УДК 517.977

А. А. Якименко, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ В ОДНОМ УРАВНЕНИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается задача нахождения предельного запаздывания в одном скалярном уравнении нейтрального типа. Исследуется вопрос об устойчивости такого уравнения в зависимости от его параметров, в том числе и от запаздывания. Найдено предельное значение запаздывания, при котором теряется свойство устойчивости. Полученные результаты могут быть применены при исследовании устойчивости систем нейтрального типа.

The problem of finding the limiting delay in one scalar equation of neutral type is studying. Investigate the question of the stability of this equation depending on its parameters, including on the delay. Found limit delay for which is lost stability property. The results can be applied in the study of the stability of systems of neutral type.

Введение. Изучение вопросов устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа сопряжено со значительными сложностями, которые обусловлены тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Кроме того, уравнение нейтрального типа может быть неустойчивым, даже когда действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны [1]. Проблема устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом и нейтрального типа исследовалась многими авторами (см., например [1–11]). Однако на данный момент некоторые вопросы до сих пор остаются открытыми. В настоящей работе приведены условия устойчивости одного уравнения с запаздывающим аргументом нейтрального типа в зависимости от величины запаздывания.

Основная часть. Рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом нейтрального типа следующего вида:

$$\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x(t-h)+a_3\dot{x}(t-h)=0, \quad (1)$$

где $h>0$ – постоянное запаздывание.

В работе [11] с помощью метода D-разбиений [9] показано, что область устойчивости U_0 уравнения (1) в пространстве параметров (a_1, a_2, a_3, h) этого уравнения ограничена линиями

$$a_2=-a_1;\ |a_3|\le 1;$$

$$L:\ \begin{cases} a_1=-\dfrac{y}{\sin yh}(a_3+\cos yh), \\ a_2=\dfrac{y}{\sin yh}(1+a_3\cos yh), \end{cases} \quad y\in\left(0, \frac{\pi}{h}\right). \quad (2)$$

Разобъем область U_0 прямой $a_2=a_1$ на две части U_0^1 и U_0^2 (область U_0^2 содержит луч $a_2=0, a_1>0$).

Соотношения (2) определяют некоторую непрерывную функцию $a_2=a_2(a_1)$. В самом деле,

$$\frac{da_1}{dy}=\frac{yh-\sin yh\cos yh+a_3(yh\cos yh-\sin yh)}{\sin^2 yh},$$

$$y\in\left(0, \frac{\pi}{h}\right).$$

Выражение в числителе линейно относительно a_3. При $a_3=-1$ имеем:

$$yh-\sin yh\cos yh-(yh\cos yh-\sin yh)=$$

$$=(yh+\sin yh)(1-\cos yh)>0, \quad y\in\left(0, \frac{\pi}{h}\right), h>0.$$

При $a_3=1$

$$yh-\sin yh\cos yh+(yh\cos yh-\sin yh)=$$

$$=(yh-\sin yh)(1+\cos yh)>0, \quad y\in\left(0, \frac{\pi}{h}\right), h>0.$$

Следовательно, при $|a_3|\le 1$ $y\in\left(0, \frac{\pi}{h}\right)$, $\frac{da_1}{dy}>0$, что равносильно

$$yh-\sin yh\cos yh+a_3\times$$

$$\times(yh\cos yh-\sin yh)>0, \quad y\in\left(0, \frac{\pi}{h}\right), |a_3|\le 1, \quad (3)$$

т. е. a_1 есть возрастающая функция параметра y. Непрерывность будет следовать из непрерывности функций, входящих в (2).

