

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. В. Кленицкий

ФИЗИКА

В 5-ти частях

Часть 3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

**Тексты лекций для студентов
инженерно-технических специальностей**

Минск 2015

УДК 53+537](075.8)
ББК 22.3я73
К48

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета.

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой технической физики БНТУ *И. А. Хорунжий*;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической физики и астрофизики БГУ
Г. С. Шуляковский

Кленицкий, Д. В.

К48 Физика. В 5 ч. Ч. 3. Электричество : тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей / Д. В. Кленицкий. – Минск : БГТУ, 2015. – 109 с.

Предлагаемое пособие составлено на основе действующей учебной программы по физике для студентов инженерно-технических специальностей. В издании рассмотрены основные понятия, определения и законы науки об электричестве. Изложение материала позволяет использовать тексты лекций как при изучении материала, так и в процессе повторения, обобщения и систематизации пройденного, а также при самостоятельной подготовке студентов к сдаче зачетов и экзаменов.

УДК 53+537](075.8)
ББК 22.3я73

© УО «Белорусский государственный
технологический университет», 2015
© Кленицкий Д. В., 2015

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Глава 1. Электростатика | 5 |
| § 1.1. Электрический заряд | 5 |
| § 1.2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона | 7 |
| § 1.3. Электрическое поле. Напряженность поля | 8 |
| § 1.4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме | 12 |
| § 1.5. Применение теоремы Гаусса к расчету полей | 17 |
| § 1.6. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Потенциал | 23 |
| § 1.7. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом | 27 |
| § 1.8. Электрическая энергия системы зарядов | 28 |
| § 1.9. Электрический диполь..... | 29 |
| § 1.10. Диполь во внешнем электрическом поле | 32 |
| Глава 2. Электрическое поле в веществе | 36 |
| § 2.1. Диэлектрики при наличии электрического поля | 36 |
| § 2.2. Поляризованность | 38 |
| § 2.3. Объемные и поверхностные связанные заряды..... | 40 |
| § 2.4. Электрическое поле в диэлектрике | 43 |
| § 2.5. Вектор электрического смещения | 46 |
| § 2.6. Условия на границе раздела двух диэлектриков | 48 |
| § 2.7. Сегнетоэлектрики, электреты | 51 |
| § 2.8. Пьезоэлектричество | 54 |
| § 2.9. Электрическое поле внутри и снаружи проводника | 56 |
| § 2.10. Емкость. Конденсаторы | 59 |
| § 2.11. Батареи конденсаторов | 64 |
| § 2.12. Энергия уединенного проводника и конденсатора. Энергия электрического поля | 65 |
| Глава 3. Постоянный электрический ток | 68 |
| § 3.1. Электрический ток. Сила и плотность тока | 68 |

| | |
|--|------------|
| § 3.2. Закон Ома для однородного проводника..... | 71 |
| § 3.3. Электродвижущая сила | 73 |
| § 3.4. Обобщенный закон Ома | 76 |
| § 3.5. Соединение проводников в электрические цепи | 78 |
| § 3.6. Правила Кирхгофа | 80 |
| § 3.7. Мощность тока. Закон Джоуля – Ленца | 82 |
| § 3.8. Вывод законов Ома и Джоуля – Ленца в классической электронной теории электропроводности металлов | 84 |
| § 3.9. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов | 87 |
| Глава 4. Контактные и эмиссионные явления в металлах, электрический ток в жидкостях и газах..... | 90 |
| § 4.1. Контактная разность потенциалов | 90 |
| § 4.2. Термоэлектрические явления..... | 93 |
| § 4.3. Эмиссионные явления в металлах..... | 94 |
| § 4.4. Электрический ток в жидкостях..... | 97 |
| § 4.5. Электрический ток в газах | 102 |
| Список использованной и рекомендуемой литературы | 109 |

Глава 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатикой называется раздел физики, в котором изучают свойства и взаимодействия неподвижных электрических зарядов и создаваемых ими электрических полей.

§ 1.1. Электрический заряд

Из школьного курса физики известно, что все тела в природе при определенных условиях способны приобретать электрический заряд. Процесс, в результате которого тело заряжается, называется *электризацией*. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Силы взаимодействия между заряженными телами называют *электрическими*.

Электрический заряд это первичное понятие, подобно понятию массы в механике. Это значит, что его нельзя определить через другие, более простые понятия. Все, что мы можем сделать, – это описать его свойства.

В природе имеется два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Силы взаимодействия электрических зарядов таковы, что заряды одного знака отталкиваются, а разных знаков – притягивают друг друга.

Электрическим зарядом обладают некоторые элементарные частицы. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине. Эту величину называют *элементарным зарядом* и обозначают буквой e . К числу элементарных частиц принадлежат, в частности, электрон (имеющий отрицательный заряд $q = -e$) и протон (обладающий положительным зарядом $q = +e$). Из этих частиц построены атомы любого вещества. Протоны входят в состав ядер атомов, а электроны в состав электронной оболочки атомов.¹

Таким образом, электрические заряды входят в состав всех макротел. В обычных условиях в каждой макроскопической части объема тела содержится одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в лю-

¹ Более подробно об этом будет изложено в разделе курса, посвященном атому и его строению.

бом объеме тела равна нулю. О таком теле говорят, что оно не заряжено или электрически нейтрально. Если тем или иным способом к телу будут добавлены электроны в преобладающем над протонами количестве, то оно окажется отрицательно заряженным. Наоборот, отняв от нейтрального тела некоторое количество электронов, можно обеспечить в нем преобладание протонов и сообщить ему, таким образом, положительный заряд. Простейшим способом получения электрических зарядов является трение одного тела о другое. Например, стеклянную палочку натирают куском кожи или эбонитовую – куском шерсти. Возникающие при этом на стекле заряды принято считать положительными, а на эбоните отрицательными. Очевидно, на поверхности стекла получается недостаток электронов, а на эбоните – наоборот, избыток.

Поскольку заряд q любого макроскопического тела образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным элементарному заряду e :

$$q = \pm Ne, \quad (1.1)$$

где N целое число. Согласно (1.1), заряд любого тела может принимать только определенные дискретные значения. Это свойство называют *законом квантования электрического заряда*. Элементарный заряд весьма мал. Поэтому возможную величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно.

Величина электрического заряда не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой он измеряется. Инвариантность электрического заряда принимается в качестве одного из экспериментальных обоснований теории электричества. Отсюда вытекает, что величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

Фундаментальным свойством взаимодействия заряженных частиц и тел является *закон сохранения заряда*: в изолированной системе полный электрический заряд остается постоянным. Под изолированной системой понимают систему, в которую из внешней среды через ее границы не проникают электрически заряженные частицы (тела). Полный электрический заряд q системы равен алгебраической сумме ее положительных и отрицательных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n (с учетом знаков зарядов):

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.2)$$

Единицей измерения электрического заряда в СИ является *кулон* (Кл). Она является производной величиной и выражается через

две основные единицы – силу тока и время. По определению один кулон – это заряд, проходящий за одну секунду через поперечное сечение проводника, в котором поддерживается постоянный электрический ток силой один ампер: $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$. Элементарный заряд, выраженный в кулонах, равен

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}. \quad (1.3)$$

§ 1.2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона

Как уже отмечалось, наличие у тела электрического заряда проявляется в том, что такое тело взаимодействует с другими заряженными телами. Тела, несущие заряды одинакового знака (одноименно заряженные), отталкиваются друг от друга. Разноименно заряженные тела притягиваются друг к другу. Наиболее простой вид законы взаимодействия заряженных тел имеют в случае точечных зарядов. *Точечным зарядом* называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, с которыми оно взаимодействует.

Согласно *закону Кулона*, модуль силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга в вакууме, определяется соотношением:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}, \quad (1.4)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

В СИ коэффициент пропорциональности k в законе Кулона (1.4) равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}. \quad (1.5)$$

Величину $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ (Ф/м) называют *электрической постоянной*.

Чтобы формула (1.4) давала не только значение модуля силы, но и ее направление, удобно записать закон Кулона в векторном виде:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.6)$$

Здесь \vec{F} – сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 ; \vec{r} – вектор, проведенный от заряда q_1 к заряду q_2 (рис. 1.1). Легко заметить, что формула (1.6) дает правильное направление силы при любых знаках зарядов q_1 и q_2 , т. е. и при отталкивании ($q_1q_2 > 0$, рис. 1.1, а), и при притяжении ($q_1q_2 < 0$, рис. 1.1, б) этих зарядов.

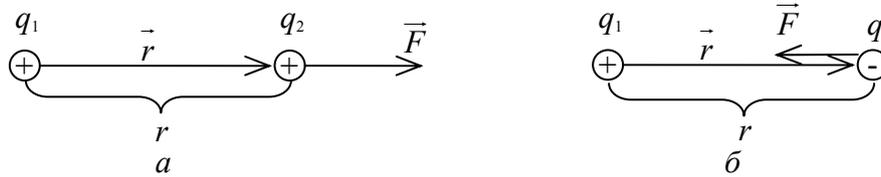


Рис. 1.1

Закон Кулона подтверждается большим количеством экспериментальных данных. Он выполняется как для очень больших, так и для очень малых расстояний. В частности, исследования атомных явлений позволяют заключить, что он справедлив, по крайней мере, вплоть до расстояний порядка размеров атомного ядра (10^{-15} м).

Опыт показывает, что сила, действующая на точечный заряд со стороны системы точечных зарядов, равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов системы при отсутствии других зарядов:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.7)$$

Это утверждение называется *принципом суперпозиции* (наложения).

§ 1.3. Электрическое поле. Напряженность поля

Первоначально закон Кулона трактовался с позиций *дальнодействия*, т. е. считалось, что один заряд действует на другой без материальных посредников. Поэтому и называлась эта концепция как «действие на расстоянии». В первой половине XIX в. выработалась другая точка зрения на механизм взаимодействия зарядов. Согласно ей, взаимодействие между заряженными телами осуществляется посредством электрического поля, которое создают вокруг себя электрические заряды. Поле играет роль материального посредника, осуществляющего взаимодействие. Поле проявляет себя в том, что

помещенный в какую-либо его точку другой заряд испытывает действие силы. Такое представление получило название концепции *близкодействия*. Согласно представлениям современной физики, поле реально существует и, наряду с веществом, является одной из форм существования материи.

Для обнаружения и исследования электрического поля в данном месте пространства нужно поместить туда *пробный электрический заряд* и измерить силу, действующую на него. Практически это будет какое-то заряженное тело, которое имеет достаточно малые размеры (точечный заряд), чтобы можно было судить о свойствах поля в определенной точке пространства. Кроме того, помещаемый заряд должен быть достаточно малым, чтобы его внесение не вызывало заметного искажения интересующего нас поля (вследствие возможного перераспределения создающих поле зарядов). Сила, действующая на неподвижный пробный электрический заряд, зависит как от поля, так и от самого пробного заряда. Эта сила тем больше, чем больше величина пробного заряда. Опыт показывает, что отношение силы к пробному заряду уже не зависит от величины заряда. Значит, этим отношением характеризуется само поле.

Векторную величину, равную отношению силы \vec{F} , действующей на неподвижный пробный заряд $q_{\text{пр}}$, к величине этого заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}} \quad (1.8)$$

называют *напряженностью электрического поля*. Напряженность является силовой характеристикой электрического поля. Она численно равна силе, действующей на единичный положительный пробный заряд.

Зная напряженность электрического поля, можно найти силу, действующую на любой точечный заряд q , помещенный в данную точку. В соответствии с (1.8) выражение для этой силы имеет вид

$$\vec{F} = q\vec{E} . \quad (1.9)$$

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом, можно определить с помощью закона Кулона (1.6). Будем рассматривать точечный заряд q как источник электрического поля. Этот заряд действует на расположенный на расстоянии r от него пробный заряд $q_{\text{пр}}$ с силой

$$\vec{F} = k \frac{qq_{\text{пр}}}{r^3} \vec{r} . \quad (1.10)$$

Поэтому, в соответствии с (1.8), напряженность электрического поля создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от него, определяется выражением

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (1.11)$$

где \vec{r} – вектор, проведенный от заряда q к произвольной точке поля.

Согласно (1.11), вектор \vec{E} направлен от заряда вдоль прямой, проходящей через заряд q и данную точку поля, если он положителен (рис. 1.2, а), и к заряду, если он отрицателен (рис. 1.2, б).



Рис. 1.2

Модуль напряженности поля точечного заряда определяется соотношением

$$E = k \frac{|q|}{r^2}. \quad (1.12)$$

Из принципа суперпозиции сил (1.7) и выражения для силы через напряженность электрического поля (1.9) вытекает *принцип суперпозиции электрических полей*: напряженность электрического поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.13)$$

Принцип суперпозиции позволяет вычислять напряженность поля любой системы неподвижных зарядов. Любой неточечный заряд можно мысленно разбить на малые части, чтобы каждую из них можно было считать точечным зарядом. Напряженность электрического поля в произвольной точке находится как векторная сумма напряженностей,

создаваемых этими точечными зарядами. В случае непрерывного распределения заряда сумма в (1.13) переходит в интеграл:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (1.14)$$

где $d\vec{E}$ – напряженность электрического поля, создаваемого зарядом, на которые разбит данный неточечный заряд. При этом интегрирование производится по области распределения зарядов.

В СИ напряженность электрического поля измеряется в *вольтах на метр*: $[E] = \text{В/м}$, где В (вольт) является единицей измерения потенциала электрического поля.

Для графического изображения электростатических полей используют понятие силовых линий поля, или линий напряженности. *Силовыми линиями поля* называют кривые, касательные к которым в любой точке поля совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке. Силовым линиям приписывают направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. При таком соглашении силовые линии электрического поля начинаются у положительных зарядов и заканчиваются на отрицательных. Линии проводят гуще в тех местах, где напряженность поля больше, и реже там, где она меньше. Таким образом, густота силовых линий дает представление о модуле напряженности (рис. 1.3).

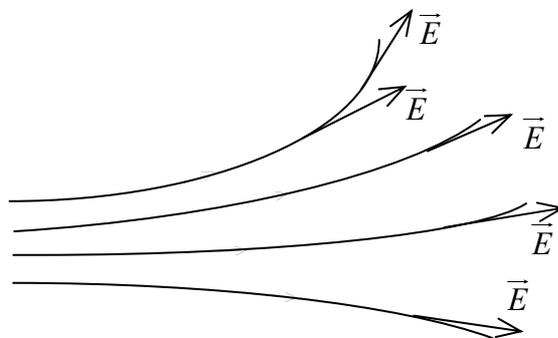


Рис. 1.3

На рис. 1.4 показаны силовые линии поля уединенного положительного и отрицательного точечных зарядов. Из симметрии очевидно, что это радиальные прямые (направленные по радиусу окружности, охватывающей заряд), распределенные с одинаковой густотой по всем направлениям. Они, начавшись на заряде, уходят в бесконечность (для положительного заряда) и, приходя из бесконечности, заканчиваются на заряде (для отрицательного заряда).

