

## Лабораторная работа № 4. Моделирование движения частицы в закрученном газовом потоке

Сферическая частица материала диаметром  $d$  влетает с радиальной скоростью  $V_r$  в центр вертикальной трубы диаметром  $D$ . В трубе со среднерасходной скоростью  $W$  движется закрученный воздушный поток со степенью закрутки  $\gamma$ . Составить математическую модель движения частицы в закрученном потоке газа, определить с какой скоростью подлетит частица к стенке трубы, и на какой высоте произойдет соприкосновение со стенкой.

Построить графические зависимости:

- а) изменения радиальной, тангенциальной и осевой составляющих скорости частицы во времени;
- б) полной скорости частицы от ее места нахождения.

При расчетах принять плотность и вязкость воздуха, плотность частицы соответственно:  $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$ .

Таблица 2

### Исходные данные к задаче № 2

№ варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$D$ , мм	300	360	400	440	480	520	560	600	640	680
$d$ , мкм	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$V_r$ , м/с	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$W$ , м	10	12	15	18	20	22	25	28	30	32
$\gamma$ , градус	40	45	50	40	45	50	40	45	50	40

*Пример составления модели:*

При попадании частицы материала в закрученный газовый поток на нее действует комплекс внешних сил. В первую очередь, это сила аэродинамического сопротивления воздуха  $F_B$ , сила тяжести  $G$  (рис. 2), сила Магнуса, подъемная сила, сила Архимеда. Кроме вышеперечисленных сил определенное влияние оказывают также электростатические силы, силы термо- и фотофореза, силы молекулярного взаимодействия.

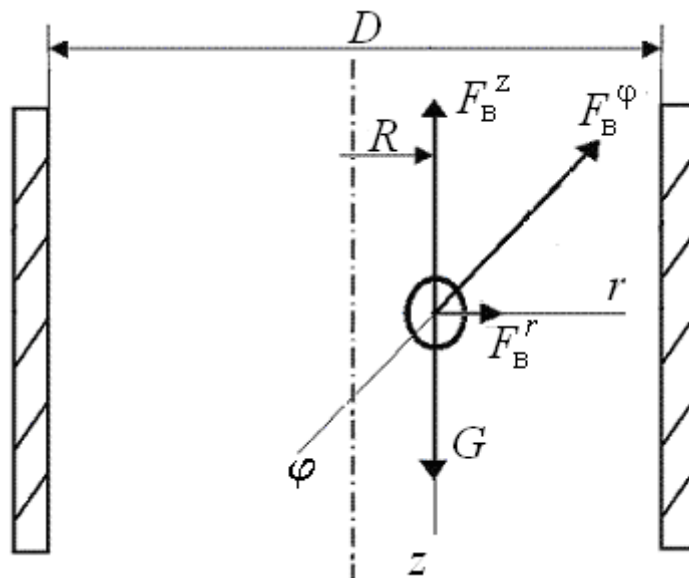


Рис. 2. Расчетная схема

В настоящее время общепринято при рассмотрении движения частицы материала в воздушном потоке использовать ряд известных допущений. В виду того, что диаметр частиц материала достаточно мал и плотность воздуха значительно меньше плотности материала, то силой Архимеда можно пренебречь. Сила Магнуса и подъемная сила, обусловленные вращением частицы материала при ее движении в воздушном потоке, могут быть определены, если в свою очередь известны величина и направление угловой скорости вращения частицы. Согласно исследованиям, для частиц материала диаметром  $10^{-5}$ - $10^{-2}$  м, сила Магнуса и подъемная сила на несколько порядков меньше силы аэродинамического сопротивления воздуха. Поэтому в нашем случае данными силами можно пренебречь. Силу термофореза, возникающую из-за наличия градиента температуры воздуха; силу фотофореза, вызываемую неоднородностью излучения; электростатическую силу; силу турбулентного массопереноса и силу молекулярного взаимодействия наиболее целесообразно учитывать для движущихся в воздушном потоке частиц материала диаметром менее  $10^{-6}$  м.

Дополнительные силы, характерные для нестационарного движения частицы (сила Бассе, сила эквивалентная воздействию присоединенной массы и др.), существенны в том случае, если плотность несущей среды сравнима с плотностью взвеси или больше ее. Для системы «газ - твердая взвесь» этими силами также можно пренебречь.

Таким образом, активными силами, которые оказывают существенное влияние на характер движения, остаются сила тяжести  $G$  и сила аэродинамического воздействия  $F_B$ .

В общем виде уравнение движения частицы материала в закрученном воздушном потоке может быть представлено следующим образом:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{i=1}^k \bar{F}_i, \quad (15)$$

где  $V$  – скорость движения частицы в закрученном потоке, м/с;  
 $t$  – время движения частицы, с;  
 $k$  – количество внешних сил действующих на частицу материала при ее движении, шт;  
 $F_i$  – активные силы, Н.

