k})]-\lambda_k(1+e^{-2\lambda_k})]]\}\alpha^2e^{-\alpha\eta}J_1(\rho\alpha)d\alpha-$$
$$-\frac{(1+\mu_i)(E_i-H_i)}{E_i^2h^2n_i}\int_0^t\int_0^\infty\{A-B(1-2\mu_i+\eta)+\sum_{k=2}\{C_k[2(1-\mu_i)(1+e^{-2\lambda_k})+\lambda_k(1-e^{-2\lambda_k})]+D_k[(2\mu_i-1)(1-e^{-2\lambda_k})-\lambda_k(1+e^{-2\lambda_k})]\}\}\times\alpha^2e^{-\frac{\alpha\eta+H_i(t-\tau)}{E_in_i}}J_1(\rho\alpha)\,d\alpha\,d\tau, \qquad (9)$$

где $\beta = R/h$; $J_1(\rho\alpha)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка. Как было показано выше, функции $A(\alpha,t)$, $B(\alpha,t)$, $C_k(\alpha,t)$, $D_k(\alpha,t)$ определяются из граничных условий.

Число таких уравнений равно $2(2n-1)$, но при принятой в приводимом решении форме записи функции напряжений $\varphi_i(r,z)$ граничные условия на бесконечности и условия неразрывности напряжений σ_z на поверхности контакта выполняются тождественно.

В результате интегральных преобразований получены аналитические выражения для определения значений компонент тензора перемещений в любой точке упруго-вязкого слоистого полупространства с учетом ползучести используемых материалов. Данные зависимости обобщены для однородного, двухслойного и трехслойного упруго-вязких полупространств. На основании граничных условий (5), (6) получены системы линейных уравнений с переменными коэффициентами для определения значений функций $A(\alpha, t)$, $B(\alpha, t)$, $C_k(\alpha, t)$, $D_k(\alpha, t)$.

Доказана единственность решения систем при фиксированных параметрах α и t.

Рассмотрим случай, когда на однородное упруго-вязкое полупространство, характеризующееся параметрами E, H, n и μ, действует постоянная во времени вертикальная нагрузка, равномерно распределенная по площади круга радиуса R, которую удобно представить через интеграл Фурье – Бесселя:

$$P(r)=P_0\beta\int_0^\infty J_1(\beta\alpha)J_0(\rho\alpha)\,d\alpha. \qquad (10)$$

Если в формулах (8) и (9) положим $i = 1$, то данная задача по определению всех составляющих тензора перемещения в любой точке изотропного упруго-вязкого полупространства является частным случаем рассмотренной выше задачи. Опуская промежуточные преобразования, представим окончательный результат:

вертикальные перемещения:

$$w = -\frac{1+\mu}{E}\int_0^\infty \{A + B[2(1-\mu)+\alpha(z-$$

$$-1)]\}e^{-\alpha z}\alpha^2 J_0(\alpha r)d\alpha - \frac{(1+\mu)(E-H)}{E^2 n}\times$$

$$\times\int_o^t\int_0^\infty \{A + B[2(1-\mu)+\alpha(z-1)]\}\alpha^2\times$$

$$\times e^{\frac{-H(t-\tau)}{En}-\alpha z} J_0(\alpha r)\, d\alpha\, d\tau; \quad (11)$$

горизонтальные перемещения:

$$u = -\frac{1+\mu}{E}\int_0^\infty \{A - B[(1-2\mu)-\alpha(z-$$

$$-1)]\}e^{-\alpha z}\alpha^2 J_1(\alpha r)d\alpha + \frac{(1+\mu)(H-E)}{E^2 n}\times$$

$$\times\int_o^t\int_0^\infty \{A - B[2(1-2\mu)-\alpha(z-1)]\}\alpha^2\times$$

$$\times e^{\frac{-H(t-\tau)}{En}-\alpha z} J_1(\alpha r)\, d\alpha\, d\tau. \quad (12)$$

Произвольные коэффициенты A и B, содержащиеся в (11) и (12), определяем на основании граничных условий (5) на поверхности ($z = 0$).

В результате вышеуказанных условий получаем следующие формулы для определения неизвестных коэффициентов:

$$A = -PR\alpha^{-2}J_1(R\alpha);$$
$$B = -PR\alpha^{-3}J_1(R\alpha). \quad (13)$$

Подставив известные значения A и B в выражения (11) и (12), получаем расчетные формулы для определения компонент тензора перемещения любой точки изотропного упруго-вязкого полупространства:

вертикальные перемещения:

$$w = -\frac{PR(1+\mu)}{H}(1+\frac{H-E}{E}e^{-\frac{Ht}{En}}\times$$

$$\times\int_0^\infty (z+\frac{2(1-\mu)}{\alpha})e^{-\alpha z}J_0(\alpha r)J_1(\alpha R)d\alpha; \quad (14)$$

горизонтальные перемещения:

$$w = -\frac{PR(1+\mu)}{H}(1+\frac{H-E}{E}e^{-\frac{Ht}{En}}\times$$

$$\times\int_0^\infty (z+\frac{2(1-\mu)}{\alpha})e^{-\alpha z}J_0(\alpha r)J_1(\alpha R)d\alpha. \quad (15)$$

Для определения максимального значения функции $w(r)$ воспользуемся методом дифференциального исчисления. Взяв производную функции $w(r)$ по r и прировняв ее к нулю, имеем, что для любого значения α наибольшее значение вертикального перемещения вдоль оси z будет при $r = 0$, т. е. в центре круга произвольного радиуса R. При этом условии формула (11) для определения просадки в центре круга упрощается в связи с тем, что

$$\int_0^\infty (z+\frac{2(1-\mu)}{\alpha})e^{-\alpha z}J_0(\alpha r)J_1(\alpha R)d\alpha = 2(1-\mu),$$

получаем расчетную формулу для определения просадки под центром круга, на который действует постоянная во времени вертикальная сплошная нагрузка P:

$$w(t) = \frac{PR(1-\mu^2)}{H}(1+\frac{H-E}{E}e^{-\frac{Ht}{En}}). \quad (16)$$

Заключение. Данные решения обобщены для однородного, двухслойного и трехслойного упруго-вязких полупространств, для которых разработаны алгоритмы и составлены программы по определению численных значений компонент тензора перемещений.

Разработанные алгоритмы и комплекс программ приняты Госфондом алгоритмов и программ (РГ П0015) для использования в проектных организациях.

Предложенные способы определения компонент тензора перемещений дорожных одежд и земляного полотна могут быть использованы проектными дорожными организациями для расчета дорожных одежд по двум предельным состояниям, что позволят в комплексе с существующими расчетными методами более полно учитывать реальные свойства используемых материалов и исключить развитие недопустимых деформаций ползучести в течение всего срока службы дорожной одежды.

Литература

1. Корсунский, М. Б. Деформации дорожных одежд и фактор времени / М. Б. Корсунский // Автомобильные дороги. – 1961. – № 7. – С. 25–27.

2. Радовский, Б. С. Поведение дорожной конструкции как слоистой вязкоупругой среды под действием подвижной нагрузки / Б. С. Радовский // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1975. – № 4. – С. 141–146.

3. Медников, И. А. К теории изгиба многослойных и армированных плит / И. А. Медников // Труды Союздорнии. – М.: Транспорт, 1969. – Вып. 7. – С. 90–103.

Поступила 19.03.2012