При $y\to 0$ точка (a_1, a_2) линии L стремится к точке $\left(-\frac{1+a_3}{h}, \frac{1+a_3}{h}\right)$. Линия L имеет наклонную асимптоту $a_2=a_1$. Угловой коэффициент касательной в каждой точке линии по модулю меньше единицы. В самом деле, учитывая (3), имеем

$$\frac{da_2}{da_1}-1=$$

$$=\frac{\sin yh-yh\cos yh+a_3(\sin yh\cos yh-yh)}{yh-\sin yh\cos yh+a_3(yh\cos yh-\sin yh)}-1=$$

$$= -\frac{(1+a_3)(yh-\sin yh)(1+\cos yh)}{yh-\sin yh\cos yh + a_3(yh\cos yh - \sin yh)} < 0;$$

$$1+\frac{da_2}{da_1} =$$

$$= 1+\frac{\sin yh - yh\cos yh + a_3(\sin yh\cos yh - yh)}{yh-\sin yh\cos yh + a_3(yh\cos yh - \sin yh)} =$$

$$= \frac{(a_3-1)(yh+\sin yh)(\cos yh - 1)}{yh-\sin yh\cos yh + a_3(yh\cos yh - \sin yh)} > 0,$$

отсюда

$$-1 < \frac{da_2}{da_1} < 1,\ \ y\in\left(0,\ \frac{\pi}{h}\right),\ h>0,\ \ |a_3|<1\,.$$

Пусть теперь в пространстве параметров уранения (1) имеется точка (a_1, a_2, a_3, h), $|a_3|<1,\ h>0$. Определим, при каких условиях корни этого квазиполинома имеют отрицательные действительные части.

В области U_0^2 и на ее границе $a_2 = a_1$, $a_1 > 0$, корни имеют отрицательные действительные части для любых $h>0, |a_3|<1$. Рассмотрим область $\bar{U} = \{(a_1, a_2, a_3) \big| a_2 > |a_1|, |a_3|<1\}$. Очевидно, $U_0^1 \subset \bar{U}$.

Лемма. Для любой точки $(a_1, a_2, a_3)\in \bar{U}$ найдется такое запаздывание $h^*>0$, что точка $(a_1, a_2)\in L$ при данных a_3 и $h = h^*$.

Доказательство. Так как в области $\bar{U}$ $a_2>0$, разделим первое равенство в (2) на второе. Получим:

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{a_3+\cos yh}{1+a_3\cos yh},$$

откуда

$$\cos yh = -\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}. \qquad (4)$$

Покажем, что уравнение (4) разрешимо относительно yh. В самом деле, из соотношения $a_2 > |a_1|$ следует, что $a_2 + a_1a_3 > 0$. Тогда

$$\left|-\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}\right| = \frac{|a_1+a_2a_3|}{a_2+a_1a_3}.$$

Неравенство $\dfrac{|a_1+a_2a_3|}{a_2+a_1a_3} < 1$ эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} a_1+a_2a_3 < a_2+a_1a_3, \\ a_1+a_2a_3 > -a_2-a_1a_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1-a_2)(1-a_3)<0, \\ (a_1+a_2)(1+a_3)>0, \end{cases}$$

которая, очевидно, истинна во всей области $\bar{U}$.

Таким образом, уравнение (4) разрешимо и имеет корень

$$y^*h^* = \arccos\left(-\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}\right). \qquad (5)$$

Подставим найденный корень во второе соотношение в (2):

$$a_2 = \frac{y^*}{\sin y^*h^*}\left(1+a_3\cos y^*h^*\right) \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{y^*}{\sin y^*h^*}\left(1-a_3\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}\right) = \frac{y^*}{\sin y^*h^*}\frac{a_2\left(1-a_3^2\right)}{a_2+a_1a_3}.$$

Сократив на $a_2>0$, имеем

$$y^* = \sin y^*h^*\,\frac{a_2+a_1a_3}{1-a_3^2}. \qquad (6)$$

Найдем с учетом (4) $\sin y^*h^*$.

$$\sin y^*h^* = \sqrt{1-\left(\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(a_2^2-a_1^2\right)\left(1-a_3^2\right)}}{a_2+a_1a_3}.$$

Принимая во внимание (5), получим

$$y^* = \sqrt{\frac{a_2^2-a_1^2}{1-a_3^2}}. \qquad (7)$$

Из (5) с учетом (7) имеем

$$h^* = \sqrt{\frac{1-a_3^2}{a_2^2-a_1^2}}\arccos\left(-\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}\right). \qquad (8)$$

Таким образом, мы показали, что точка $\left(a_1, a_2, a_3, h^*\right)$, $|a_3|<1$ при h^*, вычисляемом по формуле (8), принадлежит линии L, что завершает доказательство леммы.