Основное влияние на движение частицы материала в закрученном потоке оказывает сила аэродинамического воздействия воздуха, которая в данном случае определяется по следующей формуле:

$$\bar{F}_B = \frac{1}{2} k_\phi c \rho_B S |\bar{W}_i - \bar{V}| |\bar{W}_i - \bar{V}| = \frac{1}{8} k_\phi c \rho_B \pi d^2 |\bar{W}_i - \bar{V}| |\bar{W}_i - \bar{V}|, \quad (16)$$

где  $W_i$  – скорость воздушного потока в данной точке аппарата, м/с;  
 $c$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;  
 $\rho_B$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  
 $S$  – площадь поперечного сечения частицы, м<sup>2</sup>;  
 $d$  – диаметр частицы, м;  
 $k_\phi$  – коэффициент формы частицы.

Модуль разности скоростей воздушного потока и частицы (относительная скорость) можно представить в виде:

$$W_{\text{отн}} = |\bar{W}_i - \bar{V}| = \sqrt{(W_r - V_r)^2 + (W_\phi - V_\phi)^2 + (W_z - V_z)^2}. \quad (17)$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления зависит от формы частицы, что обычно учитывается коэффициентом формы, и главным образом от числа Рейнольдса, и его можно определить по известной формуле Клячко:

$$c = \frac{24}{\text{Re}} \left( + 0,17 \text{Re}^{2/3} \right). \quad (18)$$

Критерий Рейнольдса (Re) в данном случае определяется как

$$\text{Re} = \frac{d |\bar{W}_i - \bar{V}|}{\nu}, \quad (19)$$

где  $\nu$  – вязкость воздуха, Па·с.

Движение закрученного газового потока носит сложный пространственный характер. Твердые частицы, попавшие в такой поток, увлекаются газом и начинают двигаться по спиралеобразным траекториям. Движение по таким траекториям обычно рассматривается в цилиндрической системе координат. Центр системы координат удобно совместить с центром трубы. Текущими координатами в этом случае будут  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Полная скорость движения частиц в этом случае будет характеризоваться тремя составляющими:  $V_r$ ,  $V_\varphi$ ,  $V_z$ .

Поскольку движение твердых частиц в закрученном потоке также имеет сложный характер, то его необходимо представить в подвижной системе координат как сложное, состоящее из переносного и относительного. Переносным обычно считается поворот системы координат вокруг вертикальной оси. Абсолютное ускорение при переносном вращательном движении будет складываться из относительного, переносного и кориолисова.

Тогда в проекциях на оси цилиндрической системы координат уравнения движения твердой частицы в закрученном потоке примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \left( \frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\varphi^2}{R} \right) = F_B^r, \\ m \left( \frac{dV_\varphi}{dt} + \frac{2V_r V_\varphi}{R} \right) = F_B^\varphi, \\ m \frac{dV_z}{dt} = F_B^z - G, \\ \frac{dR}{dt} = V_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} R = V_\varphi, \\ \frac{dz}{dt} = V_z. \end{array} \right. \quad (20)$$

Подставляя в систему дифференциальных уравнений (20) выражения (16)–(19) и выполняя соответствующие преобразования, окончательно получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{dV_r}{dt} = 18 \frac{k_\phi \rho_B}{d^2 \rho_M} \left( W_r - V_r \right) \left[ 1 + 0,17 \left( \frac{dW_{\text{отн}}}{v} \right)^{\frac{2}{3}} \right] v + \frac{V_\phi^2}{R}, \\
\frac{dV_\phi}{dt} = 18 \frac{k_\phi \rho_B}{d^2 \rho_M} \left( W_\phi - V_\phi \right) \left[ 1 + 0,17 \left( \frac{dW_{\text{отн}}}{v} \right)^{\frac{2}{3}} \right] v - \frac{2V_r V_\phi}{R}, \\
\frac{dV_z}{dt} = 18 \frac{k_\phi \rho_B}{d^2 \rho_M} \left( W_z - V_z \right) \left[ 1 + 0,17 \left( \frac{dW_{\text{отн}}}{v} \right)^{\frac{2}{3}} \right] v - g, \\
W_{\text{отн}} = \sqrt{(W_r - V_r)^2 + (W_\phi - V_\phi)^2 + (W_z - V_z)^2}, \\
\frac{dR}{dt} = V_r, \\
\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_\phi}{R}, \\
\frac{dz}{dt} = V_z.
\end{array} \right. \quad (21)$$

где  $V_r$ ,  $V_\phi$ ,  $V_z$  – составляющие полной скорости движения частицы материала в закрученном потоке, м/с;

$W_r$ ,  $W_\phi$ ,  $W_z$  – составляющие полной скорости движения воздушного потока в трубе, м/с;

$R$  – текущий радиус движения частицы материала и воздушного потока, м.