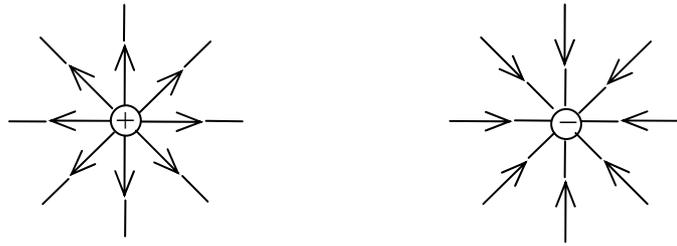


Рис. 1.4

Более сложный вид имеет картина линий поля, создаваемых двумя зарядами противоположных знаков (рис. 1.5)

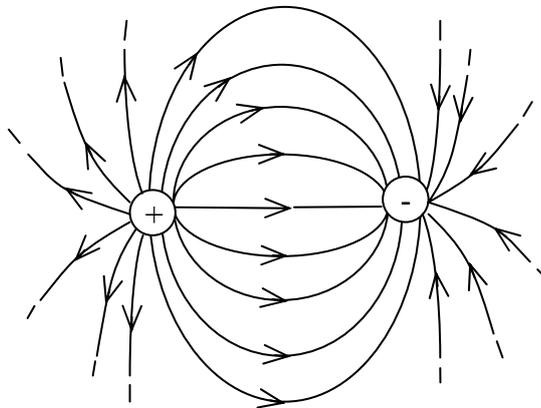


Рис. 1.5

В этом случае силовые линии выходят из положительного заряда и оканчиваются на отрицательном, хотя на рисунке нельзя показать, как замыкаются уходящие далеко от зарядов линии.

§ 1.4. Поток вектора напряженности.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Элементарным (бесконечно малым) потоком вектора напряженности \vec{E} сквозь бесконечно малую площадь dS называют величину

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS, \quad (1.15)$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с единичным вектором нормали \vec{n} к площади; $E_n = E\cos\alpha$ –

проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площади, α – угол между этими векторами (рис. 1.6). Заметим, что выбор направления вектора \vec{n} (а следовательно, и $d\vec{S}$) условен, его можно было бы направить и в противоположную сторону.

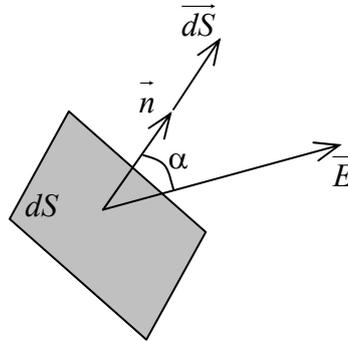


Рис. 1.6

Поток вектора напряженности \vec{E} сквозь произвольную поверхность S равен сумме элементарных потоков через бесконечно малые площади, на которые разбита эта поверхность:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.16)$$

Поток Φ зависит не только от конфигурации поля \vec{E} , но и от выбора направления нормали. В случае замкнутых поверхностей принято нормаль \vec{n} выбирать наружу области, охватываемой этими поверхностями.

Теорема Гаусса связывает поток вектора напряженности сквозь произвольную замкнутую поверхность с зарядом, находящимся в объеме, ограничиваемом этой поверхностью.

Пусть точечный заряд q находится внутри объема, ограниченного поверхностью S (рис. 1.7). Для определенности считаем, что заряд положительный. Рассмотрим поток вектора напряженности сквозь данную поверхность:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S}, \quad (1.17)$$

где кружок у интеграла означает, что интегрирование происходит по замкнутой поверхности.

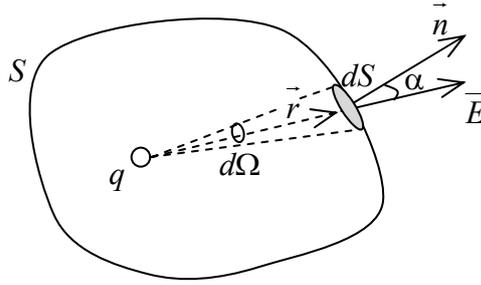


Рис. 1.7

Принимая во внимание формулу (1.11) для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом в вакууме, и соотношение (1.5) для коэффициента пропорциональности в законе Кулона, найдем

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3}. \quad (1.18)$$

Учтем, что

$$\frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2} = \frac{dS'}{r^2} = d\Omega, \quad (1.19)$$

где dS' – проекция площади элемента dS на плоскость, перпендикулярную вектору \vec{r} ; $d\Omega$ – телесный угол, под которым элемент площади dS виден из точки нахождения заряда.

Таким образом,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega. \quad (1.20)$$

Интеграл в (1.20) равен 4π , полному телесному углу, поэтому

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.21)$$

В случае, если заряд q находится вне объема, ограниченного поверхностью S (рис. 1.8), поток вектора напряженности \vec{E} через поверхность вычисляется аналогично и определяется формулой (1.18). Однако теперь подынтегральное выражение принимает как положительные, так и отрицательные значения из-за косинуса угла в (1.19). В тех точках поверхности, где $\alpha < 90^\circ$, оно положительно, а где $\alpha > 90^\circ$, – отрицательно. Это означает, что на поверхности ABC подынтегральное выражение положительно, а на ADC – отрицательно.

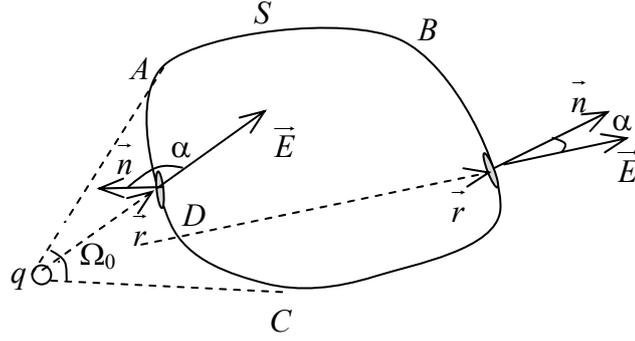


Рис. 1.8

Поэтому элементы телесного угла в интеграле (1.20) войдут с различными знаками для поверхностей ABC и ADC . Так что

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{ABC} d\Omega - \int_{ADC} d\Omega \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\Omega_0 - \Omega_0) = 0, \quad (1.22)$$

где было учтено, что поверхности ABC и ADC видны из точки расположения заряда под одним и тем же телесным углом Ω_0 .

Объединяя результаты (1.21) и (1.22), можно окончательно написать:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, & q \text{ внутри объема, ограниченного } S, \\ 0, & q \text{ вне объема, ограниченного } S. \end{cases} \quad (1.23)$$

Утверждение, содержащееся в (1.23), составляет содержание *теоремы Гаусса* для точечного заряда в вакууме. Ее обобщение на систему точечных зарядов производится с помощью принципа суперпозиции (1.13). Поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в этом случае равен сумме потоков Φ_i , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \int_S \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \Phi_i. \quad (1.24)$$

Принимая во внимание (1.23) для Φ_i , формула (1.24) примет вид

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^n q_i = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.25)$$

где $Q = \sum q_i$ – полный заряд, охватываемый поверхностью S .

Из обоснования теоремы Гаусса видно, что ее справедливость обуславливается возможностью сведения подынтегрального выражения (1.18) с помощью (1.19) к дифференциалу телесного угла $d\Omega$. Это

возможно только в том случае, когда напряженность электрического поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда, что, в свою очередь, является следствием закона Кулона. Поэтому физической основой теоремы Гаусса является закон Кулона. Иногда эту теорему называют интегральной формулировкой закона Кулона. Теорема Гаусса позволяет определить полный заряд, заключенный внутри объема, посредством измерения потока напряженности сквозь поверхность, ограничивающую объем.

Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме. Для этого представим заряд Q в объеме V , охватываемом замкнутой поверхностью S , как $Q = \langle \rho \rangle V$, где $\langle \rho \rangle$ – среднее по объему V значение объемной плотности заряда. Подставим это в уравнение (1.25) и разделим обе его части на объем V . В результате получим

$$\frac{\Phi}{V} = \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{V} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}. \quad (1.26)$$

Затем устремим объем V к нулю, стягивая его к интересующей нас точке поля. При этом среднее значение $\langle \rho \rangle$ будет стремиться к значению ρ в данной точке поля. Величину, являющуюся пределом отношения потока Φ к объему V при $V \rightarrow 0$, называют *дивергенцией* вектора \vec{E} и обозначают $\text{div} \vec{E}$. Таким образом, по определению

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{V}. \quad (1.27)$$

Следовательно, дивергенция вектора \vec{E} связана с плотностью заряда в той же точке уравнением

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.28)$$

Это уравнение и выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме. В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: дивергенция напряженности электрического поля в данной точке зависит только от плотности электрического заряда в этой же точке.

В математике доказывается, что в декартовой системе координат дивергенция вектора определяется по формуле

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.29)$$

Согласно (1.27), дивергенция вектора характеризует поток данного поля через поверхность достаточно малой окрестности точки поля. В тех точках поля, где дивергенция вектора \vec{E} положительна, мы имеем источники поля (положительные заряды), а в тех точках, где она отрицательна, – стоки (отрицательные заряды). Силовые линии вектора \vec{E} выходят из источников поля, а заканчиваются в местах стоков.

§ 1.5. Применение теоремы Гаусса к расчету полей

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. В случае равномерно заряженной плоскости заряд, приходящийся на единицу площади поверхности (поверхностная плотность заряда σ), одинаков во всех точках плоскости:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \text{const}. \quad (1.30)$$

По соображениям симметрии вектор напряженности \vec{E} электрического поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью, перпендикулярен плоскости. Он направлен от плоскости, если она заряжена положительно, и к плоскости, если ее заряд отрицателен. Кроме того, в симметричных относительно плоскости точках вектор \vec{E} одинаков по модулю и противоположен по направлению. В качестве замкнутой поверхности (*гауссовой поверхности*), охватывающей заряд на плоскости, выберем цилиндр с основаниями, симметрично расположенными по разные стороны плоскости параллельно ей (рис. 1.9).

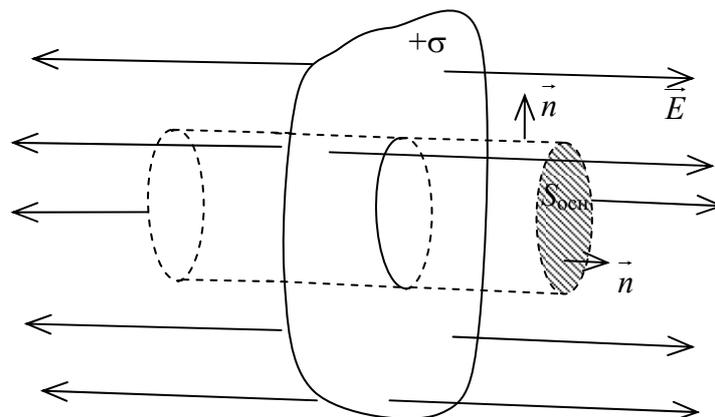


Рис. 1.9

Поток вектора напряженности через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, поскольку \vec{E} перпендикулярен к нормали \vec{n} , проведенной к боковой поверхности цилиндра. Поэтому поток через поверхность цилиндра будет равен потоку через два его основания:

$$\Phi = \oint_S E_n dS = 2 \int_{S_{\text{осн}}} E_n dS = 2E_n S_{\text{осн}}, \quad (1.31)$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания цилиндра.

С учетом (1.30) заряд, охватываемый поверхностью цилиндра,

$$Q = \sigma S_{\text{осн}}. \quad (1.32)$$

Подставив (1.31) и (1.32) в теорему Гаусса (1.25), найдем проекцию вектора \vec{E} на нормаль к заряженной плоскости:

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.33)$$

Если $\sigma > 0$, то $E_n > 0$, а значит, вектор \vec{E} направлен от заряженной плоскости, как на рис. 1.9; если же $\sigma < 0$, то $E_n < 0$ и вектор \vec{E} направлен к заряженной плоскости. Модуль вектора напряженности $E = |E_n|$. Согласно (1.33), E не зависит от расстояния до плоскости, т. е. соответствующее электрическое поле является однородным (как слева, так и справа от плоскости). Полученный результат справедлив только для бесконечной плоской поверхности, поскольку только в этом случае могут быть использованы приведенные соображения симметрии. Плоскость может считаться бесконечной, если расстояние от нее пренебрежимо мало по сравнению с ее размерами. Только на таких расстояниях напряженность поля не зависит от расстояния до плоскости. На больших расстояниях формула (1.33) неприменима, поскольку напряженность поля убывает с расстоянием. Если расстояние порядка размеров самой плоскости, то величина и направление поля в пространстве меняются очень сложно. На расстояниях, очень больших по сравнению с размерами плоскости, заряженная плоскость действует как точечный заряд: поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Поле двух бесконечных параллельных плоскостей. Найдем напряженность электрического поля, создаваемого двумя параллельными плоскостями, заряженными равномерно разноименными зарядами с поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$ (здесь σ обозначает модуль по-

верхностной плотности заряда). Воспользуемся принципом суперпозиции электрических полей (1.13):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1.34)$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – напряженности электрических полей, создаваемых каждой плоскостью в отдельности. Направления этих векторов показаны на рис. 1.10, а их модули определяются соотношением (1.33), так что

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.35)$$

Между плоскостями напряженности складываемых полей имеют одинаковое направление, поэтому результирующая напряженность поля между плоскостями

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.36)$$

Вне этой области векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 имеют противоположное направление, так что результирующая напряженность

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0. \quad (1.37)$$

Таким образом, поле в данном случае сосредоточено между плоскостями и является однородным в этой области. Полученный результат приближенно справедлив и для пластин конечных размеров, если только расстояние между пластинами значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). Здесь заметные отклонения поля от однородности наблюдаются только вблизи краев пластин (этим при расчетах часто пренебрегают).

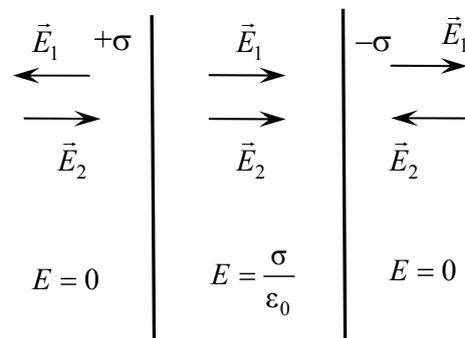


Рис. 1.10

Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).
 Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R , заряженный с постоянной поверхностной плотностью (1.30). В этом случае заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра, т. е. линейная плотность заряда λ , является постоянной величиной:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{const} . \quad (1.38)$$

Из соображений симметрии следует, что напряженность электрического поля направлена радиально, т. е. вектор \vec{E} в каждой точке направлен вдоль радиуса цилиндра, перпендикулярно его оси, а его модуль зависит только от расстояния до оси. Вектор \vec{E} направлен от цилиндра, если тот заряжен положительно, и к цилиндру, если его заряд отрицателен. В качестве замкнутой поверхности, охватывающей заряд, выберем цилиндр радиуса $r > R$ и высотой h , коаксиальный с заряженным цилиндром (рис. 1.11).

