Лабораторная работа № 4. Моделирование движения частицы по вращающемуся диску

По плоскому стальному диску диаметра D, вращающемуся с постоянной частотой n, движется несферическая частица. Составить модель движения материала по диску и полную скорость движения частицы по диску, если ее начальная радиальная скорость равна $V_{0\,r}$, а начальный радиус положения на диске – r_0. При расчете учесть, что движение предполагается установившимся, без перекатывания частиц; коэффициенты трения скольжения меньше коэффициентов трения покоя и считаются постоянными, то есть не зависящими от скорости. Коэффициент трения скольжения частицы по диску принять равным 0,3.

Построить графические зависимости:

а) изменения составляющих полной скорости от времени;

б) изменение полной скорости частицы от времени;

Определить угол отрыва частицы с диска.

Таблица 1

Исходные данные к задаче № 1

№ варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D, м	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
n, об/мин	100	110	120	130	140	150	160	170	90	95
$V_{0\,r}$, м/с	0,7	0,75	0,85	0,7	0,75	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
r_0, м	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05	0,055	0,06	0,065	0,07	0,075

Пример составления модели:

Для описания движения твердых частиц по вращающемуся диску пригодно уравнение динамики несвободной материальной точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i + \bar{N}\,, \tag{1}$$

где m – масса частицы, кг;

a – абсолютное ускорение частицы, м/с^2;

F_i – активные силы, действующие на частицу, Н;

N – нормальная реакция, Н.

В качестве активных сил здесь выступают сила тяжести

$$G = mg \tag{2}$$

и сила трения

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg, \tag{3}$$

где f – коэффициент трения скольжения частицы по диску.

Поскольку движение рассматривается в плоскости диска, то перпендикулярные к ней сила тяжести и нормальная реакция не оказывают влияния на характер движения. Тогда для абсолютного движения вдоль плоскости тарелки уравнение (1) примет вид:

$$m\bar{a} = \bar{F}_{\text{тр}}. \tag{4}$$

Движение частицы по диску рассмотрим как сложное, состоящее из переносного и относительного. За определяющий параметр примем полную скорость движения частицы по диску V. В системе координат $0yr$ (рис. 1) переносное движение – это поворот системы координат на угол φ со скоростью V_{φ}, а относительное – движение частицы вдоль оси r со скоростью V_r.

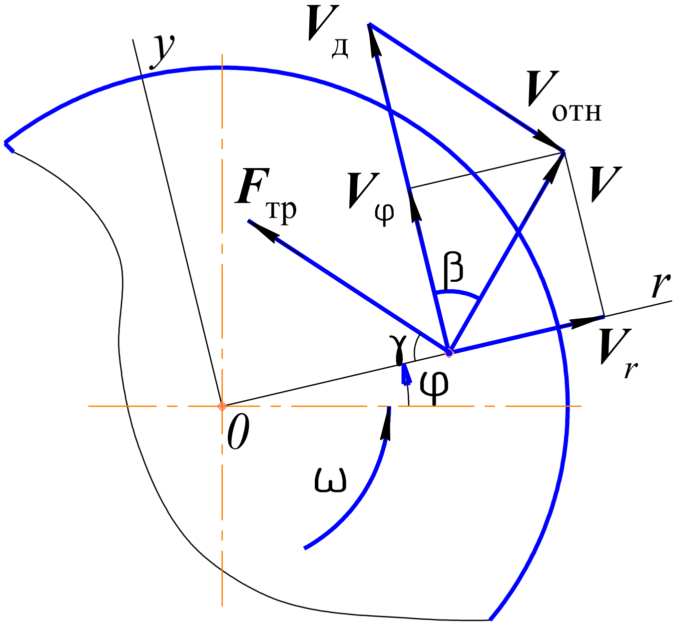


Рис. 1. Расчетная схема движения частицы по вращающемуся диску

Абсолютное ускорение частицы в векторной форме определяется по формуле:

$$\bar{a} = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \tag{5}$$

где a_e^n – переносное нормальное ускорение, м/с^2;

a_e^τ – переносное касательное ускорение, м/с^2;

a_r – относительное ускорение, м/с^2;

a_c – кориолисово ускорение, м/с^2.

С учетом выражения для ускорения (5), уравнение движения (4) в проекциях на оси координат r и у примет вид:

$$\begin{cases} m(a_r - a_e^n) = -F_{\text{тр}}\cos\gamma, \\ m(a_e^\tau - a_c) = F_{\text{тр}}\sin\gamma, \end{cases} \tag{6}$$

где γ – угол между вектором силы трения и осью r.

