УДК 514.76

Н. П. Можей, кандидат физико-математических наук,
доцент, докторант (КГУ, Россия)

КОГОМОЛОГИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Публикация посвящена изучению трехмерных однородных многообразий и описанию их когомологий. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Приведены инвариантные невырожденные симметрические билинейные формы на таких однородных пространствах. Также изучена секционная кривизна римановых (псевдоримановых) трехмерных однородных пространств. Рассмотрен случай нетривиальной стационарной подгруппы, поскольку остальные однородные пространства в этой размерности – трехмерные группы Ли. В работе использован алгебраический подход для описания многообразий, методы теории групп и алгебр Ли, однородных пространств.

In this paper we study three-dimensional homogeneous manifolds. Also we describe cohomology this manifolds. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. We described all invariant symmetric nondegenerate bilinear forms on those homogeneous spaces. Also we have found curvature Riemannian (pseudo-Riemannian) three-dimensional homogeneous spaces. We restricted ourselves to the case of a non-trivial stationary subgroup, all other homogeneous spaces in this dimension are three-dimensional Lie groups. We used the algebraic approach for description of manifolds, methods of the theory of Lie groups and Lie algebras and homogeneous spaces.

Введение. Теорема А. Картана сводит алгебру когомологий однородного пространства к алгебре когомологий алгебры Картана, конструируемой целиком в терминах алгебр Ли (соответствующих группам Ли, правда, эти группы предполагаются компактными). За определение алгебры когомологий многообразия принимается ее конструкция согласно теореме де Рама. Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M [1]. Однородные римановы пространства изучались с топологической точки зрения. В частности, ряд работ посвящен вычислению кольца когомологии этих пространств, основанном на применении теоремы Картана и спектральных последовательностях. Вычисления для неприводимых компактных симметрических пространств проведены еще Борелем в 50-х годах. Ряд утверждений теории Ходжа дает информацию о строении кольца когомологий риманова пространства, обладающего нетривиальными параллельными дифференциальными формами и, тем самым, имеющего нестандартную группу голономии. Примерами таких пространств являются кэлеровы многообразия и симметрические пространства. В работе [2] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств. Для когомологии разрешимых алгебр Ли известны лишь немногие сколько-нибудь общие утверждения.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $(M, \overline{G})$ – однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$, где $G \subset \overline{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G}/G$ [3]. Изучая однородные пространства важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ в *Diff*(*M*), другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\overline{G}$ на многообразии *M*. Положим $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе *G*. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\overline{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\overline{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g}$, для всех $s \in G$, $x \in \overline{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$: $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \overline{\mathfrak{g}}$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. *Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, где $\overline{G}$ – связная группа Ли, M – связное гладкое многообразие с транзитивным действием $\overline{G}$, а $\mathbf{g}$ – инвариантная псевдориманова метрика на M. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ [4]. Билинейная форма B также является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0 \qquad (1)$$

для всех $x \in \mathfrak{g}, v_1, v_2 \in \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Каждое псевдориманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathrm{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \le 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, где $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – эффективная пара алгебр Ли, а B – инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Действительно, из [5] следует, что существует единственное (с точностью до эквивалентности) эффективное однородное пространство $(\bar{G}, M)$, такое, что M односвязно и стационарная подгруппа G связна. Это однородное пространство допускает единственную инвариантную псевдориманову метрику $\mathbf{g}$, соответствующую билинейной форме B, т. е. существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathrm{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что M односвязно и G связна. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством*. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Обозначим $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) такие пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [6], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства – только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Билинейная форма B является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие риманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $Aut(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

Теорема 1. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ – локально однородное пространство, допускающее риманову метрику, такое, что $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \ne \{0\}$. Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

Таблица умножения $\qquad$ B

1.3.1

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	0
u_3	0	0	0	0

ε_1	0	0
0	ε_1	0
0	0	ε_2

1.3.2

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0

ε	0	0
0	ε	0
0	0	a

1.3.5

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

a	0	0
0	a	0
0	0	± 1

1.3.6

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	e_1	0	0
u_3	0	0	0	0

a	0	0
0	a	0
0	0	± 1

1.3.7

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	u_3	0
u_2	$-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

ε	0	0
0	ε	0
0	0	a

1.3.3

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$e_1 + u_3$	0
u_2	$-u_1$	$-e_1 - u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.3.4

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1 + u_3$	0
u_2	$-u_1$	$e_1 - u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

$B =$

a	0	0
0	a	0
0	0	b

3.5.1

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0

$B =$

± 1	0	0
0	± 1	0
0	0	± 1

3.5.2

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

3.5.3

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, ε_1, ε_2, $\varepsilon = \pm 1$, $ab \neq 0$.