Поток вектора напряженности сквозь торцы этого цилиндра равен нулю, поэтому поток через поверхность цилиндра будет равен потоку через его боковую поверхность:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS = E_n S_{\text{бок}} = E_n 2\pi r h , \quad (1.39)$$

где $S_{\text{бок}} = 2\pi r h$ – площадь боковой поверхности цилиндра.

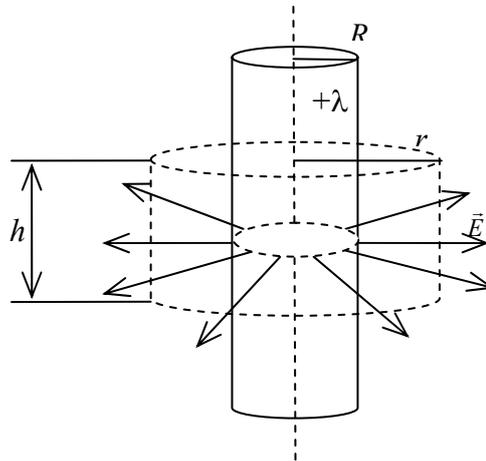


Рис. 1.11

С учетом (1.38) заряд, охватываемый поверхностью цилиндра,

$$Q = \lambda h . \quad (1.40)$$

Подставив (1.39) и (1.40) в теорему Гаусса (1.25), найдем проекцию вектора \vec{E} на нормаль к поверхности:

$$E_n = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R. \quad (1.41)$$

При $\lambda > 0$ величина $E_n > 0$ и вектор \vec{E} направлен от заряженной плоскости, как на рис. 1.11; если же $\lambda < 0$, то $E_n < 0$ и вектор \vec{E} направлен к заряженной плоскости.

Если $r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области $E = 0$ независимо от r . Таким образом, внутри равномерно заряженного по поверхности бесконечного цилиндра поля нет.

Заметим, что цилиндр (нить) можно считать бесконечным, если расстояние от него много меньше его длины.

Поле равномерно заряженной сферической поверхности. Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса R , заряженной равномерно зарядом q , является центрально-симметричным: направление вектора \vec{E} в любой точке проходит через центр сферы, а его модуль зависит только от расстояния r до центра сферы. В качестве замкнутой поверхности, охватывающей заряд на сфере, следует выбрать концентрическую сферу (рис. 1.12). Пусть ее радиус $r > R$, тогда поток вектора напряженности сквозь выбранную замкнутую поверхность

$$\Phi = \oint_S E_n dS = E_n S = E_n 4\pi r^2, \quad (1.42)$$

где $S = 4\pi r^2$ – площадь поверхности сферы.

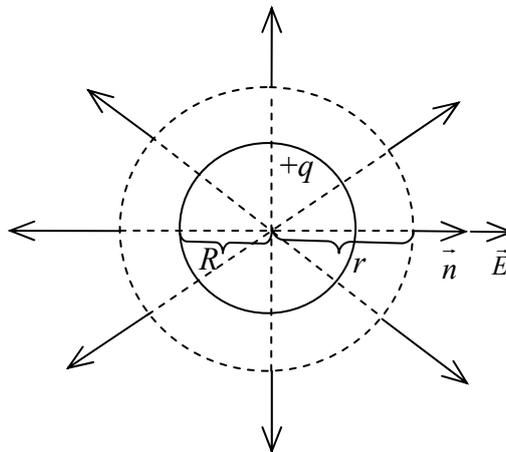


Рис. 1.12

Принимая во внимание теорему Гаусса, найдем проекцию вектора \vec{E} на нормаль к поверхности:

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R. \quad (1.43)$$

Знак заряда q в формуле (1.43) определяет знак проекции E_n , а следовательно, и направление самого вектора \vec{E} : от заряженной сферы (при $q > 0$) или к ней (при $q < 0$). Согласно (1.43), вне заряженной поверхности напряженность поля убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда (см. формулу (1.12)).

Если $r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области всюду $E = 0$, т. е. внутри заряженной поверхности электрическое поле отсутствует.

Поле равномерно заряженного по объему шара. Пусть заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R . В этом случае объемная плотность заряда ρ одинакова во всех точках шара:

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \text{const}. \quad (1.44)$$

Поле такой системы также является центрально-симметричным. Очевидно, что для поля вне шара при $r > R$ получится тот же результат, что и для сферической поверхности (см. формулу (1.43)). Внутри шара при $r < R$ заряд, охватываемый гауссовой поверхностью,

$$q' = \rho V' = q \frac{V'}{V} = q \frac{r^3}{R^3}, \quad (1.45)$$

где $q = \rho V$ – полный заряд шара; $V' = 4\pi r^3/3$ – объем гауссовой поверхности, охватывающей заряд; $V = 4\pi R^3/3$ – объем заряженного шара.

Согласно теореме Гаусса,

$$\Phi = E_n 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}, \quad (1.46)$$

откуда

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r, \quad r < R. \quad (1.47)$$

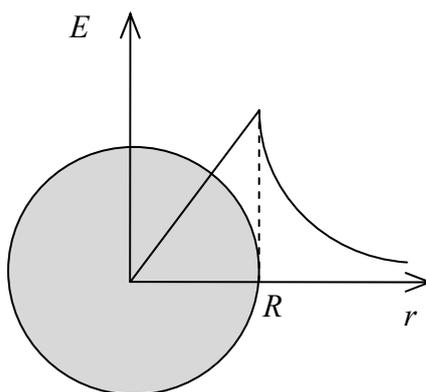


Рис. 1.13

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара напряженность растет линейно с расстоянием r от центра шара, вне шара напряженность убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда. График зависимости E от r показан на рис. 1.13.

§ 1.6. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Потенциал

Так как сила, действующая в электрическом поле на точечный заряд q , определяется соотношением (1.9), то при перемещении заряда под действием этой силы на $d\vec{r}$ совершается работа

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = q\vec{E} d\vec{r} = qE |d\vec{r}| \cos \alpha = qE_s ds, \quad (1.48)$$

где α – угол между вектором напряженности \vec{E} поля и перемещения $d\vec{r}$; $E_s = E \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{E} на вектор перемещения (рис. 1.14); $ds = |d\vec{r}|$ – элементарный путь. Работа, совершаемая полем, считается положительной, а внешними относительно поля силами – отрицательной.

При перемещении заряда из точки 1 в точку 2 по траектории L (рис. 1.14) работа

$$A = \int_1^2 \delta A = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = q \int_1^2 E_s ds. \quad (1.49)$$

Найдем работу по перемещению заряда q_1 в поле, создаваемом точечным зарядом q_2 . В этом случае напряженность электрического

поля \vec{E} определяется по формуле (1.11). Подстановка выражения для \vec{E} в (1.49) дает

$$A = q_1 \int_1^2 \frac{kq_2}{r^3} \vec{r} d\vec{r} = kq_1q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1.50)$$

где r_1 и r_2 – расстояния между зарядами до и после перемещения.

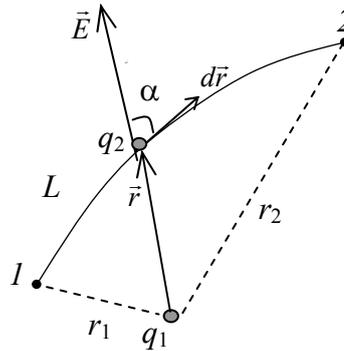


Рис. 1.14

Работа (1.50) не зависит от траектории движения, а определяется только начальным и конечным положениями заряда q_2 , а именно расстояниями между зарядами в начальном r_1 и конечном r_2 положениях. Следовательно, сила электростатического поля точечного заряда является консервативной (см. [1], § 4.3).

С учетом принципа суперпозиции электрических полей (1.13) из консервативности поля точечного заряда следует консервативность электростатического поля, создаваемого любым, сколь угодно сложным распределением неподвижных зарядов. В этом случае сила, действующая на перемещаемый заряд, будет определяться полной напряженностью поля, равной векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Поэтому работа при перемещении заряда равна сумме работ сил, действующих со стороны отдельных точечных зарядов. Работа каждой такой силы не зависит от формы траектории. Следовательно, и суммарная работа – работа результирующей силы – также не зависит от траектории, что и доказывает консервативный характер любого электростатического поля.

Для заряда в электростатическом поле, как и в случае любого консервативного поля, можно ввести понятие потенциальной энергии, за счет которой силами поля совершается работа. Работа сил консер-

вативного поля равна убыли потенциальной энергии. Принимая во внимание (1.49), запишем работу сил электростатического поля:

$$A = W_1 - W_2 = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}, \quad (1.51)$$

где W_1 и W_2 – потенциальные энергии заряда q до и после перемещения.

Из соотношения (1.51) следует, что работа по перемещению заряда и потенциальная энергия заряда пропорциональны величине заряда q . Вследствие этого удобно рассматривать потенциальную энергию в расчете на единицу заряда. Возникающую при этом физическую величину называют потенциалом электрического поля. Согласно определению, *потенциалом поля* в данной точке называют отношение потенциальной энергии W пробного заряда $q_{\text{пр}}$ к величине этого заряда, помещенного в данную точку поля:

$$\varphi = \frac{W}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.52)$$

Потенциал поля не зависит от величины пробного заряда и численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля. Потенциал является энергетической характеристикой электрического поля, так как, в соответствии с (1.52), он определяет потенциальную энергию любого точечного заряда q , помещенного в данную точку поля:

$$W = q\varphi. \quad (1.53)$$

В СИ напряженность электрического поля измеряется в *вольтах*: $[\varphi] = \text{В} = \text{Дж/Кл}$.

Из (1.51) и (1.53) следует, что работа по перемещению заряда в электростатическом поле определяется соотношением

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}. \quad (1.54)$$

Отсюда убыль потенциала двух точек поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}. \quad (1.55)$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками называют *напряжением* между точками (или просто напряжением) U :

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.56)$$

При перемещении заряда по замкнутой траектории точки 1 и 2 совпадают, так что $\varphi_1 = \varphi_2$ и интеграл в (1.55) равен нулю. Интеграл от вектора напряженности \vec{E} по замкнутой траектории называют *циркуляцией* вектора \vec{E} . Таким образом, циркуляция вектора \vec{E} в любом электростатическом поле равна нулю, т. е.

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = 0. \quad (1.57)$$

Это утверждение называют *теоремой о циркуляции вектора \vec{E}* .

Потенциал поля, как и потенциальная энергия, определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Это не сказывается на физических законах и их следствиях, так как в них входит либо разность потенциалов, либо производная от потенциала. При задании значения потенциала в произвольной точке поля в формуле (1.55) потенциалы всех других точек будут определяться однозначно.

Например, найдем потенциал поля, создаваемого точечным зарядом. Будем нормировать потенциал на ноль в бесконечности, т. е. в формуле (1.55) полагаем $\varphi_2 = 0$ при $r_2 \rightarrow \infty$ и $\varphi_1 = \varphi$ при $r_2 = r$. Такая нормировка соответствует обращению потенциальной энергии взаимодействия зарядов в ноль на бесконечности. Тогда потенциал φ , создаваемый точечным зарядом на расстоянии r от него, определится соотношением

$$\varphi = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r}. \quad (1.58)$$

Подставив в (1.58) напряженность электростатического поля точечного заряда (1.11) и выполнив интегрирование, подобно тому, как это было сделано в соотношении (1.50), найдем потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{kq}{r}. \quad (1.59)$$

Это же соотношение можно было бы получить из (1.50), используя (1.54) и нормируя потенциальную энергию заряда на ноль в бесконечности.

В случае системы неподвижных точечных зарядов из принципа суперпозиции (1.13) следует, что работа (1.49) по перемещению заряда q в поле, создаваемом системой зарядов, равна сумме работ полей, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (1.60)$$

И результирующая работа A , и работа A_i каждого поля определяются по формуле (1.55) через разность потенциалов соответствующих полей. Так что

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{1i} - \sum_{i=1}^n \varphi_{2i} \right). \quad (1.61)$$

Отсюда следует, что для потенциала поля, как и для напряженности электростатического поля, справедлив *принцип суперпозиции*. Потенциал поля φ , создаваемого системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов φ_i полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}, \quad (1.62)$$

где потенциалы φ_i определяются соотношением (1.59).

Если заряды, образующие систему, распределены непрерывно, то мы считаем, что каждый элементарный объем dV содержит точечный заряд $dq = \rho dV$, где ρ – объемная плотность заряда в месте нахождения объема dV . При замене в (1.62) q_i на dq , r_i на r и переходе от суммирования к интегрированию по объему пространства, в котором находятся заряды, потенциал системы непрерывно распределенных зарядов принимает вид

$$\varphi = k \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (1.63)$$

Таким образом, зная распределение зарядов (дискретное, непрерывное), можно в принципе найти потенциал поля любой системы.

§ 1.7. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

Найдем взаимосвязь между напряженностью электрического поля \vec{E} , являющейся его силовой характеристикой, и потенциалом φ – энергетической характеристикой поля. Воспользуемся связью между

консервативной силой \vec{F} и потенциальной энергией W (см. [1], § 4.3, формула (4.25)):

$$\vec{F} = -\text{grad}W, \quad (1.64)$$

где градиент в декартовой системе координат имеет вид

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.65)$$

здесь \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – орты декартовой системы координат.

Подставив в (1.64) выражения для силы, действующей на заряд через напряженность электрического поля (1.9), и для потенциальной энергии заряда в поле через потенциал (1.53), приходим к уравнению, связывающему напряженность поля с потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (1.66)$$

Формула (1.66) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т. е. по данным значениям напряженности в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

§ 1.8. Электрическая энергия системы зарядов

Найдем потенциальную энергию системы двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга. Каждый из этих зарядов обладает энергией в поле другого заряда, которая определяется соотношением (1.53):

$$W_1 = q_1\varphi_{12}, \quad W_2 = q_2\varphi_{21}, \quad (1.67)$$

где φ_{12} – потенциал, создаваемый зарядом q_2 в точке нахождения заряда q_1 ; φ_{21} – потенциал, создаваемый зарядом q_1 в точке нахождения заряда q_2 .

Так как заряды точечные, их потенциалы имеют вид (1.59):

$$\varphi_{12} = \frac{kq_2}{r}, \quad \varphi_{21} = \frac{kq_1}{r}. \quad (1.68)$$

Подставив (1.68) в (1.67), получим, что потенциальные энергии W_1 и W_2 равны между собой. Потенциальная энергия взаимодействия

зарядов W численно равна энергии каждого заряда, находящегося в поле другого заряда:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{kq_1q_2}{r}. \quad (1.69)$$

Поскольку оба заряда входят в эту формулу симметрично, ее целесообразно записать в виде

$$W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(q_1\phi_{12} + q_2\phi_{21}). \quad (1.70)$$

Формула (1.70) легко обобщается на случай системы, состоящей из n неподвижных точечных зарядов. Потенциальная энергия взаимодействия такой системы равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (1.71)$$

где ϕ_i – потенциал в точке нахождения заряда q_i , созданный всеми другими зарядами.

