

ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.056.55

Н. В. Пацей, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ДВОИЧНЫХ КОДОВ С НИЗКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРОВЕРЕК НА ЧЕТНОСТЬ ОСНОВАННЫХ НА МАТРИЦАХ ПЕРЕСТАНОВОК

В статье рассматриваются некоторые конструкции двоичных кодов с низкой плотностью проверок на четность, построенные на основе проверочных матриц перестановок. Представлены результаты моделирования кодовых конструкций для итеративного декодирования по алгоритму минимальных сумм. Обсуждается влияние увеличения количества перестановок в проверочной матрице на корректирующие способности низкоплотностного кода.

This article discusses some versions of binary low density parity check codes built on the basis of permutation matrices. The results of code designs simulation for iterative min-sum decoding algorithm are presented. The effect of influence increasing permutations number in the code check matrix on correction capabilities discussed.

Введение. Коды с низкой плотностью проверок на четность имеют производительность, близкую к пропускной способности для большинства известных в настоящее время каналов передачи [1]. Впервые код с компонентным кодом – проверкой на четность (НППЧ-код) был предложен Галлагером [2]. Классический алгоритм Галлагера конструирования матрицы кода основан на выборе числа n_0 , которое определяет длину проверочного вектора:

$$H_0 = \underbrace{111\dots 1}_{n_0}. \quad (1)$$

На основе вектора H_0 строится диагональная проверочная матрица H_m

$$H_m = \underbrace{\begin{pmatrix} H_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & H_0 \end{pmatrix}}_m \quad (2)$$

с m проверочными матрицами H_0 на главной диагонали. Тогда размер матрицы H_m определяется как $m \times mn_0$. Так как m – достаточно велико, то матрица получается разреженная.

Пусть $\pi(H_m)$ – случайная перестановка столбцов матрицы H_m . В конструкции НППЧ-кода Галлагера необходимо выполнить $l > 2$ независимых случайных перестановок. Полученная матрица имеет размер $lm \times mn_0$;

$$H = \begin{pmatrix} \pi_1(H_m) \\ \pi_2(H_m) \\ \vdots \\ \pi_l(H_m) \end{pmatrix} \quad (3)$$

и определяет НППЧ-код Галлагера длины $n = mn_0$ при условии, что $n \gg n_0$.

Нижняя оценка скорости кода определяется отношением $R \geq 1 - l(1 - R_0)$, где R_0 – скорость кода проверки на четность,

$$R_0 = \frac{n_0 - 1}{n_0}, \quad (4)$$

тогда

$$R \geq 1 - \frac{l}{n_0}. \quad (5)$$

НППЧ-код Галлагера можно обобщить, заменив в проверочной матрице H код проверки на четность на другой линейный блочный код [3]. Такой код будет обобщенным НППЧ-кодом.

Однако со времени появления кода Галлагера было разработано множество различных алгоритмов конструирования НППЧ-кодов [3–5].

Целью настоящей работы является исследование корректирующей способности отдельных конструкций НППЧ-кодов.

Алгоритмы построения проверочных матриц НППЧ-кодов. В настоящее время используются два принципа построения проверочных матриц кода [3–5].

Первый основан на генерации начальной проверочной матрицы с помощью псевдослучайного генератора. Коды, полученные таким методом, называют случайными. Основной недостаток случайных кодов – удаление циклов и нестабильные рабочие характеристики кода.

Второй – использование специальных структурированных методов, основанных на группах, конечных полях и т. п. Они позволяют использовать оптимизацию процедур хранения, кодирования и декодирования, а также получать коды с более предсказуемыми и устойчивыми характеристиками.

В настоящей статье ограничимся исследованием нескольких конструкций проверочных матриц регулярных НППЧ-кодов, основанных на матрицах случайных перестановок [6].

В соответствии с [6] проверочная матрица, основанная на перестановках, может быть представлена в виде

$$H = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n_0} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n_0} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ P_{l1} & P_{l2} & \dots & P_{ln_0} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где каждая из матриц перестановок P_{ij} , $i=1, 2, \dots, l$; $j=1, 2, \dots, n_0$ различна (имеет размер $m \times m$). Условно обозначим НППЧ-код, построенный на основе матриц перестановок, E_r .