Если $|a_3| = 1$, то область устойчивости U_0^* вырождается в область U_0^2.

Теорема. Точка (a_1, a_2, a_3, h), $|a_3|<1$, $h>0$, в пространстве коэффициентов квазиполинома (1) принадлежит области U_0 в том и только в том случае, когда выполнено одно из условий:

i) $a_1 > |a_2|$, $|a_3| \le 1$;

ii) $a_2 > |a_1|$, $|a_3|<1, h<h^*$,

где h^* вычислено по формуле (8).

Доказательство. При выполнении условия i попадание в область U_0 следует из определения этой области.

Пусть $a_2 > |a_1|, |a_3|<1$. Из леммы следует, что соответствующая точка (a_1, a_2) при $h = h^*$ принадлежит линии L. Соответствующее этой точке характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda + a_1 + a_2 e^{-\lambda h^*} + a_3 \lambda e^{-\lambda h^*} = 0. \qquad (9)$$

Сделаем замену переменной $\lambda = \frac{h^*}{h}\bar{\lambda}$. Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$\frac{h^*}{h}\bar{\lambda} + a_1 + a_2 e^{-\bar{\lambda} h} + a_3 \frac{h^*}{h}\bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda} h} = 0$$

или

$$\bar{\lambda} + \frac{h}{h^*} a_1 + \frac{h}{h^*} a_2 e^{-\bar{\lambda} h} + a_3 \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda} h} = 0. \qquad (10)$$

Отсюда с учетом вида U_0^1 вытекает, что если уравнение асимптотически устойчиво при $h = h_1$, то оно остается асимптотически устойчивым и при $0 < h < h_1$. Тогда, сравнивая (9) и (10), убеждаемся, что точка $\left(\frac{h}{h^*} a_1, \frac{h}{h^*} a_2\right)$, оставаясь в области U_0^1 $(h^*, h > 0)$ и двигаясь вдоль прямых $a_2 = -a_1$, если $a_1 < 0$, $a_2 = a_1$, если $a_1 \geq 0$, будет ниже линии L в случае $h < h^*$ и выше линии L в случае $h > h^*$. Это вытекает из того, что как было показано выше, угловые коэффициенты касательных в каждой точке линии L по модулю меньше единицы. Таким образом, если $h < h^*$, точка (a_1, a_2, a_3, h) попадает в область U_0, а если $h > h^*$, то нет. Теорема полностью доказана.

Литература

1. Громова П. С. О неустойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений первого порядка // Труды сем. по теор. диф. уравн. с откл. арг. / Ун-т дружбы народов. Москва, 1972. Т. VIII. С. 27–36.

2. Gu K., Kharitonov V., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Birkhauser, 2002. 353 p.

3. Задачи управления конечномерными системами / И. К. Асмыкович [и др.] // Автоматика и телемеханика. 1986. № 11. С. 5–29.

4. Niculesku S.-I. Further remarks on delay-dependent stability of linear neutral systems // Proc. of MTNS 2000. Perpingnan, France. 2000.

5. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений с обыкновенными производными. Пермь, 2001. 348 с.

6. Теория уравнений нейтрального типа / Р. Р. Ахмеров [и др.] // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 55–126.

7. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

8. Колмановский В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 488 с.

9. Неймарк Ю. И. D-разбиение пространства квазиполиномов (К устойчивости линеаризованных распределенных систем) // ПММ. 1949. Вып. 4. С. 349–380.

10. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

11. Марченко В. М., Якименко А. А. К вопросу о распределении корней квазиполиномов // Доклады Акад. наук Беларуси. 1996. Т. 40, № 3. С. 36–41.

Поступила 09.03.2014