Чтобы найти конкретное численное решение системы дифференциальных уравнений (21), необходимо кроме начальных условий знать скорости воздушного потока  $W_r$ ,  $W_\phi$  и  $W_z$ . В процессе расчета принимаем ряд допущений:

осевая скорость газа  $W_z$  в трубе принимается равной среднерасходной скорости  $W$ ;

$$W_r = 0.$$

Составляющая скорости газа по оси  $\phi$  рассчитывается по формуле:

$$W_\phi = W_z \operatorname{tg} \gamma, \quad (22)$$

где  $\gamma$  – угол закрутки потока газа.

Угол закрутки в свою очередь – это угол между векторами тангенциальной составляющей и полной скорости воздушного потока. Он характеризует интенсивность закрутки потока.

Таким образом, решая систему дифференциальных уравнений (21) при

помощи математического пакета *MathCad*, получаем численные значения координат, а также составляющие полной скорости движения одиночной частицы в закрученном воздушном потоке.

По величине отдельных составляющих рассчитываем значение полной скорости частицы при соприкосновении со стенкой трубы:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\tau^2 + V_z^2}. \quad (23)$$

*Решение:*

Открыв новый документ *MathCad*, задайте исходные данные:  
 $V_r = 0,9 \text{ м/с}$ ;  $V_\phi = 0 \text{ м/с}$ ;  $V_z = 0$ ;  $W_z = 25 \text{ м/с}$ ;  $d = 100 \text{ мкм}$ ;  $k_\phi = 1,0$ ;  $r_0 = 0,01 \text{ м}$ ;  
 $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $R = D/2 = 0,3 \text{ м}$ .

Пример решения задачи в пакете *MathCad* приведен далее:

1. Вводим начальные данные, необходимые для расчета.

$x_1 := 0$      $x_2 := 0.1$      $Np := 100$      $y_0 := 0.9$      $y_1 := 0$      $y_2 := 0$   
 $y_3 := 0.01$      $y_4 := 0$      $y_5 := 0$      $d := 0.001$      $w := 25$      $W_0 := 0$   
 $\rho_1 := 1.29$      $\rho_2 := 2000$      $\nu := 1.5 \cdot 10^{-5}$      $k := 1$      $\gamma := 45$

2. Исходя из угла закрутки воздушного потока, определяем тангенциальную  $W_1$  составляющую скорости потока, принимая допущение, что осевая  $W_2$  составляющая скорости равна среднерасходной  $w$ .

$W_1 := W_2 \cdot \tan(\gamma \text{ deg})$      $W_2 := w$   
 $W_1 = 25$      $W_2 = 25$

3. Введем вектор начальных приближенных  $y$ :

$$y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

4. В векторе-столбце  $D$  необходимо записать информацию, соответствующую правой части определенного уравнения в системе:

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} 18 \cdot \frac{k \cdot \rho_1 \cdot (W_0 - y_0)}{d^2 \cdot \rho_2} \left[ 1 + 0.17 \cdot \left[ d \cdot \sqrt{\frac{(W_0 - y_0)^2 + (W_1 - y_1)^2 + (W_2 - y_2)^2}{v}} \right]^{\frac{2}{3}} \right] \cdot v + \frac{(y_1)^2}{y_3} \\ 18 \cdot \frac{k \cdot \rho_1 \cdot (W_1 - y_1)}{d^2 \cdot \rho_2} \left[ 1 + 0.17 \cdot \left[ d \cdot \sqrt{\frac{(W_0 - y_0)^2 + (W_1 - y_1)^2 + (W_2 - y_2)^2}{v}} \right]^{\frac{2}{3}} \right] \cdot v - \frac{2 \cdot (y_0 \cdot y_1)}{y_3} \\ 18 \cdot \frac{k \cdot \rho_1 \cdot (W_2 - y_2)}{d^2 \cdot \rho_2} \left[ 1 + 0.17 \cdot \left[ d \cdot \sqrt{\frac{(W_0 - y_0)^2 + (W_1 - y_1)^2 + (W_2 - y_2)^2}{v}} \right]^{\frac{2}{3}} \right] \cdot v - 9.81 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