Направление вектора силы трения совпадает с вектором разности скоростей движения точки диска и частицы $\bar{V}_{\text{отн}}$:

$$\bar{V}_{\text{отн}} = \bar{V}_{\text{д}} - \bar{V}, \tag{7}$$

где V – вектор полной скорости частицы, м/с;

$V_{\text{д}}$ – вектор скорости точки диска, совпадающей с частицей, м/с.

$$V_{\text{д}} = \omega r, \tag{8}$$

где ω – угловая скорость диска, рад/с;

r – текущий радиус, м.

Тригонометрические функции угла γ определяются из расчетной схемы (рис. 1) по формулам:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{V_{\text{д}} - V_\varphi}{\left|\bar{V}_{\text{д}} - \bar{V}\right|} = \frac{\omega r - r\dfrac{d\varphi}{dt}}{\sqrt{\left(\omega r - r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}, \\ \sin\gamma &= \frac{V_r}{\left|\bar{V}_{\text{д}} - \bar{V}\right|} = \frac{\dfrac{dr}{dt}}{\sqrt{\left(\omega r - r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ускорения, входящие в уравнение (6), определяются по формулам:

$$a_e^n = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad a_e^\tau = r\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad a_c = 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt}. \tag{10}$$

С учетом вышеизложенного уравнения движения (6) преобразуются к виду:

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)=-fmg\dfrac{\omega r-r\dfrac{d\varphi}{dt}}{\sqrt{\left(\omega r-r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}, \\ m\left(r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+2\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dr}{dt}\right)=fmg\dfrac{\dfrac{dr}{dt}}{\sqrt{\left(\omega r-r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}. \end{cases} \quad (11)$$

После сокращения на массу и переноса всех производных первого порядка в правую часть получаем систему уравнений (12) движения частицы по вращающемуся диску:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2}=r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2-fg\dfrac{\omega r-r\dfrac{d\varphi}{dt}}{\sqrt{\left(\omega r-r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}, \\ \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}=-\dfrac{2}{r}\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dr}{dt}+\dfrac{fg}{r}\dfrac{\dfrac{dr}{dt}}{\sqrt{\left(\omega r-r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}. \end{cases} \quad (12)$$

Полученную систему решаем при помощи математического пакета *MathCad*, определяем составляющие полной скорости V_r и V_φ движения частицы по диску, строим необходимые графические зависимости.

По найденным составляющим определяем полную скорость частицы движения по диску по формуле (13) и строим графическую зависимость ее изменения от времени.

$$V=\sqrt{V_r^2+V_\varphi^2}\,. \quad (13)$$

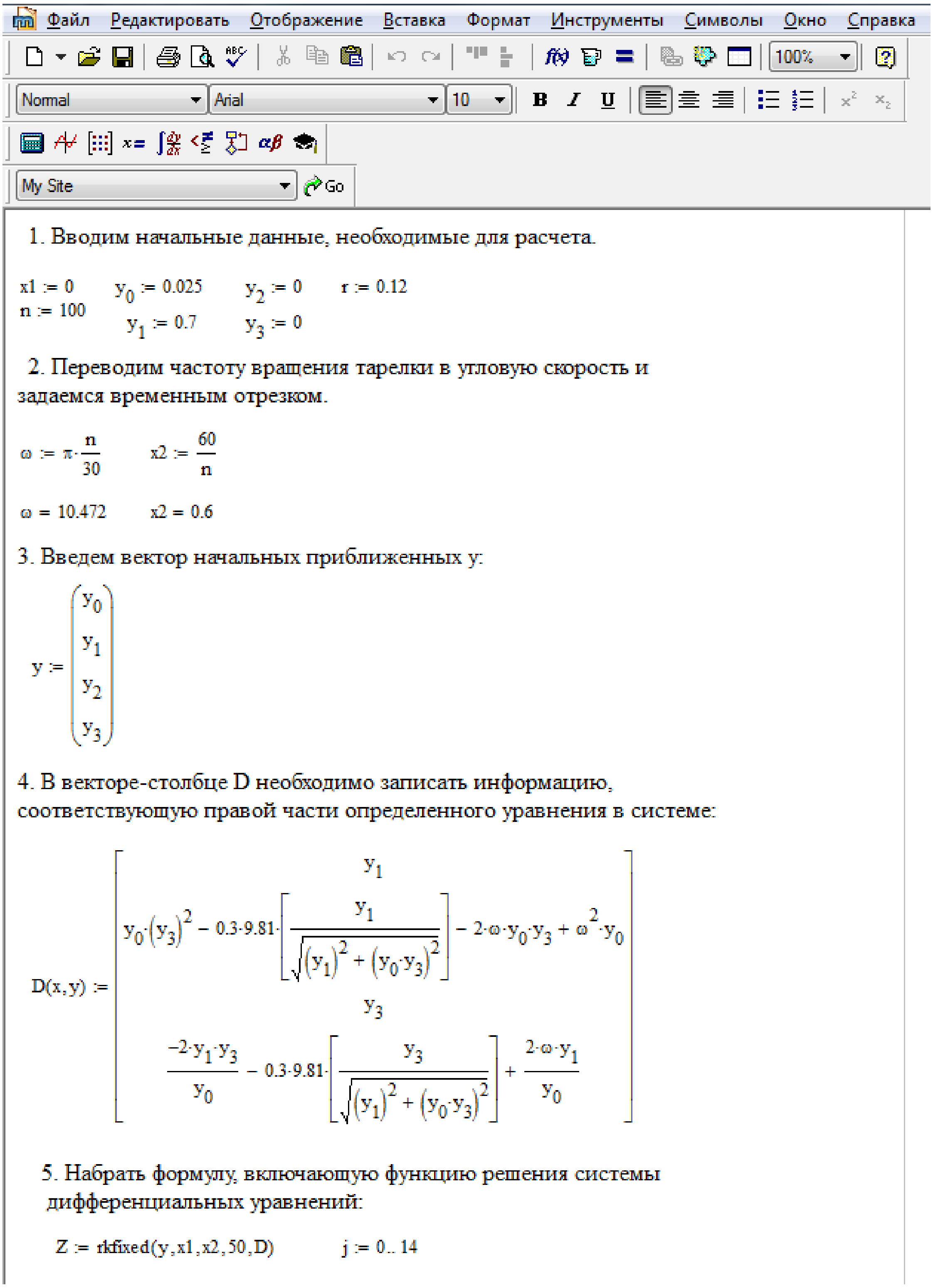
В заключение определяем угол отрыва β частицы с диска, исходя из расчетной схемы (рис. 1):