§ 1.9. Электрический диполь

Электрический диполь – это система из двух жестко связанных одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$ ($q > 0$), находящихся на некотором расстоянии l друг от друга. Прямая, проходящая через оба заряда, называется *осью диполя*.

Когда говорят о поле диполя, то предполагают сам диполь точечным, т. е. считают расстояние r от диполя до интересующих нас точек поля значительно больше l . Поле диполя обладает осевой симметрией, т. е. картина поля в любой плоскости, проходящей через ось диполя, одна и та же и вектор напряженности лежит в этой плоскости.

Диполь характеризуют *электрическим*, или *дипольным, моментом*

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (1.72)$$

где \vec{l} – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному (рис. 1.15).

Найдем сначала потенциал поля диполя, а затем его напряженность. Согласно принципу суперпозиции (1.62), потенциал поля диполя в точке P (рис. 1.15) определяется соотношением

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = kq \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}, \quad (1.73)$$

где r_+ , r_- – расстояния от зарядов до точки P .

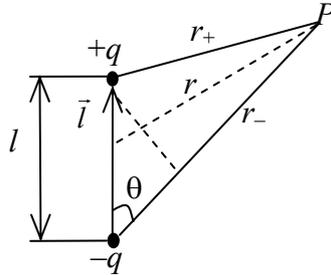


Рис. 1.15

Так как диполь является точечным ($l \ll r$), то, как видно из рис. 1.15, $r_- - r_+ = l \cos \theta$ и $r_+ r_- = r^2$, где r – расстояние от диполя до точки P . С учетом этого

$$\varphi = k \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (1.74)$$

где $p = ql$ – модуль электрического момента диполя.

Запишем (1.74) через скалярное произведение вектора \vec{p} и радиус-вектора \vec{r} , проведенного в точку P : $\vec{p}\vec{r} = pr \cos \theta$. Получим

$$\varphi = k \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}. \quad (1.75)$$

Заметим, что потенциал диполя зависит от дипольного момента \vec{p} и убывает с расстоянием быстрее, чем потенциал точечного заряда (1.59) ($1/r^2$ вместо $1/r$).

Напряженность поля диполя определим из связи напряженности поля с потенциалом (1.66) с учетом определения градиента (1.65):

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.76)$$

Отсюда следует, что компоненты вектора \vec{E} в декартовой системе координат определяются соотношениями:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (1.77)$$

Запишем потенциал (1.75) в декартовой системе координат. Примем во внимание, что $\vec{p}\vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$ и $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Таким образом,

$$\varphi = k \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.78)$$

Дифференцируя (1.78) по координатам, определим компоненты вектора \vec{E} (1.77):

$$E_x = k \left[3 \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^5} x - \frac{p_x}{r^3} \right], \quad E_y = k \left[3 \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^5} y - \frac{p_y}{r^3} \right], \quad E_z = k \left[3 \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^5} z - \frac{p_z}{r^3} \right]. \quad (1.79)$$

Тогда вектор напряженности поля диполя (1.76) примет вид

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = k \left[3 \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right], \quad (1.80)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$ – радиус-вектор и дипольный момент в декартовой системе координат.

Согласно (1.80), вектор напряженности равен сумме двух слагаемых, одно из которых направлено либо по радиус-вектору, либо имеет противоположное направление в зависимости от знака скалярного произведения дипольного момента и радиус-вектора, а второе слагаемое имеет противоположное направление вектору дипольного момента (рис. 1.16).

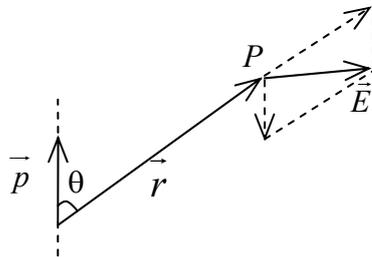


Рис. 1.16

Из (1.80) определим модуль вектора напряженности:

$$E = \sqrt{\vec{E}^2} = k \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (1.81)$$

Согласно (1.81), напряженность убывает с расстоянием от диполя, как $1/r^3$, т. е. быстрее, чем напряженность поля точечного заряда (1.12), – убывающая, как $1/r^2$.

Из (1.80) следует, что напряженность поля на оси диполя при $\theta = 0$ и при $\theta = 180^\circ$ определяется соотношением

$$\vec{E} = k \frac{2\vec{p}}{r^3}. \quad (1.82)$$

Подставив в (1.80) $\theta = 90^\circ$, найдем напряженность поля в направлении, перпендикулярном оси диполя:

$$\vec{E} = -k \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (1.83)$$

Из сравнения (1.82) и (1.83) видно, что при одном и том же расстоянии r от диполя напряженность на оси диполя в два раза больше напряженности в направлении, перпендикулярном оси.

§ 1.10. Диполь во внешнем электрическом поле

На диполь, помещенный во внешнее электрическое поле, действует результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-, \quad (1.84)$$

где \vec{F}_+ и \vec{F}_- – силы, действующие на положительный и отрицательный заряды диполя (рис. 1.17).

Выразим силы через напряженности поля \vec{E}_+ и \vec{E}_- в точках нахождения зарядов:

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}_+, \quad \vec{F}_- = -q\vec{E}_-. \quad (1.85)$$

Таким образом,

$$\vec{F} = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-). \quad (1.86)$$

Рассмотрим случай однородного электрического поля, когда $\vec{E}_+ = \vec{E}_- = \vec{E} = \text{const}$. В этом случае из (1.86) следует, что результирующая сила, действующая на диполь, равна нулю. Как следствие,

центр масс диполя перемещаться не будет. Однако силы \vec{F}_+ и \vec{F}_- приложены в разных точках. Поэтому на диполь будет действовать момент пары сил, стремящийся ориентировать диполь так, чтобы его дипольный момент \vec{p} был направлен вдоль вектора напряженности \vec{E} внешнего поля (рис. 1.17).

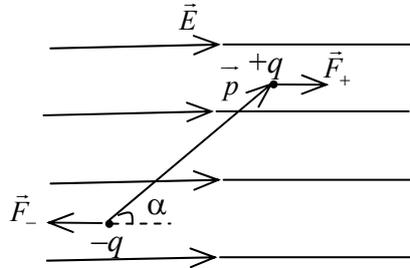


Рис. 1.17

Момент пары сил не зависит от выбора точки, относительно которой он рассматривается. Покажем это. Обозначим через \vec{r}_+ и \vec{r}_- радиус-векторы входящих в диполь зарядов $+q$ и $-q$ относительно точки O (рис. 1.18).

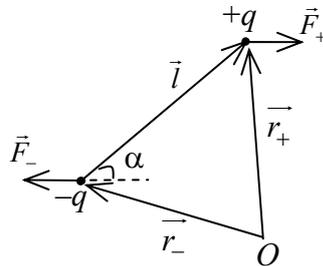


Рис. 1.18

Тогда момент пары сил, действующий на диполь,

$$\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-, \quad (1.87)$$

где \vec{M}_+ и \vec{M}_- – моменты сил, действующие на заряды диполя.

Поскольку поле является однородным ($\vec{E}_+ = \vec{E}_- = \vec{E} = \text{const}$), из (1.85) следует, что $\vec{F}_- = -\vec{F}_+ = q\vec{E}$. Момент пары сил (1.87) примет вид

$$\vec{M} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times q\vec{E}. \quad (1.88)$$

Учитывая, что $\vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{l}$ и $\vec{p} = q\vec{l}$, получим

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (1.89)$$

Модуль момента сил зависит от угла α между векторами \vec{p} и \vec{E} :

$$M = pE \sin \alpha. \quad (1.90)$$

При двух ориентациях диполя – по полю ($\alpha = 0$) и против ($\alpha = \pi$) – момент сил обращается в ноль. Первая ориентация ($\alpha = 0$) соответствует устойчивому равновесию, а вторая ($\alpha = \pi$) – неустойчивому. Характер каждого из этих положений равновесия непосредственно вытекает из рис. 1.17. При малом отклонении ориентации от направления вдоль поля возникает момент сил, стремящийся восстановить эту ориентацию, в то время как при отклонении от противоположной ориентации возникающий момент сил стремится увести из нее диполь еще дальше.

Характер равновесия диполя в каждом из этих положений можно также установить, рассматривая зависимость потенциальной энергии диполя во внешнем поле от его ориентации. Найдем потенциальную энергию диполя, находящегося во внешнем поле. Элементарная работа сил поля по изменению ориентации диполя на угол $d\alpha$ определяется моментом сил M_z , действующим на диполь (см. [1], § 4.1, формула (4.7)):

$$\delta A = -M_z d\alpha, \quad (1.91)$$

где знак минус учитывает, что угол α уменьшается под действием сил поля.

С другой стороны, эта работа равна убыли потенциальной энергии диполя: $\delta A = -dW$. С учетом равенства $M_z = M$ и соотношения (1.90)

$$dW = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (1.92)$$

Отсюда потенциальная энергия диполя

$$W = -pE \cos \alpha + C, \quad (1.93)$$

где C – постоянная интегрирования.

Выбрав нулевой уровень отсчета потенциальной энергии при $\alpha = \pi/2$, т. е. полагая $W = 0$ при $\alpha = \pi/2$, постоянная $C = 0$, запишем формулу (1.93) в следующем виде:

$$W = -pE \cos \alpha = -\vec{p} \vec{E}. \quad (1.94)$$

Из этой формулы следует, что минимальную энергию ($W_{\text{мин}} = -pE$) диполь имеет в положении $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$. Следовательно, оно соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении из этого положения возникает момент внешних сил, возвращающий диполь к положению равновесия.

Мы получили соотношения (1.89) и (1.94), считая для простоты поле однородным. Однако эти формулы справедливы и для неоднородного поля. В этом случае сила (1.86), действующая на диполь, отлична от нуля, так как $\vec{E}_+ \neq \vec{E}_-$. Под действием этой силы диполь будет перемещаться в сторону, где напряженность электрического поля больше.

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 2.1. Диэлектрики при наличии электрического поля

Диэлектриками (или *изоляторами*) называются вещества, практически не проводящие электрического тока. Это значит, что в диэлектриках, в отличие от проводников, нет свободных зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток. К диэлектрикам относятся воздух и другие газы, стекла, различные смолы, пластмассы, многие виды резины.

Диэлектрики состоят либо из нейтральных молекул, либо из заряженных ионов, находящихся в узлах кристаллической решетки (ионные кристаллы, например NaCl, KCl и др.). В состав молекул входят заряженные частицы. Положительный заряд сосредоточен в ядрах атомов, а отрицательный – в электронных оболочках атомов и молекул. Так как положительные и отрицательные заряды расположены в различных точках пространства в молекуле, то они могут обладать электрическим дипольным моментом.

Молекулы, не обладающие собственным дипольным моментом, называются *неполярными*, например He, H₂, N₂, O₂, CO₂ и др. У них центры тяжести зарядов разных знаков совпадают. *Полярными* называют молекулы, обладающие собственным дипольным моментом, например CO, N₂O, SO₂, HCl и др. У них центр тяжести отрицательного заряда сдвинут относительно центра тяжести положительных зарядов. Собственный дипольный момент молекул имеет порядок 10^{-29} – 10^{-30} Кл·м. Это соответствует диполью, состоящему из двух элементарных зарядов $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, расстояние между которыми 10^{-10} м, т. е. порядка атомных размеров.

Обычно в отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты молекул диэлектрика либо равны нулю (неполярные молекулы), либо распределены по направлениям в пространстве хаотическим образом (полярные молекулы). В обоих случаях суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю – диэлектрик не поляризован. Под действием внешнего электрического поля происходит *поляризация* диэлектрика. Это означает, что результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля. Механизм поляризации связан с конкретным строением диэлектрика.

При внесении диэлектрика, состоящего из неполярных молекул, в электрическое поле легкие электроны испытывают смещение про-

тив поля, а положительно заряженные ядра атомов по полю. Причем смещения атомных ядер по сравнению со смещениями электронов пренебрежимо малы. Происходит частичное разделение положительных и отрицательных зарядов (рис. 2.1). В результате неполярные молекулы приобретают дипольный момент и диэлектрик поляризуется. На противоположных гранях диэлектрика появляются заряды противоположных знаков (два полюса). Возникающий у молекулы дипольный момент прямо пропорционален напряженности внешнего поля:

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.1)$$

где α – *поляризуемость молекулы*; ϵ_0 – электрическая постоянная. Поляризуемость молекулы определяется ее внутренними свойствами и существенно не зависит от плотности вещества и температуры. Такой вид поляризации называется *электронной поляризацией*.

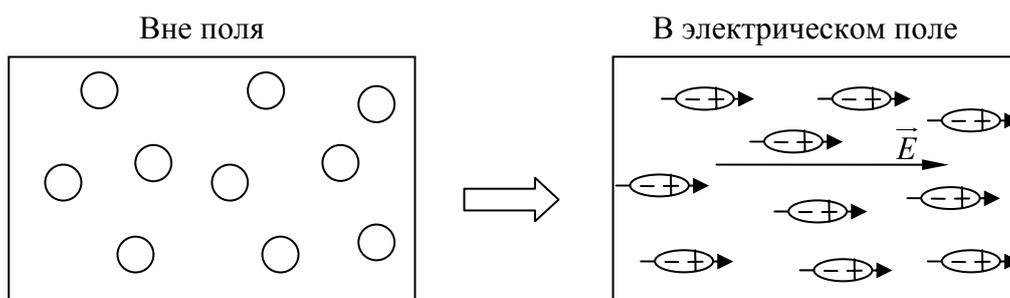


Рис. 2.1

Если диэлектрик состоит из полярных молекул, то во внешнем электрическом поле на постоянные дипольные моменты молекул действует момент силы (1.89), стремящийся ориентировать дипольные моменты в направлении напряженности электрического поля. Однако тепловое движение молекул расстраивает упорядочивающее действие электрического поля. В результате устанавливается некоторое равновесие с преимущественным направлением дипольных моментов вдоль внешнего электрического поля (рис. 2.2). Такая поляризация называется *ориентационной* (или *дипольной*). Полярные молекулы также приобретают дополнительный, индуцированный внешним полем дипольный момент, но эта поляризация играет для них незначительную роль. Поляризация за счет переориентации молекул значительно больше, чем вследствие образования дополнительных дипольных моментов.

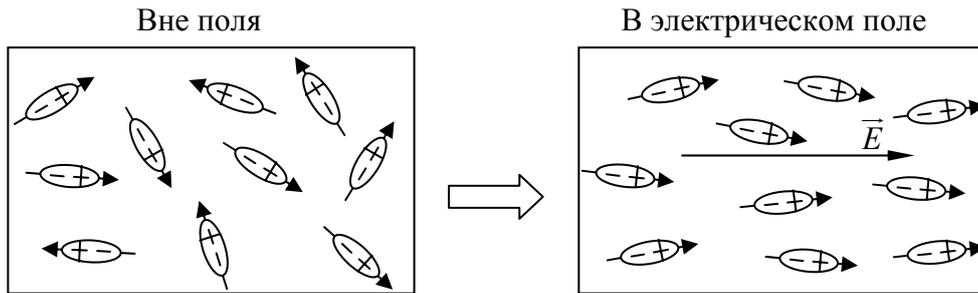


Рис. 2.2

Наряду с этими механизмами поляризации существует еще один, возникающий в ионных кристаллах. Решетку ионного кристалла можно рассматривать как две вставленные друг в друга решетки, одна из которых образована положительными, а другая отрицательными ионами (см. [2], § 4.7). Под влиянием внешнего электрического поля положительные ионы смещаются в направлении напряженности поля, а отрицательные – в противоположном направлении. В результате происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, что приводит к возникновению в диэлектрике дипольных моментов, т. е. к поляризации диэлектрика. Такая поляризация называется *ионной решеточной*.