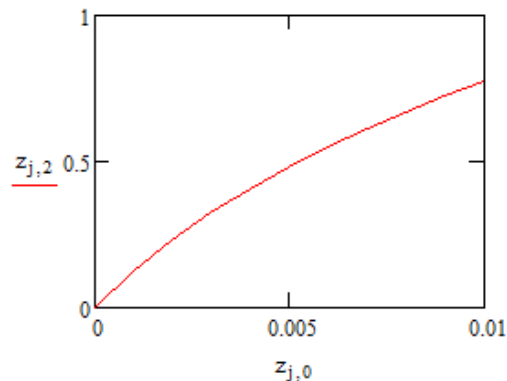
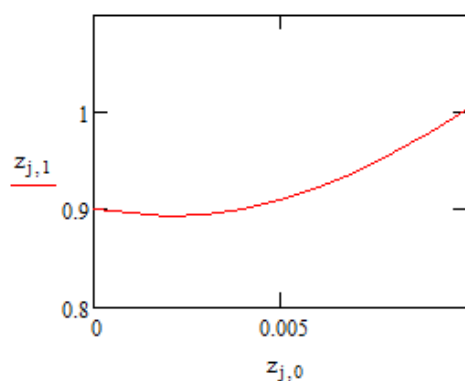
5. Набрать формулу, включающую функцию решения системы дифференциальных уравнений:

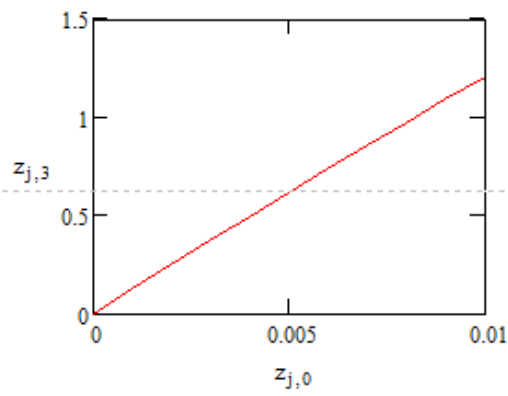
$z := \text{rkfixed}(y, x1, x2, Np, D)$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0.9	0	0	0.01	0	0
1	$1 \cdot 10^{-3}$	0.896	0.124	0.125	0.011	$6.028 \cdot 10^{-3}$	$6.264 \cdot 10^{-5}$
2	$2 \cdot 10^{-3}$	0.894	0.23	0.249	0.012	0.022	$2.498 \cdot 10^{-4}$
3	$3 \cdot 10^{-3}$	0.895	0.322	0.372	0.013	0.044	$5.605 \cdot 10^{-4}$
4	$4 \cdot 10^{-3}$	0.901	0.405	0.494	0.014	0.072	$9.936 \cdot 10^{-4}$
5	$5 \cdot 10^{-3}$	0.91	0.479	0.615	0.014	0.104	$1.548 \cdot 10^{-3}$
6	$6 \cdot 10^{-3}$	0.922	0.547	0.735	0.015	0.138	$2.223 \cdot 10^{-3}$
7	$7 \cdot 10^{-3}$	0.939	0.609	0.854	0.016	0.174	$3.018 \cdot 10^{-3}$
8	$8 \cdot 10^{-3}$	0.958	0.666	0.972	0.017	0.212	$3.931 \cdot 10^{-3}$
9	$9 \cdot 10^{-3}$	0.98	0.72	1.089	0.018	0.251	$4.961 \cdot 10^{-3}$
10	0.01	1.004	0.769	1.205	0.019	0.291	$6.109 \cdot 10^{-3}$

6. По полученным данным строим зависимости изменения радиальной,

$j := 0..10$





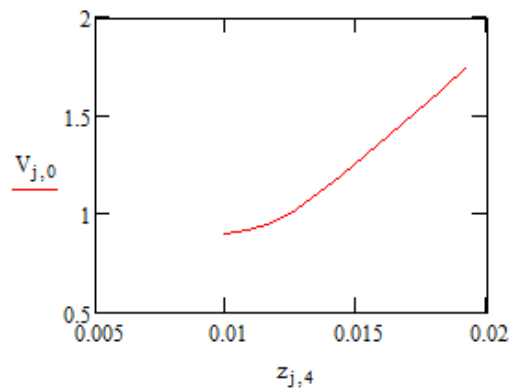
7. Полная скорость частицы определяется по формуле:

$$v_{j,0} = \sqrt{(z_{j,1})^2 + (z_{j,2})^2 + (z_{j,3})^2}$$

$v_{j,0} =$

0.9
0.913
0.956
1.022
1.104
1.198
1.3
1.407
1.519
1.632
1.747

8. По полученным значениям строим график зависимости полной скорости частицы от радиуса трубы:



Ответ: скорость частицы - 1.8 м/с, высота соприкосновения со стенкой -  $6.1 \cdot 10^{-3}$  м.