Вторая конструкция проверочной матрицы может быть получена на основе перестановок-умножений. В этом случае выбираются натуральные случайные b_i , такие, что $(b_i, m)=1$ и $b_i^x = 1 \pmod m$, $x \geq l$, а также $b_j \neq b_{j-1} b_i^l \pmod m$. На основе множества перестановок-умножений $\sigma_{b_1}, \sigma_{b_2}, \dots, \sigma_{b_l}$ строится матрица

$$H_m = \begin{pmatrix} P_{\sigma_{b_1}} & P_{\sigma_{b_2} b_1} & \dots & P_{\sigma_{b_{n_0}} b_1} \\ P_{\sigma_{b_1}^2} & P_{\sigma_{b_2} b_1^2} & \dots & P_{\sigma_{b_{n_0}} b_1^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\sigma_{b_1}^l} & P_{\sigma_{b_2} b_1^l} & \dots & P_{\sigma_{b_{n_0}} b_1^l} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Все матрицы P в каждой строке и в каждом столбце будут различны. H_m определяет НППЧ-код перестановок-умножений, обозначим его E_m .

Третья конструкция регулярной проверочной матрицы строится на основе степеней-перестановок [6]. Проверочная матрица в этом случае может быть представлена на основе перестановочных матриц заданной степени

$$H_w = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_{n_0} \\ P_1^2 & P_2^2 & \dots & P_{n_0}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^l & P_2^l & \dots & P_{n_0}^l \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Обозначим НППЧ-код степеней перестановок E_w .

Если к каждому из рассмотренных вариантов добавить h -кратную циклическую перестановку, то можно получить модифицированные конструкции [6].

Алгоритмы декодирования. Алгоритмы декодирования НППЧ-кодов делятся на алгоритмы с жестким входом и алгоритмы с мягким входом [7].

Первый класс алгоритмов, известный также как вероятностное декодирование, в качестве входа получает оценку вероятностного распределения символов. К этому классу относятся алгоритмы с распространением доверия и минимальных сумм (упрощенный алгоритм распространения доверия, обладающий меньшей вычислительной сложностью). Они имеют теоретически лучшую корректирующую способность.

Второй класс включает в себя методы декодирования, работающие непосредственно со значениями символов. Для НППЧ-кодов это мажоритарное декодирование.

НППЧ-декодеры работают с представлением кода в виде фактор-графа (Ганнера) и являются итерационными. Остановка итеративной части алгоритма осуществляется, если все проверки оказались выполнены или достигнуто максимальное число итераций.

Экспериментальные результаты и их обобщение. Для оценки конструкций было выполнено моделирование трех описанных конструкций кодеров с использованием среды MatLab. В качестве алгоритма декодирования был выбран алгоритм минимальных сумм (максимальное число итераций составило 20). В качестве среды передачи использовался двоичный канал с аддитивным белым гауссовским шумом.

Для сравнения корректирующей способности конструкций кодов, основанных на случайных перестановках, был выбран двоичный НППЧ-код длины $n = 3290$, с $n_0 = 14$ и $l = 7$, со скоростью $R = 1/2$. Результаты моделирования представлены на рис. 1.

Согласно графику, коды E_m и E_w при одинаковых параметрах имеют похожее поведение. Меньшее число битовых ошибок (BER) дает код E_r . Поэтому дальнейшие сравнительные характеристики будут приведены для НППЧ-кода E_r .

Исследуем зависимость вероятности ошибки на бит от отношения сигнал – шум для кодов при разном числе перестановок (слоев) $l = 4, 7, 9$ для НППЧ-кода E_r , длины $n = n_0 m = 3290$ и $R = 1/2$. Результаты моделирования представлены на рис. 2.