Замечание. Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных в теореме 2: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a < 0$, 1.3.3, 1.3.4 при $ab < 0$.

Из пар, приведенных в теореме 1, симметрическое однородное пространство задают 1.3.1, 1.3.5, 1.3.6, 3.5.1–3.5.3.

Из трехмерных римановых однородных пространств следующие 7 соответствуют классификации Терстона:

– если стабилизаторы точек пространства трехмерны $(\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3))$, то тройка 3.5.1 задает евклидово пространство E^3, 3.5.2 – сферу S^3, а 3.5.3 – гиперболическое пространство H^3;

– если стабилизаторы одномерны $(\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2))$, то M – $\bar{G}$-инвариантное расслоение над одной из двумерных геометрий. На M есть $\bar{G}$-инвариантная метрика, определяющая связность. При нулевой кривизне связности тройка 1.3.5 задает $S^2 \times E^1$, 1.3.6 – $H^2 \times E^1$, а при ненулевой кривизне тройка 1.3.3 задает $SL(2,R)$, 1.3.7 – нильгеометрию.

– 1.3.1 является подалгеброй в 3.5.1 в базисе (e_2, u_1, u_2, u_3), 1.3.2 – подалгеброй в 3.5.2 в базисе $(-e_1, e_2 + u_1, e_3 - u_3, u_2)$, а 1.3.4 – подалгеброй в 3.5.3 в базисе $\left(-e_1, \frac{e_2 - u_3}{2}, \frac{e_3 - u_1}{2}, \frac{-e_1 + u_2}{2}\right)$.

Проверим выполнение условия (1) для всех пар $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $Aut(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

Теорема 2. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ – локально однородное пространство, допускающее только псевдориманову метрику, такое, что $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Данное пространство эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

3.4.1

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0	0

2.21.1

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

1.8.1

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	0
u_3	$-u_2$	0	0	0

1.8.3

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	$u_2 + \lambda e_1$
u_3	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2 - \lambda e_1$	0

1.8.4, 1.8.5

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	$\pm e_1$
u_3	$-u_2$	0	$\mp e_1$	0

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

3.4.3

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

2.21.4

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

1.8.2

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

1.1.1

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$$

1.1.2

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	u_2	0	0	u_2
u_3	0	0	$-u_2$	0

1.1.6

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$$

1.1.5

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1	0
u_2	u_2	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$$

1.1.7

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	$e_1 + u_3$	0
u_2	u_2	$-e_1 - u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$$

Здесь $ab \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1{,}0$. Из пар, приведенных в теореме 3, симметрическое пространство задают 1.1.1, 1.1.5, 1.8.1, 1.8.4, 1.8.5, 2.21.1, 3.4.1–3.4.3.

Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α, через C_1 – множество $(p-1)$-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, C_2 – множество p-форм, C_3 – множество $(p+1)$-форм и т. д., пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$, пустое множество будем записывать $\{\}$. Пусть $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пространство внешних p-форм, p-форма α из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ замкнутая, если $d(\alpha) = 0$, и точная, если $\alpha = d(\beta)$ для некоторой $(p-1)$-формы β из $A^{(p-1)}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Алгебра Ли когомологий $H^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ степени p – векторное пространство замкнутых p-форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ по модулю точных p-форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Обозначим через H_1 – множество p-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 – множество $(p+1)$-форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т. д., т. е. $H = \{H_1, H_2, H_3, \ldots\}$ – множество всех замкнутых форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 3. Когомологии трехмерных однородных римановых (псевдоримановых) многообразий имеют следующий вид:

римановы:

3.5.1, 3.5.2, 3.5.3:

$$C = \{\{\}, \{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

1.3.1, 1.3.5, 1.3.6:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

1.3.2:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\theta_3\}, \{\}, \{\}\};$$

1.3.3, 1.3.4, 1.3.7:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

псевдоримановы:

3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 2.21.1, 2.21.4:

$$C = \{\{\}, \{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

1.1.1, 1.1.5:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

1.1.2:

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\};$$

$$H = \{\{\theta_3\}, \{\}, \{\}\};$$

1.1.6, 1.1.7:

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\};$$
$$H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

1.8.1, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5:

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\};$$
$$H = \{\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\};$$

1.8.2:

$$C = \{\{\},\{\theta_3\},\{-\theta_2 \wedge \theta_3\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\},\{\}\};$$
$$H = \{\{\},\{\},\{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой – кривизной. Секционная кривизна римановых однородных пространств вычисляется по формуле

$$K(x,E) = \frac{B(R(Y,Z)Y,Z)}{B(Y,Y)B(Z,Z) - B(Y,Z)^2},$$

где $x \in M$, E – невырожденное плоское сечение в M_x, $\{Y,Z\}$ – базис в E.

Для псевдоримановых однородных пространств понятие секционной кривизны может быть введено уже не для всех двумерных направлений, так как определитель Грама (стоящий в знаменателе определения секционной кривизны), обращается в нуль для изотропных двумерных направлений (т. е. таких, на которых индуцируется вырожденная метрика, если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие секционной кривизны можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности). Выпишем секционные кривизны римановых (псевдоримановых) однородных пространств.

Теорема 4. Секционные кривизны римановых однородных пространств:

Номер	I	II	III
3.5.1	0	0	0
3.5.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
3.5.3	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
1.3.1	0	0	0
1.3.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
1.3.3	$\frac{3/4b+a}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$
1.3.4	$\frac{3/4b-a}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$
1.3.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.3.6	$-\frac{1}{a}$	0	0
1.3.7	$\frac{3}{4}a$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4}$

Здесь

$$\mathrm{I} = \frac{B(R(u_1,u_2)u_1,u_2)}{B(u_1,u_1)B(u_2,u_2) - B(u_1,u_2)^2};$$

$$\mathrm{II} = \frac{B(R(u_1,u_3)u_1,u_3)}{B(u_1,u_1)B(u_3,u_3) - B(u_1,u_3)^2};$$

$$\mathrm{III} = \frac{B(R(u_2,u_3)u_2,u_3)}{B(u_2,u_2)B(u_3,u_3) - B(u_2,u_3)^2}.$$

Секционные кривизны псевдоримановых однородных пространств:

Номер	I	II	III
3.4.1	0	0	0
3.4.2	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
3.4.3	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
2.21.1	0	0	0
2.21.4	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$
1.8.1	0	0	0
1.8.2	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{5}{4a}$
1.8.3	0	0	$a/0=\infty$
1.8.4	0	0	$1/0=\infty$
1.8.5	0	0	$-1/0=\infty$
1.1.1	0	0	0
1.1.2	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$
1.1.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.1.6	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$
1.1.7	$\frac{3/4\,b-a}{-a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$

Заключение. Описаны когомологии трехмерных однородных римановых (псевдоримановых) многообразий. Также найдена секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы для решения различных геометрических задач, также открываются широкие возможности для приложения результатов исследования псевдоримановых многообразий в физике и механике. Предложенная методика может быть использована для других размерностей.

Литература

1. Рашевский П. К. О вещественных когомологиях однородных пространств // Успехи математических наук. 1969. Т. 24. Вып. 3 (147).

2. Greub W., Halperin S., Vanstone R. Connections, curvature and cohomology. N. Y.; L., 1975. Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces.

3. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995.

4. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. N. Y.; L. Vol. I, 1963. Vol. II, 1969.

5. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces // Ann. Math. 1950. Vol. 52, No. 3. P. 606–636.

6. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces. Oslo: Preprints Univ., 1993. Vol. 1–3, No. 35–37.

Поступила 27.02.2014