В результате поляризации на поверхности диэлектрика, а также в его объеме появляются нескомпенсированные заряды. Их называют *поляризационными* или *связанными* зарядами. Последним термином хотят подчеркнуть, что свобода перемещения связанных зарядов ограничена. Они могут смещаться лишь внутри электрически нейтральных молекул. Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика, называют *сторонними* или *свободными* зарядами. Эти заряды могут находиться как внутри, так и вне диэлектрика.

§ 2.2. Поляризованность

Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной – *поляризованностью* \vec{P} :

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i, \quad (2.2)$$

где V – малый объем диэлектрика, \vec{p}_i – дипольный момент молекулы, находящейся в данном объеме. Суммирование в (2.2) происходит по

всем молекулам в этом объеме. Этот вектор равен дипольному моменту единицы объема вещества. Единицей измерения поляризованности в СИ является *кулон на квадратный метр*: $[P] = \text{Кл/м}^2$.

Пусть в объеме V содержится N молекул. Умножим и разделим правую часть выражения (2.2) на N . Тогда можно записать

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (2.3)$$

где $n = N / V$ – концентрация молекул и $\langle \vec{p} \rangle$ – средний дипольный момент одной молекулы. При этом

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_i. \quad (2.4)$$

Из опыта следует, что для обширного класса диэлектриков и широкого круга явлений поляризованность \vec{P} линейно зависит от напряженности поля \vec{E} в диэлектрике. Если диэлектрик изотропный, т. е. его свойства одинаковы по всем направлениям, и \vec{E} не слишком велико, то

$$\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.5)$$

где \varkappa – безразмерная величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Эта величина не зависит от \vec{E} . Она характеризует свойства самого диэлектрика и всегда больше нуля ($\varkappa > 0$).

Однако существуют диэлектрики, для которых формула (2.5) не применима. Это некоторые ионные кристаллы и электреты, а также сегнетоэлектрики.

Найдем диэлектрическую восприимчивость \varkappa газообразного диэлектрика, состоящего из неполярных молекул. Во внешнем электрическом поле все молекулы диэлектрика приобретают одинаковый дипольный момент (2.1). Средний дипольный момент одной молекулы (2.4) в этом случае равен дипольному моменту одной молекулы и поляризованность (2.3) диэлектрика

$$\vec{P} = n \vec{p} = n \alpha \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (2.6)$$

Сравнивая (2.6) с (2.5), заключаем, что диэлектрическая восприимчивость газообразного диэлектрика

$$\varkappa = n \alpha. \quad (2.7)$$

Диэлектрическая восприимчивость большинства газов составляет десятитысячные доли единицы и в большинстве случаев практически

может не приниматься во внимание. Например, диэлектрическая восприимчивость воздуха $\varepsilon = 0,0006$.

В жидкостях, состоящих из неполярных молекул, при нахождении диэлектрической восприимчивости следует учитывать, что на электрическое поле, действующее на отдельную молекулу, влияет поле поляризационных зарядов соседних молекул. В результате диэлектрическая восприимчивость определяется *формулой* Клаузиса – Моссотти:

$$\varepsilon = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) хорошо описывает диэлектрическую восприимчивость жидкостей, составленных из неполярных молекул, например CS_2 , O_2 , CCl_4 , Ar . Однако она не годится для воды, так как молекула H_2O является полярной, т. е. обладает постоянным дипольным моментом.

Диэлектрическая восприимчивость газообразных диэлектриков, состоящих из полярных молекул, определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT}, \quad (2.9)$$

где p – дипольный момент полярной молекулы; k – постоянная Больцмана. С увеличением температуры диэлектрическая восприимчивость уменьшается. Соответственно уменьшается поляризованность диэлектрика (2.5). Это является следствием увеличения интенсивности теплового движения, которое расстраивает упорядочивающее действие электрического поля. Такая зависимость от температуры вида $1/T$ называется *законом Кюри*.

§ 2.3. Объемные и поверхностные связанные заряды

При поляризации в диэлектрике могут возникать в общем случае и объемные, и поверхностные связанные заряды. Найдем соотношения, определяющие величину связанных зарядов в объеме и на поверхности диэлектрика.

Рассмотрим некоторый объем V диэлектрика (рис. 2.3, а). В результате поляризации положительные заряды в молекулах сместятся относительно отрицательных. Поверхность S , ограничивающую объем V , пересекают заряды. В зависимости от баланса втекающих и вытекающих из

объема зарядов в нем образуется связанный заряд $q_{св}$. Определим величину связанного заряда.

Сначала найдем заряд dq , который проходит через элемент dS замкнутой поверхности S наружу при возникновении поляризованности \vec{P} . Для упрощения формул будем считать, что двигаются только положительные заряды, так как перенос отрицательного заряда в некотором направлении эквивалентен переносу положительного заряда в противоположном направлении. Площадку dS пересекут все положительные заряды, которые до движения, обусловленного поляризацией, находились в объеме косого цилиндра вдоль вектора поляризованности (рис. 2.3, б):

$$dV = dSl \cos \alpha, \quad (2.10)$$

где l – расстояние, на которое сместятся друг относительно друга положительные и отрицательные заряды; α – угол между нормалью \vec{n} к площади dS и поляризованностью \vec{P} .

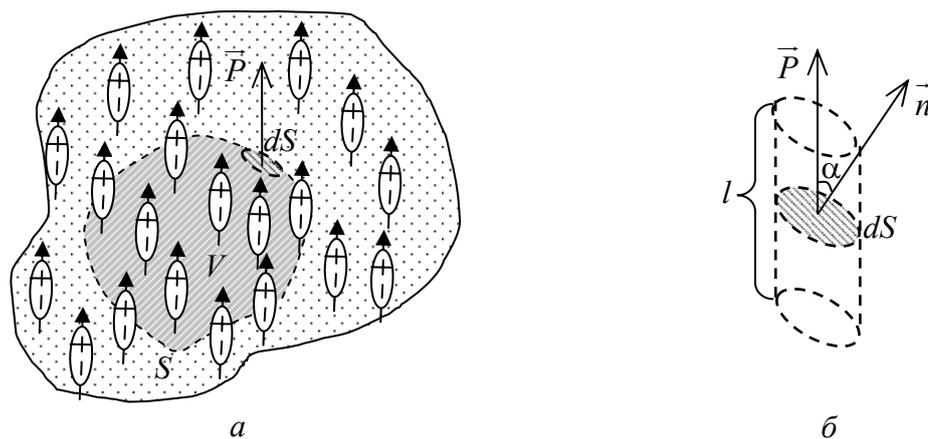


Рис. 2.3

Принимая во внимание, что число молекул, находящихся в этом объеме, определяется концентрацией молекул n по формуле

$$dN = ndV \quad (2.11)$$

и что при поляризации от каждой молекулы через площадку dS пройдет положительный заряд q , численно равный заряду образовавшегося диполя, заряд dq , прошедший при поляризации через площадь dS ,

$$dq = qdN = nql dS \cos \alpha. \quad (2.12)$$

Учитывая, что $p = ql$ является дипольным моментом молекулы, и, принимая во внимание соотношение (2.3) для поляризованности, получим

$$dq = PdS \cos \alpha = \vec{P} d\vec{S}, \quad (2.13)$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с единичным вектором нормали \vec{n} к площади.

Проинтегрировав это выражение по всей замкнутой поверхности S , мы найдем весь заряд, который вышел при поляризации из объема, охватываемого поверхностью S . В результате внутри поверхности останется некоторый избыточный (нескомпенсированный) связанный заряд $q_{\text{св}}$. Так как до поляризации любая часть диэлектрика является электрически нейтральной, то оставшийся внутри поверхности заряд $q_{\text{св}}$ должен быть равен с обратным знаком заряду, вышедшему из объема:

$$q_{\text{св}} = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (2.14)$$

Вычисления показывают, что $q_{\text{св}}$ (2.14) отлично от нуля в двух случаях: 1) если диэлектрик неоднороден, т. е. $\epsilon \neq \text{const}$; 2) если в данном месте диэлектрика отсутствуют сторонние заряды, не входящие в состав молекул. В этих случаях внутри объема диэлектрика возникает объемный связанный заряд. В остальных случаях объемный связанный заряд не возникает, и в результате поляризации появляется только поверхностный связанный заряд.

Определим поверхностную плотность $\sigma_{\text{св}}$ связанных зарядов, возникающих на поверхности диэлектрика при его поляризации. Считаем, что диэлектрик граничит с вакуумом или средой, которая слабо поляризуется (например, воздух). В этом случае в поверхностном слое диэлектрика площадью dS сосредоточится связанный заряд $dq = \sigma_{\text{св}} dS$, который определяется выражением (2.13). Тогда плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика

$$\sigma_{\text{св}} = P \cos \alpha = P_n, \quad (2.15)$$

где P_n – проекция вектора поляризованности \vec{P} на внешнюю нормаль к поверхности данного диэлектрика. Знак проекции P_n определяет и знак поверхностного связанного заряда $\sigma_{\text{св}}$ в данном месте. Формулу (2.15) можно представить в другом виде, а именно, в соответствии с (2.5), можно записать:

$$\sigma_{\text{св}} = \alpha \varepsilon_0 E_n, \quad (2.16)$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} (внутри диэлектрика вблизи от его поверхности) на внешнюю нормаль. Здесь знак E_n также определяет знак $\sigma_{\text{св}}$.

§ 2.4. Электрическое поле в диэлектрике

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле обнаруживаются существенные изменения не только в самом диэлектрике, но и в электрическом поле. Связанные заряды, возникающие в результате поляризации диэлектрика, порождают электрическое поле точно так же, как и сторонние заряды, создающие внешнее электрическое поле, и в этом отношении ничем не отличаются от них. Таким образом, наличие диэлектрика учитывается тем, что принимается во внимание электрическое поле, создаваемое связанными зарядами.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей (1.13), напряженность \vec{E} электрического поля в диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{св}}, \quad (2.17)$$

где \vec{E}_0 – напряженность поля, создаваемого сторонними зарядами в отсутствие диэлектрика (т. е. в вакууме); $\vec{E}_{\text{св}}$ – напряженность поля связанных зарядов, образующихся в диэлектрике.

Определение результирующей напряженности \vec{E} в диэлектрике сопряжено с большими трудностями, поскольку распределение связанных зарядов в диэлектрике зависит от природы и формы вещества, а также от конфигурации внешнего поля \vec{E}_0 . Определение напряженности поля связанных зарядов $\vec{E}_{\text{св}}$ в каждом конкретном случае представляет собой сложную самостоятельную задачу. Универсальной формулы для нахождения $\vec{E}_{\text{св}}$, к сожалению, нет. Исключение составляет случай, когда все пространство, где имеется поле \vec{E}_0 , заполнено однородным изотропным диэлектриком. Рассмотрим этот случай более подробно.

Найдем напряженность электрического поля внутри однородного изотропного диэлектрика, помещенного между двумя бесконечными параллельными плоскостями, разноименно заряженными с поверхностной плотностью σ (рис. 2.4). Заряд, расположенный на плоскостях,

является сторонним зарядом. Обычно сторонние заряды располагают на проводниках.

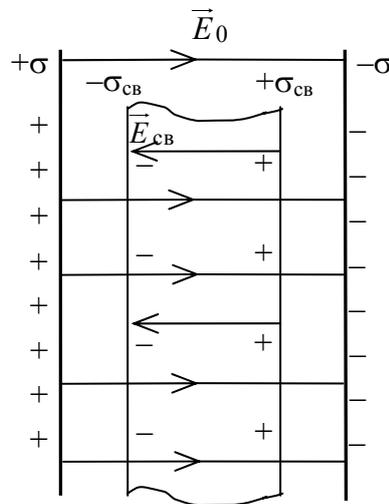


Рис. 2.4

В отсутствие диэлектрика напряженность электрического поля, создаваемого этими зарядами, определяется формулой (1.36):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.18)$$

При внесении диэлектрика между плоскостями под действием этого внешнего поля он поляризуется. Вследствие однородности диэлектрика и однородности внешнего поля заключаем, что поляризованность диэлектрика однородна. В этом случае объемные связанные заряды отсутствуют. Имеются лишь связанные заряды на противоположных поверхностях диэлектрика, плотность которых $\sigma_{св}$. Эти заряды создадут внутри диэлектрика однородное поле, напряженность которого

$$E_{св} = \frac{\sigma_{св}}{\epsilon_0}. \quad (2.19)$$

Векторы \vec{E}_0 и $\vec{E}_{св}$ имеют противоположные направления (рис. 2.4), следовательно, результирующая напряженность поля внутри диэлектрика (2.17) определится соотношением

$$E = E_0 - E_{св} = \frac{\sigma - \sigma_{св}}{\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

Согласно (2.20), поле в диэлектрике оказывается меньше поля (2.18) при его отсутствии, т. е. напряженность поля в диэлектрике ослабляется.

В соответствии с (2.16) поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma_{\text{св}} = \alpha \varepsilon_0 E, \quad (2.21)$$

где принято во внимание, что вектор \vec{E} направлен перпендикулярно плоскостям, и поэтому $E_n = E$.

Подставив (2.21) в формулу (2.20), получим

$$E = E_0 - \alpha E. \quad (2.22)$$

Отсюда напряженность поля в диэлектрике

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha} = \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad (2.23)$$

где величину $\varepsilon = 1 + \alpha$ называют *диэлектрической проницаемостью среды*. Она показывает, во сколько раз ослабляется поле в однородном диэлектрике. В отсутствие среды, т. е. в вакууме, $\alpha = 0$ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$. Диэлектрическая проницаемость ε (как и α) является основной электрической характеристикой диэлектрика. Для всех веществ $\varepsilon > 1$. Значения ε зависят от природы диэлектрика и колеблются от величин, весьма мало отличающихся от единицы (газы), до величин в несколько тысяч единиц (у некоторых видов керамики).

Так как напряженность электрического поля связана с потенциалом через соотношение (1.66), то потенциал φ во всех точках однородного диэлектрика также уменьшится в ε раз:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\varepsilon}, \quad (2.24)$$

где φ_0 – потенциал поля в отсутствие диэлектрика.

Подставив (2.23) в формулу (2.21) и приняв во внимание (2.18), найдем поверхностную плотность связанного заряда

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \sigma = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma. \quad (2.25)$$

Она однозначно связана с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на плоскости, причем знаки этих зарядов противоположны.