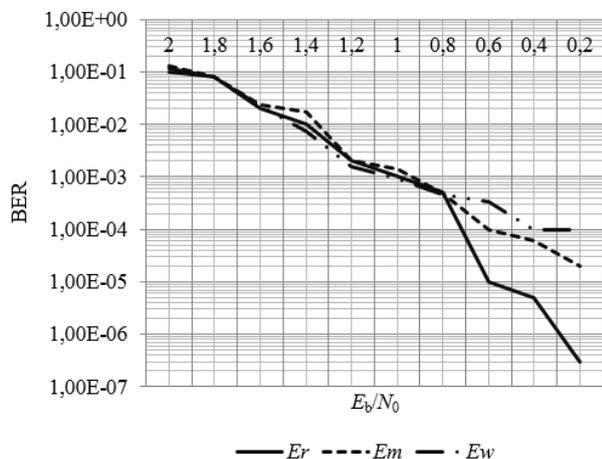


Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки на бит от отношения сигнал – шум для НППЧ-кодов с разными конструкциями проверочной матрицы

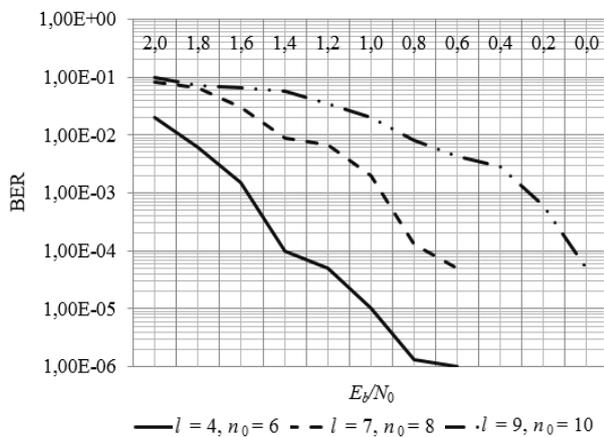


Рис. 2. Зависимость вероятности ошибки на бит от отношения сигнал – шум НППЧ-кодов для разного числа перестановок l и длины проверочного вектора

Как видно, лучшими характеристиками обладают коды, имеющие меньше слоев. Увеличение числа слоев на две-три единицы приводит к проигрышу порядка 0,5–0,6 Дб.

В ходе моделирования менялись длины кодов n и скорости R (в соответствии с таблицей).

Результаты подтверждают известный факт, что лучшими корректирующими способностями обладают коды с большей длиной. Выигрыш при увеличении длины кода в два раза составляет около 0,6 Дб.

Параметры моделируемых кодов для $m = 235$

n	n_0	R		
		$l = 4$	$l = 7$	$l = 9$
1 410	6	0,3	–	–
1 880	8	0,5	0,1	–
2 350	10	0,6	0,3	0,1
3 290	14	0,7	0,5	0,4
5 640	24	0,8	0,7	0,6
12 220	52	0,9	0,9	0,8
19 270	82	–	–	0,9

Выводы. Результаты моделирования показывают, что конструкции, основанные на матрицах перестановок, имеют стабильные корректирующие способности. Регулярные конструкции проверочных матриц НППЧ-кодов, основанных на перестановках-умножениях и степенях перестановок, имеют существенно худшие характеристики. Так же установлено, что декодер, построенный на основе алгоритма минимальных сумм, показывает наилучшие результаты при небольшом числе перестановок проверочной матрицы.

Литература

- Richardson T., Urbanke R. The capacity of low-density parity check codes under message-passing decoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. Vol. 47, No. 1, P. 599–618.
- Галлагер Р. Г. Коды с малой плотностью проверок на четность. М.: Мир, 1966. 40 с.
- Miladinovic N., Fossorier M. Generalized LDPC Codes with Reed-Solomon and BCH Codes as Component Codes for Binary Channels // Proc. IEEE Global Conf. on Communication (GLOBECOM). St. Louis, USA, 2005. P. 240–245.
- Gabidulin E., Moinian A., Honary B. Generalized construction of quasi-cyclic regular LDPC codes based on permutation matrices // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory. 2006. P. 679–683.
- Fossorier P. C. Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrix // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. Vol. 50, No. 8. P. 1788–1793.
- Зяблов В. В., Иванов Ф. И., Потапов В. Г. Сравнение различных конструкций двоичных МПП-кодов, построенных на основе матриц перестановок // Информационные процессы. 2012. Т. 12, № 1. С. 31–52.
- Kschischang F. R., Frey B. J., Loeliger H. A. Factor graphs and the sum-product algorithm // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. Vol. 47, No. 2. P. 498–519.

Поступила 20.03.2014