$$\cos\beta=\frac{V_\varphi}{V}\,. \quad (14)$$

Решение:

Открыв новый документ MathCad, в соответствии со своим вариантом задайте исходные данные и начальные условия для расчета: $\varphi_0 = 0$, $r_0 = 0{,}025$ м, $V_{0\,r} = 0{,}7$ м/с, $V_{0\,\varphi} = 0$, $n = 100$ об/мин, $r = D/2 = 0{,}12$ м.

Пример решения задачи в пакете MathCad приведен ниже.



1. Вводим начальные данные, необходимые для расчета.

$x1 := 0$ $\quad y_0 := 0.025$ $\quad y_2 := 0$ $\quad r := 0.12$

$n := 100$ $\quad y_1 := 0.7$ $\quad y_3 := 0$

2. Переводим частоту вращения тарелки в угловую скорость и задаемся временным отрезком.

$\omega := \pi \cdot \frac{n}{30}$ $\qquad x2 := \frac{60}{n}$

$\omega = 10.472$ $\qquad x2 = 0.6$

3. Введем вектор начальных приближенных y:

$$y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

4. В векторе-столбце D необходимо записать информацию, соответствующую правой части определенного уравнения в системе:

$$D(x,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \cdot (y_3)^2 - 0.3 \cdot 9.81 \cdot \left[\frac{y_1}{\sqrt{(y_1)^2 + (y_0 \cdot y_3)^2}} \right] - 2 \cdot \omega \cdot y_0 \cdot y_3 + \omega^2 \cdot y_0 \\ y_3 \\ \frac{-2 \cdot y_1 \cdot y_3}{y_0} - 0.3 \cdot 9.81 \cdot \left[\frac{y_3}{\sqrt{(y_1)^2 + (y_0 \cdot y_3)^2}} \right] + \frac{2 \cdot \omega \cdot y_1}{y_0} \end{bmatrix}$$

5. Набрать формулу, включающую функцию решения системы дифференциальных уравнений:

$Z := \mathrm{rkfixed}(y, x1, x2, 50, D)$ $\qquad j := 0..14$

Z =

	0	1	2	3	4
0	0	0.025	0.7	0	0
1	0.012	0.033	0.687	0.031	4.468
2	0.024	0.041	0.664	0.098	6.359
3	0.036	0.049	0.639	0.18	7.274
4	0.048	0.057	0.615	0.271	7.753
5	0.06	0.064	0.592	0.365	8.01
6	0.072	0.071	0.571	0.462	8.146
7	0.084	0.078	0.552	0.561	8.212
8	0.096	0.084	0.534	0.659	8.235
9	0.108	0.091	0.519	0.758	8.233
10	0.12	0.097	0.505	0.857	8.213
11	0.132	0.103	0.493	0.955	8.184
12	0.144	0.109	0.482	1.053	8.148
13	0.156	0.114	0.473	1.151	8.109
14	0.168	0.12	0.465	1.248	8.067
15	0.18	0.125	0.459	1.344	8.026