§ 2.5. Вектор электрического смещения

Источниками электрического поля в диэлектрике являются все электрические заряды – сторонние и связанные, появляющиеся в результате поляризации. Причем учет влияния диэлектрика на электрическое поле сводится к нахождению электрического поля, создаваемого связанными зарядами. Поэтому теорему Гаусса (1.25) для электростатического поля в диэлектрике можно записать так:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q + q_{\text{св}}}{\epsilon_0}, \quad (2.26)$$

где q и $q_{\text{св}}$ – сторонние и связанные заряды, охватываемые поверхностью S .

Формула (2.26) оказывается малоприменимой для нахождения напряженности электрического поля в диэлектрике, так как она выражает свойства неизвестной напряженности поля \vec{E} через связанные заряды $q_{\text{св}}$, которые в свою очередь определяются этим же полем.

Вычисление полей во многих случаях упрощается, если ввести вспомогательную величину, источником которой являются только сторонние заряды q . Чтобы установить вид этой величины, подставим в (2.26) выражение (2.14) для $q_{\text{св}}$ и преобразуем его к виду

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q. \quad (2.27)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой искомую величину. Ее обозначают буквой \vec{D} и называют *электрическим смещением*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.28)$$

Согласно (2.27), поток Φ вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\Phi = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (2.29)$$

Это утверждение называют *теоремой Гаусса для вектора электрического смещения* \vec{D} . В вакууме $\vec{P} = 0$, поэтому электрическое смещение (2.28) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ и формула (2.29) совпадают с теоремой Гаусса для электростатического поля в вакууме (1.25).

Дифференциальная форма теоремы Гаусса (2.29) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.30)$$

где операция дивергенции в декартовой системе координат определяется соотношением (1.29), а ρ – объемная плотность сторонних зарядов. Это уравнение можно получить из (2.29) тем же способом, как это было сделано в случае напряженности электрического поля \vec{E} (см. § 1.4). Достаточно в проводимых рассуждениях заменить \vec{E} на \vec{D} и учесть лишь сторонние заряды.

Припоминая смысл дивергенции вектора, из (2.30) можно определить преимущества использования вектора \vec{D} . Очевидно, что единственным источником \vec{D} являются свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается. В точках без свободных зарядов он непрерывен, включая точки со связанными зарядами. Изменения напряженности поля, обусловленные связанными зарядами, учтены уже в самом векторе \vec{D} .

В случае изотропных диэлектриков поляризованность \vec{P} определяется соотношением (2.5). Подставив его в (2.28), получим

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\varkappa)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}. \quad (2.31)$$

Вектор \vec{D} зависит как от сторонних, так и от связанных зарядов (как и вектор \vec{E}). Это следует из соотношения (2.31). Однако в некоторых случаях вектор \vec{D} определяется только сторонними зарядами. Именно для таких случаев вектор \vec{D} является особенно полезным. Его использование значительно упрощает анализ поля при наличии диэлектрика. Например, в предыдущем параграфе мы рассмотрели электрическое поле в однородном изотропном диэлектрике, помещенном между двумя бесконечными заряженными плоскостями. В этом случае напряженность поля в диэлектрике определяется соотношением (2.23). Соответственно электрическое смещение (2.31) внутри диэлектрика

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}_0. \quad (2.32)$$

Отсюда следует, что электрическое смещение внутри диэлектрика совпадает с электрическим смещением в отсутствие диэлектрика. Принимая во внимание (2.18), можно найти модуль электрического смещения

$$D = \sigma. \quad (2.33)$$

Таким образом, в этом случае электрическое смещение определяется плотностью сторонних зарядов.

§ 2.6. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим поведение векторов \vec{E} и \vec{D} на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков, диэлектрические проницаемости которых ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 2.5).

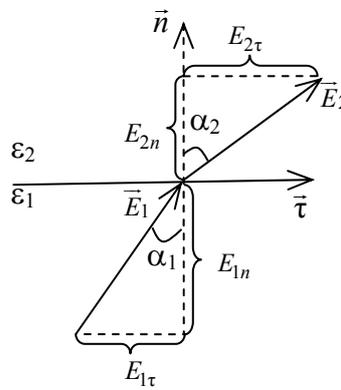


Рис. 2.5

Пусть поле вблизи границы раздела в первом диэлектрике равно \vec{E}_1 , а во втором диэлектрике — \vec{E}_2 . Электрические смещения \vec{D}_1 и \vec{D}_2 связаны с \vec{E}_1 и \vec{E}_2 соотношением (2.31). Векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 имеют две составляющие: одна проходит вдоль границы раздела сред E_τ (тангенциальная составляющая), а другая перпендикулярна ей E_n (нормальная составляющая).

Найдем соотношения, связывающие между собой тангенциальные составляющие векторов \vec{E} и \vec{D} при переходе через границу. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{E} (1.57). Построим вблизи границы диэлектриков небольшой замкнутый прямоугольный контур $ABCD$, ориентируя его так, как показано на рис. 2.6. Стороны контура, параллельные границе раздела, должны иметь такую длину l , чтобы в ее пределах вектор \vec{E} можно было считать постоянным, а высота контура должна быть пренебрежимо малой.

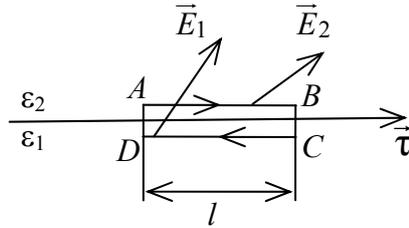


Рис. 2.6

Тогда, согласно теореме о циркуляции вектора \vec{E} ,

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{r} = \int_{AB} \vec{E} d\vec{r} + \int_{CD} \vec{E} d\vec{r} = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = 0, \quad (2.34)$$

где принято во внимание, что $\vec{E} d\vec{r} = E_{\tau} dl$ и знаки интегралов по AB и CD разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам BC и DA пренебрежимо малы. Из уравнения (2.34) следует, что

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (2.35)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая вектора \vec{E} одинакова по обе стороны границы раздела, т. е. не претерпевает скачка. Тангенциальная составляющая вектора \vec{D} при этом испытывает скачок. Действительно, из соотношений (2.31) и (2.35) следует, что

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.36)$$

Найдем условия для нормальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{D} . Воспользуемся теоремой Гаусса для вектора \vec{D} (2.29). На границе раздела двух диэлектриков построим цилиндр очень малой высоты (рис. 2.7), одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое – во втором. Основания цилиндра S настолько малы, что в пределах каждого из них вектор \vec{D} одинаков.

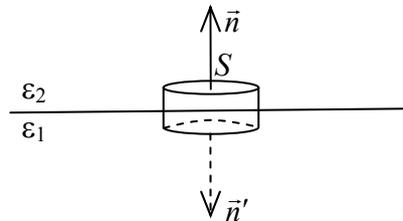


Рис. 2.7

Согласно теореме Гаусса,

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{2n}S + D_{1n'}S = D_{2n}S - D_{1n}S = \sigma S, \quad (2.37)$$

где $D_{1n'} = -D_{1n}$; $\sigma S = q$ – сторонний заряд, охватываемый поверхностью S ; σ – поверхностная плотность сторонних зарядов на границе раздела.

Из (2.37) следует, что

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (2.38)$$

Из этого соотношения видно, что нормальная составляющая вектора претерпевает скачок при переходе границы раздела. Однако если сторонние заряды на границе раздела отсутствуют ($\sigma = 0$), то

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (2.39)$$

В этом случае нормальные составляющие скачка не испытывают, они оказываются одинаковыми по разные стороны границы раздела. Нормальная составляющая вектора \vec{E} при этом испытывает скачок. Это следует из (2.39) с учетом соотношения (2.31):

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.40)$$

Полученные нами условия для составляющих векторов \vec{E} и \vec{D} на границе раздела двух диэлектриков означают, что линии этих векторов испытывают на этой границе излом, преломляются (рис. 2.5). Углы α_1 и α_2 связаны соотношением

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{E_{2\tau} / E_{2n}}{E_{1\tau} / E_{1n}}. \quad (2.41)$$

Учитывая соотношения (2.35), (2.40), получим закон преломления линий напряженности \vec{E} , а значит, и линий электрического смещения \vec{D} :

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.42)$$

Из (2.42) следует, что в диэлектрике с большим значением диэлектрической проницаемости ε линии \vec{E} и \vec{D} будут составлять больший угол с нормалью к границе раздела (на рис. 2.5 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$).

§ 2.7. Сегнетоэлектрики, электреты

Сегнетоэлектриками называются полярные диэлектрики, которые в определенном интервале температур спонтанно (самопроизвольно) поляризованы, т. е. обладают поляризованностью при отсутствии внешнего электрического поля. Примерами сегнетоэлектриков являются сегнетова соль (от которой и произошло название этого класса диэлектриков), титанат бария, титанат свинца и др.

Сегнетоэлектрики отличаются от других диэлектриков рядом характерных особенностей.

1. У обычных диэлектриков диэлектрическая проницаемость ϵ составляет несколько единиц, как исключение у воды несколько десятков ($\epsilon = 81$). В сегнетоэлектриках диэлектрическая проницаемость может достигать очень больших значений ($\epsilon \sim 10^4$).

2. Диэлектрическая проницаемость ϵ и диэлектрическая восприимчивость χ сегнетоэлектриков зависят от напряженности E поля в веществе, тогда как в остальных диэлектриках ϵ и χ являются их характеристиками, не зависящими от E . Как следствие, в сегнетоэлектриках зависимость поляризованности P и электрического смещения D от напряженности E является нелинейной.

3. При изменениях поля значения поляризованности P (а следовательно, и смещения D) отстают от напряженности поля E , в результате чего P и D определяются не только величиной E в данный момент, но и предшествующими значениями, т. е. зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется *электрическим гистерезисом* (от греческого «гистерезис» – запаздывание). Например, зависимость поляризованности P от напряженности E электрического поля показана на рис. 2.8.

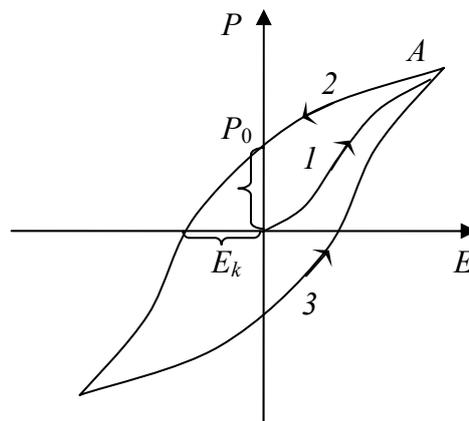


Рис. 2.8

При первоначальном увеличении напряженности поляризованность образца увеличивается по нелинейному закону вдоль линии 1, стремясь в точке *A* к насыщению (к постоянному значению). Если затем уменьшать напряженность, то уменьшение поляризованности происходит вдоль линии 2. Когда напряженность $E = 0$, поляризованность $P = P_0 \neq 0$, т. е. сегнетоэлектрик остается поляризованным. Величину P_0 называют *остаточной поляризованностью*. Чтобы убрать остаточную поляризованность, к образцу надо приложить поле с противоположным направлением напряженности E_k . Это значение напряженности называют *коэрцитивной силой*. При дальнейшем циклическом изменении напряженности поля изменение поляризованности происходит вдоль замкнутой линии, которую называют *петлей гистерезиса*.

4. Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура, выше которой его необычные свойства исчезают и он превращается в обычный полярный диэлектрик. Эту температуру называют *точкой Кюри*. Например, для титаната бария точка Кюри составляет 120°C . Сегнетова соль имеет две точки Кюри: -15°C и $+22,5^\circ\text{C}$. Она ведет себя как сегнетоэлектрик при температурах, лежащих в интервале между этими точками.

Экспериментальные и теоретические исследования показали, что поляризация сегнетоэлектриков является следствием очень сильного взаимодействия между дипольными моментами молекул, приводящего к спонтанной поляризации, при которой отдельные дипольные моменты молекул ориентируются в одном и том же направлении. Спонтанная поляризация является источником очень больших электрических полей. Поэтому, если макроскопический объем сегнетоэлектрика поляризован спонтанно в некотором направлении, вокруг этого объема возникает очень большое электрическое поле, с которым связана большая энергия. Это состояние энергетически невыгодно. Система стремится перейти в такое состояние, в котором, с одной стороны, существовала бы спонтанная поляризация, а с другой стороны, энергия поля была бы минимальна. Это может осуществиться в результате деления объема сегнетоэлектрика на малые области, в каждой из которых имеется спонтанная поляризация в некотором определенном направлении, различном для разных областей. Малые области со спонтанной поляризацией называются *доменами*. Размеры доменов имеют порядок тысяч межмолекулярных расстояний. Средняя поляризованность объ-

ема, включающего достаточное число малых областей с различными направлениями спонтанной поляризации, равна нулю, и поэтому напряженность электрического поля, порождаемого этим объемом, равна нулю. Таким образом, неполяризованный сегнетоэлектрик является совокупностью доменов с беспорядочно ориентированными спонтанными поляризованностями. Процесс изменения поляризованности сегнетоэлектрика во внешнем электрическом поле состоит в переориентации дипольных моментов отдельных доменов по полю, в изменении объемов и границ между доменами. Возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля. Известно более ста различных чистых сегнетоэлектриков и очень большое количество сегнетоэлектрических твердых растворов. Сегнетоэлектрики находят применение в изготовлении малогабаритных низкочастотных конденсаторов с большой удельной емкостью; материалов с большой нелинейностью поляризации – для диэлектрических усилителей, модуляторов и других управляемых устройств; в вычислительной технике – для ячеек памяти; в модуляции и преобразовании лазерного излучения; в пьезо- и пироэлектрических преобразователях.

Существуют специально приготовленные диэлектрики, которые длительное время могут сохранять поляризованное состояние (до нескольких лет) после снятия внешнего воздействия, которое привело к поляризации (или зарядению) этого диэлектрика. Их называют *электретами*. Есть несколько способов изготовления электретов. Большинство из них основано на том, что диэлектрик помещают в электрическое поле и подвергают дополнительному физическому воздействию, которое уменьшает время релаксации диполей либо ускоряет процесс миграции заряженных частиц. Например, один из первых способов получения электретов был описан японским физиком М. Эгути в 1922 г. Расплавленную смесь из воска и смолы вносят в электрическое поле и оставляют в нем затвердевать. При этом наведенный электрический момент «вмерзает» и становится постоянным. Затвердевшее тело действует как электрет. Его нарезают в виде брусков. Такой брусок представляет собою очень хороший электрический изолятор с положительным зарядом на одном и с отрицательным зарядом на другом конце. Подобные электреты сохраняются годами, нужно только держать их плотно вставленными в металлические защитные капсулы. В противном случае они будут постепенно улавливать из воздуха ионы, на концах электретов образу-

ется покровный слой из зарядов противоположного знака, и электрический момент бруска станет незаметным снаружи. Само собою разумеется, расплавление электрета разрушает поляризованную структуру диэлектрика и полностью разряжает электрет.