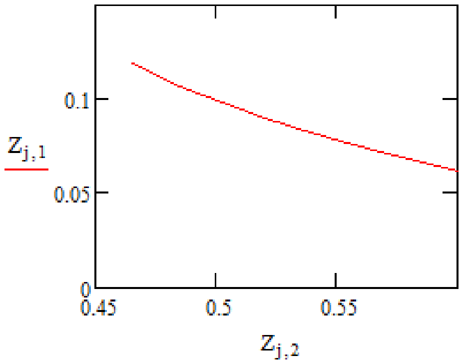
6. Определяем составляющую относительной скорости по координате φ:

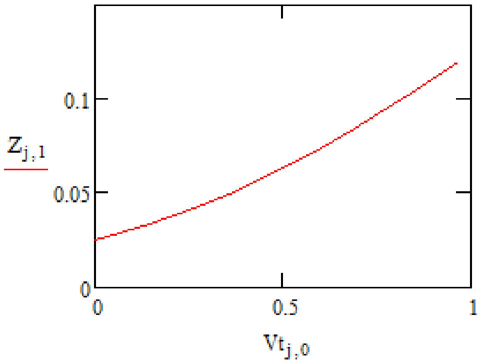
$$Vt_{j,0} := Z_{j,1} \cdot Z_{j,4}$$

$Vt_{j,0} =$

	0
0	0
1	0.149
2	0.264
3	0.358
4	0.44
5	0.513
6	0.578
7	0.638
8	0.694
9	0.746
10	0.794
11	0.841
12	0.884
13	0.927
14	0.967

7. По полученным данным строим зависимости изменения радиальной и тангенциальной составляющих скоростей от текущего радиуса:





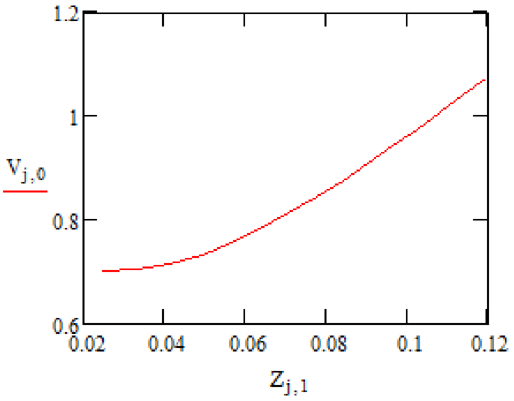
8. Находим изменение относительной скорости частицы во времени

$$V_{j,0} := \sqrt{\left(Z_{j,2}\right)^2 + \left(Vt_{j,0}\right)^2}$$

$V_{j,0} =$

	0
0	0.7
1	0.703
2	0.714
3	0.733
4	0.756
5	0.783
6	0.813
7	0.844
8	0.876
9	0.908
10	0.941
11	0.974
12	1.007
13	1.04
14	1.073

9. По полученным значениям строим график зависимости относительной скорости частицы от текущего радиуса:



10. Переносная скорость определяется по формуле:

$\psi_{j,0} := \omega \cdot Z_{j,1}$

$\psi_{j,0} =$

	0
0	0.262
1	0.349
2	0.434
3	0.516
4	0.595
5	0.671
6	0.744
7	0.814
8	0.882

11. Для нахождения полной скорости необходимо определить угол β между векторами относительной и переносной скоростей:

$$b := 180 - \mathrm{acos}\left(\frac{0.967}{1.073}\right) \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi}$$

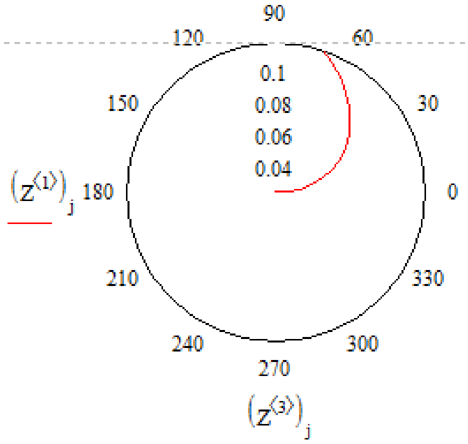
$$b = 154.318$$

12. Полная скорость частицы на выходе с диска определяется по формуле (14):

$$v := \sqrt{1.073^2 + 1.256^2 + 2 \cdot 1.073 \cdot 1.256 \cdot \cos(b \cdot deg)}$$

$$v = 0.548$$

13. Строим траеторию движения частицы по вращающемуся диску.



Ответ: относительная скорость частицы на выходе с диска равна 1.073 м/с; абсолютная - 0.548 м/с.