Электреты, полученные в сильном электрическом поле при нагревании, а затем охлаждении диэлектрика, называют *термоэлектретами*. Электреты также получают в сильном электрическом поле без нагревания (*электроэлектреты*), при освещении диэлектрика (*фотоэлектреты*), при облучении радиоактивным излучением (*радиоэлектреты*). Электретное состояние может возникать и без приложения к диэлектрику внешнего электрического поля, например, от механической деформации (*механоэлектреты*), при зарядении диэлектрика в поле коронного разряда (*короноэлектреты*), при электризации трением (*трибоэлектреты*). Электретный эффект присущ некоторым сегнетоэлектрикам (*сегнетоэлектреты*), тканям живого организма (*биоэлектреты*).

Электреты применяют как источники постоянного электрического поля (электретные микрофоны и телефоны, вибродатчики, генераторы слабых переменных сигналов, электрометры), как чувствительные датчики в устройствах дозиметрии, барометрах, гигрометрах. Фотоэлектреты применяют в электрофотографии.

§ 2.8. Пьезоэлектричество

Имеются многочисленные кристаллы, при деформации которых возникает электрическая поляризация. В результате этого на их поверхности появляются электрические заряды обоих знаков. Это явление получило название *прямого пьезоэлектрического эффекта*, а кристаллы называются *пьезоэлектриками*. Поскольку деформации сами по себе не в состоянии изменить общий заряд кристалла, образующиеся поверхностные заряды имеют различные знаки на различных частях поверхности. К числу пьезоэлектриков относят кварц, турмалин, сегнетову соль, титанат бария и многие другие вещества.

Как показывает опыт, заряды на поверхности пьезоэлектрика возникают в результате однородных деформаций сжатия или растяжения во вполне определенных направлениях, называемых *полярными осями* пьезоэлектрика. На противоположных гранях, перпендикулярных полярной оси, при однородных деформациях возникают заряды противоположного знака, причем знаки зарядов изменяются при изменении

знака деформации, т. е. если, например, при сжатии вдоль полярной оси на данной грани образовался положительный заряд, то при растяжении эта грань заряжается отрицательно. Пьезоэлектрический эффект наблюдается не только при чистом растяжении или сжатии вдоль полярной оси, но и при любой деформации кристалла, сопровождающейся сжатием или растяжением вдоль полярной оси. Вообще говоря, кристалл имеет несколько полярных осей.

Пьезоэлектрическими свойствами могут обладать только ионные кристаллы, у которых отсутствует центр симметрии. Пьезоэлектрический эффект возникает в том случае, когда под действием внешних сил кристаллическая подрешетка из положительных ионов деформируется иначе, чем кристаллическая подрешетка из отрицательных ионов. В результате происходит относительное смещение положительных и отрицательных ионов, приводящее к возникновению поляризации кристалла и поверхностных зарядов. Поскольку на разных гранях, перпендикулярных полярной оси, возникают заряды разного знака, различные направления вдоль полярной оси неэквивалентны. А это означает, что если кристалл повернуть на 180° вокруг оси, перпендикулярной полярной, то полярная ось совместится сама с собой, но кристалл сам с собой не совместится. Поэтому кристаллы с центром симметрии не могут быть пьезоэлектриками.

Пьезоэлектрические свойства зависят от температуры. Если при некоторой температуре кристаллическая решетка перестраивается так, что образуется центр симметрии, то при этой температуре исчезают пьезоэлектрические свойства кристалла. Например, у кварца до температуры 200°C пьезоэлектрические свойства изменяются незначительно, а затем до температуры 576°C начинают медленно ослабевать. При 576°C происходит перестройка кристаллической решетки кварца, в результате которой пьезоэлектрические свойства у него исчезают. При понижении температуры изменение свойств кварца происходит в обратном направлении.

Поляризованность, возникающая при деформации кристалла, в первом приближении прямо пропорциональна деформации, которая, в свою очередь, прямо пропорциональна силе. Следовательно, поляризованность прямо пропорциональна приложенной силе. Между разноименно заряженными гранями деформированного диэлектрика возникает разность потенциалов, которую можно измерить. По ее значению можно сделать заключение о величине деформаций и приложенных силах. Использование этой связи находит широкое практическое при-

менение. Например, имеются пьезоэлектрические датчики для измерения быстропеременных давлений. Известны пьезоэлектрические микрофоны, пьезоэлектрические датчики в автоматике и т. д. Пьезоэлектрики используют также как источники высокого импульсного напряжения (например, в пьезозажигалке возникает напряжение порядка нескольких киловольт).

Существует *обратный пьезоэлектрический эффект*. Он состоит в том, что во внешнем электрическом поле пьезоэлектрик будет деформироваться. Механизм обратного пьезоэлектрического эффекта аналогичен механизму прямого: под действием внешнего электрического поля кристаллические подрешетки положительных и отрицательных ионов деформируются различным образом, что и приводит к деформации кристалла. Обратный пьезоэлектрический эффект также имеет практическое применение, в частности, широко используются кварцевые излучатели ультразвука.

Заметим, что в электрических полях деформации наблюдается абсолютно во всех веществах. Это явление называют *электрострикцией*. Между обратным пьезоэлектрическим эффектом и электрострикцией есть существенные различия. Электрострикция имеет место для всех диэлектриков при помещении их в неоднородное электрическое поле. Обратный пьезоэлектрический эффект наблюдается только в кристаллах, да и то не во всех. Он существует и в однородном электрическом поле. Силы, возникающие при электрострикции, пропорциональны квадрату напряженности электрического поля. Вследствие этого они не меняются при изменении направления напряженности электрического поля на противоположное. Силы, возникающие при обратном пьезоэлектрическом эффекте, пропорциональны напряженности электрического поля. Они меняют свое направление на противоположное при изменении направления электрического поля.

§ 2.9. Электрическое поле внутри и снаружи проводника

Проводники – материалы, хорошо проводящие электрический ток. Характерной особенностью проводников является наличие в них большого количества свободных зарядов (электронов или ионов), способных перемещаться по всему объему тела. Самые распространенные в технике проводники – это, конечно же, металлы, прежде всего медь и алюминий, достаточно широко распространенные в земной природе. Именно из них, в основном, изготавливаются и высоко-

вольтные электрические кабели, и бытовая электропроводка. Имеются и другие виды материалов, обладающие хорошей электропроводностью. Это, в частности, солевые, щелочные и кислотные растворы, а также плазма.

Поместим металлический проводник во внешнее электростатическое поле или сообщим ему какой-нибудь заряд. В обоих случаях на заряды проводника будет действовать электрическое поле. В результате чего отрицательные заряды (электроны) сместятся против поля. Такое перемещение зарядов (электрический ток) будет продолжаться до тех пор, пока не установится определенное распределение зарядов, при котором электрическое поле во всех точках внутри проводника обратится в ноль (практически это происходит в течение малой доли секунды). Таким образом, внутри проводника при электростатическом равновесии электрическое поле отсутствует – $\vec{E} = 0$.

Из уравнения (1.28) при $\vec{E} = 0$ следует, что объемная плотность избыточных (нескомпенсированных) зарядов внутри проводника также всюду равна нулю – $\rho = 0$. Внутри проводника имеются как положительные, так и отрицательные заряды, но они взаимно компенсируются, и в целом внутренние области проводника нейтральны. Избыточные заряды появляются лишь на поверхности проводника с некоторой плотностью σ , различной в разных точках его поверхности. Заметим, что избыточный поверхностный заряд находится в очень тонком поверхностном слое (его толщина около одного-двух межатомных расстояний).

Так как внутри проводника нет избыточных зарядов, то удаление вещества из некоторого объема внутри проводника (создание замкнутой полости) поля нигде не изменит, т. е. никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Это значит, что избыточный заряд распределяется на проводнике с полостью так же, как и на сплошном проводнике, – по его наружной поверхности. Электрическое поле в полости, как и в сплошном проводнике, равно нулю. Внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости внутри проводника никакого электрического поля. На этом основана *электростатическая защита* – экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Практически сплошной проводник может быть заменен достаточно густой металлической сеткой.

Отсутствие поля внутри проводника означает, согласно (1.55), что потенциал φ в проводнике одинаков во всех его точках, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Одинаковое во всех точках проводника значение потенциала называют *потенциалом проводника*. В окружающем проводник пространстве имеется электрическое поле, создаваемое поверхностным зарядом на проводнике. Нормируя потенциал поля на ноль в бесконечности, т. е. полагая в (1.55) $\varphi_2 = 0$ на бесконечном расстоянии от проводника и $\varphi_1 = \varphi$ на поверхности проводника, потенциал проводника определяем соотношением

$$\varphi = \int_{\text{поверхность проводника}}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}. \quad (2.43)$$

В формуле (2.43) путь интегрирования начинается в любой точке проводника и заканчивается на бесконечности.

Напряженность \vec{E} создаваемого поверхностным зарядом электрического поля у поверхности проводника направлена по нормали к ней в каждой точке. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей напряженности \vec{E} заряды пришли бы в движение на поверхности проводника, т. е. равновесие зарядов было бы невозможным. Найдем напряженность поля непосредственно у поверхности проводника, используя теорему Гаусса (1.25). Пусть интересующий нас участок поверхности проводника граничит с вакуумом. В качестве замкнутой поверхности возьмем небольшой цилиндр, расположив его так, как показано на рис. 2.9.

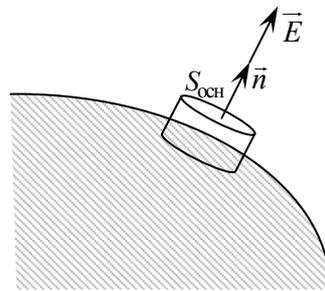


Рис. 2.9

Поток вектора \vec{E} через эту поверхность равен потоку через внешнее основание цилиндра (потоки через боковую поверхность и основания внутри проводника равны нулю):

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{очн}}} E_n dS = E_n S_{\text{очн}}, \quad (2.44)$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на внешнюю нормаль \vec{n} (по отношению к проводнику); $S_{\text{осн}}$ – площадь основания цилиндра.

Внутри цилиндра заряд имеется только на поверхности проводника. Он численно равен $Q = \sigma S_{\text{осн}}$. По теореме Гаусса $E_n S_{\text{осн}} = \sigma S_{\text{осн}} / \epsilon_0$. Сократив обе части этого равенства на $S_{\text{осн}}$, получим

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.45)$$

В случае, если проводник окружает однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , напряженность поля, согласно (2.23), уменьшится в ϵ раз:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.46)$$

Если $\sigma > 0$, то и $E_n > 0$, т. е. вектор \vec{E} направлен от поверхности проводника – совпадает по направлению с нормалью \vec{n} (этот случай показан на рис. 2.9). Если же $\sigma < 0$, то $E_n < 0$ – вектор \vec{E} направлен к поверхности проводника.

§ 2.10. Электроемкость. Конденсаторы

Рассмотрим какой-либо уединенный проводник, т. е. проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Из формулы (2.43) видно, что потенциал проводника ϕ прямо пропорционален заряду q проводника, поскольку напряженность электрического поля \vec{E} в подинтегральном выражении (2.43) прямо пропорциональна заряду. Следовательно, отношение q / ϕ не зависит от заряда q . Для каждого уединенного проводника оно имеет свое значение. Величину

$$C = \frac{q}{\phi} \quad (2.47)$$

называют *электроемкостью уединенного проводника* (сокращенно – емкостью). Она численно равна заряду, который нужно сообщить проводнику, чтобы повысить его потенциал на один вольт. Емкость зависит от размеров, формы проводника и диэлектрических свойств среды, в которой он находится. Единицу измерения емкости в СИ называют *фарадом* (Ф): $\Phi = \text{Кл/В}$.

Фарад является очень большой единицей. Найдем для примера емкость уединенного проводника, имеющего форму шара радиусом R . Для этого мысленно зарядим проводник зарядом q и по формуле (2.43) вычислим потенциал φ шара. Если шар расположен в вакууме, то напряженность электрического поля, создаваемого зарядом на шаре, определяется соотношением (1.43). В случае, если проводник окружает однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , то, согласно (2.23), напряженность поля уменьшится в ϵ раз:

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad r > R. \quad (2.48)$$

Принимая во внимание, что в (2.43) $\vec{E}d\vec{r} = E_n dr$, потенциал шара

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_n dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}. \quad (2.49)$$

Подставив (2.49) в (2.47), найдем емкость шара:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (2.50)$$

Согласно (2.50), емкостью 1 Ф обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме ($\epsilon = 1$), радиусом 9 млн. км, что в 1500 раз больше радиуса Земли (емкость Земли $C = 0,7$ мФ). Поэтому емкость обычно выражают в долях единиц. На практике чаще всего приходится встречаться с емкостями в интервале от 1 мкФ до 1 пФ.

Из (2.50) видно, что, для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь большие размеры. Однако на практике необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах накапливать значительные по величине заряды, иными словами, обладающие большой емкостью. Емкость уединенного проводника можно существенно увеличить при приближении к нему других тел. Это обусловлено тем, что поле данного проводника вызывает перераспределение зарядов на окружающих телах так, что индуцированные заряды, противоположные знаку заряда на проводнике, оказываются ближе к нему. Поэтому потенциал проводника, являющийся алгебраической суммой потенциала собственных зарядов и зарядов, индуцированных на других телах, уменьшится при приближении к нему других тел. А значит, согласно (2.47), его емкость увеличится. Это позволяет создавать устройства, которые обладают значительно большей емкостью, чем уединенный проводник. Эти устройства называют *конденсаторами*.

Конденсатор состоит из двух проводников, пространство между которыми заполнено слоем диэлектрика. Проводники называются *обкладками конденсатора*. В большинстве случаев форму обкладок конденсатора и их взаимное расположение подбирают таким образом, чтобы поле, создаваемое накапливающимися на них зарядами, было сосредоточено практически полностью внутри конденсатора. В этом случае заряды на обкладках должны быть одинаковы по модулю и противоположны по знаку (q и $-q$). Внешние поля при этом существенно не влияют на поле внутри конденсатора. Условные обозначения конденсаторов на схемах показаны на рис. 2.10.



Рис. 2.10

Основной характеристикой конденсатора является его емкость. Под емкостью конденсатора понимают отношение заряда конденсатора q к разности потенциалов между обкладками (эту разность потенциалов называют напряжением U между обкладками, см. (1.56)).

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (2.51)$$

где под зарядом конденсатора имеют в виду заряд, расположенный на положительно заряженной обкладке.

Емкость конденсатора также измеряют в фарадах. Она зависит от размеров и формы обкладок, от зазора между ними и от среды, заполняющей конденсатор. Найдем выражения для емкости некоторых конденсаторов, считая, что между обкладками находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Емкость плоского конденсатора. Плоский конденсатор состоит из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга (рис. 2.11). Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то пластины можно считать бесконечными. В этом случае краевыми эффектами можно пренебречь. Поле между обкладками является однородным.

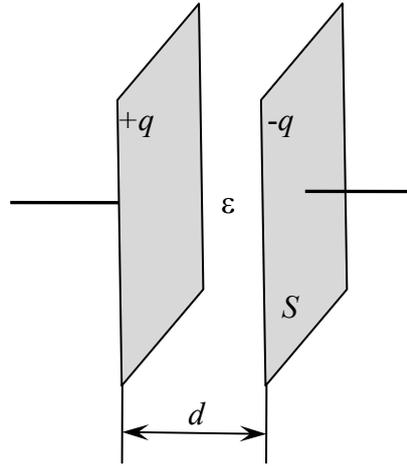


Рис. 2.11

Если между обкладками находится вакуум, напряженность поля между обкладками, имеющими заряд q , определяется по формуле (1.36). Согласно (2.23), диэлектрик ослабляет поле в ϵ раз:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}, \quad (2.52)$$

где $\sigma = q / S$ – поверхностная плотность заряда на пластине.

Напряжение между обкладками определим из (1.55) с учетом (2.52):

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}. \quad (2.53)$$

Подставив это выражение в (2.51), получим

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (2.54)$$

Емкость цилиндрического конденсатора. Цилиндрический конденсатор (рис. 2.12) состоит из двух металлических коаксиальных цилиндров радиусами a и b . Если заряд конденсатора q , то напряженность электрического поля между обкладками определяется по теореме Гаусса при помощи формулы (1.41), которая, с учетом ослабления поля диэлектриком (2.23), принимает вид

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \quad a < r < b, \quad (2.55)$$

где $\lambda = q / l$ – линейная плотность заряда на цилиндрах; l – длина конденсатора.

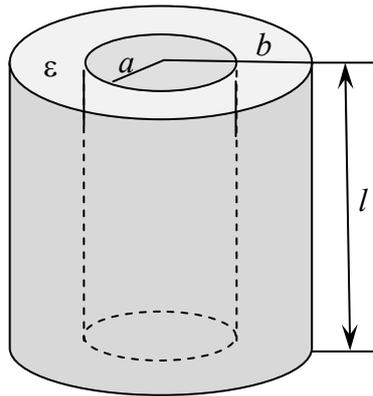


Рис. 2.12

Тогда, напряжение (1.55) между обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}. \quad (2.56)$$

Отсюда по формуле (2.51) емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln b/a}. \quad (2.57)$$

Емкость сферического конденсатора. Сферический конденсатор (рис. 2.13) состоит из двух концентрических сфер радиусами a и b .

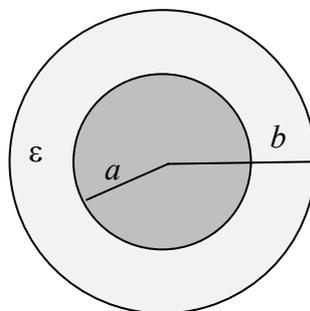


Рис. 2.13

Напряженность электрического поля между обкладками заряженного конденсатора определяется по теореме Гаусса при помощи формулы (1.43), которая, с учетом ослабления поля диэлектриком (2.23), принимает вид

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad a < r < b. \quad (2.58)$$

Напряжение (1.55) между обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (2.59)$$

Отсюда по формуле (2.51) емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (2.60)$$

Помимо емкости, каждый конденсатор характеризуется *пробивным напряжением*. Это напряжение между обкладками, при котором происходит пробой (электрический разряд) через слой диэлектрика. Величина пробивного напряжения зависит от свойств диэлектрика, его толщины.

§ 2.11. Батареи конденсаторов

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи. При этом используют параллельное и последовательное соединения конденсаторов.

При параллельном соединении (рис. 2.14) напряжения U на конденсаторах одинаковы, а полный заряд батареи q равен сумме зарядов q_i , для каждого из которых, согласно (2.51), справедливо равенство $q_i = C_i U$. Таким образом,

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = U \sum_{i=1}^n C_i. \quad (2.61)$$

С другой стороны,

$$q = CU, \quad (2.62)$$

где C – емкость батареи.

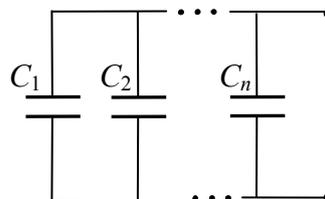


Рис. 2.14

Сравнивая (2.61) и (2.62), получаем, что емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (2.63)$$

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 2.15) заряды q на всех конденсаторах одинаковы, а полное напряжение на батарее U равно сумме напряжений $U_i = q / C_i$ на отдельных конденсаторах:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (2.64)$$

С другой стороны,

$$U = \frac{q}{C}, \quad (2.65)$$

где C – емкость батареи.

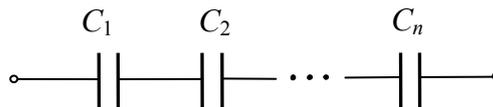


Рис. 2.15

Сравнив (2.64) и (2.65), найдем, что при последовательном соединении складываются обратные значения емкостей.

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (2.66)$$

§ 2.12. Энергия уединенного проводника и конденсатора. Энергия электрического поля

Пусть проводник имеет заряд q и потенциал φ . Заряд на проводнике можно рассматривать как систему точечных зарядов, энергия взаимодействия которых определяется соотношением (1.71). Так как потенциал каждой точки проводника φ_i равен потенциалу проводника φ , то в (1.71) потенциал можно вынести из-под знака суммы. Тогда оставшаяся сумма есть не что иное, как заряд q , находящийся на проводнике. Энергия уединенного проводника

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_i q_i = \frac{q\varphi}{2}. \quad (2.67)$$

Принимая во внимание соотношение (2.47), можно написать три соотношения для энергии уединенного проводника:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.68)$$

Любое из этих соотношений дает энергию заряженного проводника.

Найдем энергию заряженного конденсатора. Пусть потенциал обкладки конденсатора, на которой находится заряд $+q$, равен φ_1 , а потенциал обкладки, на которой находится заряд $-q$, равен φ_2 . Потенциалы φ_1 и φ_2 определяются не только зарядом на соответствующей обкладке, но и зарядом на соседней обкладке. Для энергии каждой обкладки будет справедливо выражение (2.67). Тогда энергия конденсатора

$$W = \frac{1}{2}(q\varphi_1 - q\varphi_2) = \frac{qU}{2}, \quad (2.69)$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение на обкладках конденсатора.

Воспользовавшись соотношением (2.51), получим следующие выражения для энергии конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.70)$$

Заметим, что эти формулы определяют полную энергию взаимодействия: не только энергию взаимодействия одной обкладки с другой, но и энергию взаимодействия зарядов внутри каждой обкладки.

Формула (2.70) определяет электрическую энергию W любой системы через заряды и потенциалы. Но оказывается, что энергию W можно также выразить через величину, характеризующую само электрическое поле, – его напряженность \vec{E} . Убедимся в этом на простейшем примере плоского конденсатора. Подставив в одну из формул для энергии конденсатора (2.70) выражение для емкости плоского конденсатора (2.54), получим:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd. \quad (2.71)$$

Из (2.53) следует, что отношение напряжения на обкладках к расстоянию между обкладками равно напряженности поля в конденсаторе:

$$E = \frac{U}{d}. \quad (2.72)$$

С учетом того, что $V = Sd$ – объем между обкладками (объем занимаемый полем), энергия конденсатора (2.71) примет вид

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V. \quad (2.73)$$

Формула (2.73) связывает энергию конденсатора с напряженностью электрического поля внутри конденсатора. Поэтому ее можно трактовать как энергию электрического поля, создаваемого в конденсаторе. Логично поставить вопрос о том, что является носителем энергии – заряды или поле. Опыт показывает, что носителем энергии является само поле. Это нашло подтверждение в области переменных во времени полей. Именно там встречаются явления, которые можно истолковать на основе идеи о локализации энергии в поле. Переменные поля могут существовать независимо от возбудивших их электрических зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. Опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию. Это заставляет признать, что носителем энергии является поле.

Из (2.73) следует, что объемная плотность энергии поля в конденсаторе

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}, \quad (2.74)$$

где \vec{D} – вектор электрического смещения (2.31).

Соотношение (2.74) справедливо не только для однородного поля конденсатора, но и для любого неоднородного поля в изотропном диэлектрике. Энергия электрического поля в этом случае определяется по формуле

$$W = \int_V \varpi dV = \int_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV. \quad (2.75)$$

Глава 3. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 3.1. Электрический ток. Сила и плотность тока

Электрическим током называется упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. Для протекания тока необходимо наличие в данной среде заряженных частиц, которые могут перемещаться в пределах всего тела. Такие частицы называются *носителями тока*. Ток может течь в твердых телах (металлы, полупроводники), в жидкостях (электролиты) и газах. Носителями тока в металлах и полупроводниках являются электроны, в электролитах – положительные ионы, в ионизованных газах – ионы и электроны.

За направление электрического тока условились считать то направление, в котором двигаются положительные заряды. Поэтому направление тока в металлах противоположно истинному направлению движения носителей заряда – электронов, имеющих отрицательный заряд.

Количественной мерой электрического тока является *сила тока* I . Это скалярная физическая величина, численно равная заряду, переносимому через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Если за время dt через поверхность переносится заряд dq , то сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Единицей измерения силы тока в СИ является *ампер* (А). Она является основной единицей. Через нее определяется единица измерения заряда. *Кулон* – это заряд, переносимый за 1 с через поверхность при силе тока в 1 А.

Постоянным электрическим током называют ток, не изменяющийся со временем как по величине, так и по направлению, т. е. $I = \text{const}$. Для постоянного тока справедливо соотношение

$$I = \frac{q}{t}, \quad (3.2)$$

где q – заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за время t .

Электрический ток может неравномерно распределяться по поверхности, через которую он протекает, поэтому для более детальной

характеристики тока вводят понятие *плотности тока* \vec{j} . Модуль этого вектора численно равен отношению силы тока dI через площадь dS_{\perp} , расположенную перпендикулярно направлению движения носителей, к величине этой площади:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (3.3)$$

За направление вектора \vec{j} принимают направление вектора скорости упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора скорости упорядоченного движения отрицательных носителей).

Пусть $\langle u \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения носителей зарядов, приобретаемая под действием электрического поля. За время dt через площадь dS_{\perp} пройдут заряды, расположенные от нее на расстоянии, не большем $\langle u \rangle dt$, в объеме (рис. 3.1)

$$dV = \langle u \rangle dt dS_{\perp}. \quad (3.4)$$

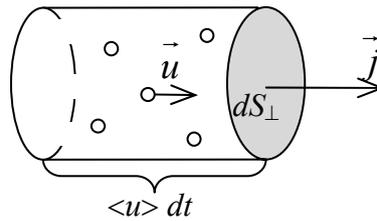


Рис. 3.1

Число носителей заряда dN в этом объеме определяется концентрацией носителей n :

$$dN = n dV = n \langle u \rangle dt dS_{\perp}. \quad (3.5)$$

Предположим, что все носители обладают одним и тем же зарядом q_0 . Тогда через площадь dS_{\perp} за время dt пройдет заряд

$$dq = q_0 dN = q_0 n \langle u \rangle dt dS_{\perp}. \quad (3.6)$$

Согласно (3.1), сила тока dI через площадь dS_{\perp} равна

$$dI = \frac{dq}{dt} = q_0 n \langle u \rangle dS_{\perp}. \quad (3.7)$$

Тогда плотность тока (3.3) примет вид

$$\vec{j} = q_0 n \langle \vec{u} \rangle. \quad (3.8)$$

Так как за направление вектора \vec{j} принимают направление вектора $\langle \vec{u} \rangle$ упорядоченного движения положительных носителей, то этому выражению можно придать векторную форму:

$$\vec{j} = q_0 n \langle \vec{u} \rangle. \quad (3.9)$$

Когда электрический ток создается одновременно несколькими видами носителей, полная плотность тока равна векторной сумме вкладов отдельных видов, для каждого из которых справедлива формула (3.9) со своими значениями q_0 , n , $\langle \vec{u} \rangle$. Единица измерения плотности тока в СИ: $[j] = \text{А/м}^2$.

Зная вектор плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности S , можно найти силу тока через эту поверхность:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS, \quad (3.10)$$

где $d\vec{S} = dS \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с единичным вектором нормали \vec{n} к площади; $j_n = j \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{j} на нормаль \vec{n} к площади, α – угол между этими векторами (рис. 3.2).

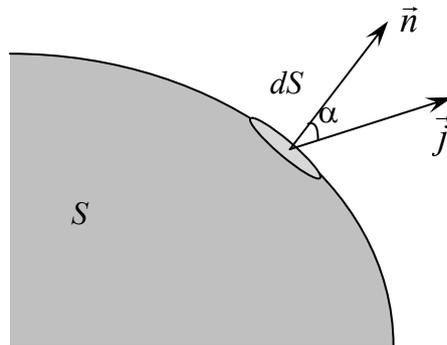


Рис. 3.2

Заметим, что сила тока является величиной алгебраической. Ее знак, как видно из (3.10), определяется выбором направления нормали в каждой точке поверхности S . При изменении направления всех векторов \vec{n} на противоположное величина I меняет знак.

§ 3.2. Закон Ома для однородного проводника

Ток возникает при условии, что внутри тела (проводника) существует электрическое поле. При отсутствии электрического поля носители тока совершают хаотическое движение, и через любую поверхность в обе стороны проходит в среднем одинаковое число носителей, так что перенос заряда через данную поверхность равен нулю (тока нет). При включении электрического поля на хаотическое движение носителей накладывается упорядоченное движение, вследствие чего появляется перенос заряда через поверхность, т. е. появляется электрический ток. Механизм создания электрического поля внутри проводника будет рассмотрен в следующем параграфе.

В дальнейшем мы будем рассматривать частный, но важный в практическом плане случай, когда постоянный электрический ток течет вдоль тонких проводов. В этом случае направление тока совпадает с направлением оси провода, и плотность тока j может считаться одинаковой во всех точках сечения провода, так что сила тока (3.10) принимает вид

$$I = jS, \quad (3.11)$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Поскольку в проводнике при наличии постоянного тока напряженность электрического поля $\vec{E} \neq 0$, потенциал будет меняться вдоль проводника. Если площадь сечения однородного проводника постоянна, то вдоль проводника напряженность электрического поля является постоянной величиной $\vec{E} = \text{const}$. В этом случае разность потенциалов (1.55) между концами проводника

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = El, \quad (3.12)$$

где l – длина проводника.

Для многих проводников (металлов) справедлив экспериментально установленный *закон Ома*. Согласно этому закону, сила тока I , протекающего по однородному проводнику, прямо пропорциональна электрической разности потенциалов на его концах (напряжению U):

$$I = \Lambda U = \frac{U}{R}, \quad (3.13)$$

где коэффициент пропорциональности Λ называют *электрической проводимостью* (или *электропроводностью*) проводника. Она измеряется в сименсах (См): $[\Lambda] = \text{См} = \text{А/В}$.

Обратная электропроводности величина R называется *электрическим сопротивлением* проводника. Сопротивление характеризует противодействие проводника к протеканию электрического тока. Единица сопротивления названа *омом* (Ом): $[R] = \text{Ом} = \text{В/А}$. Условные обозначения сопротивлений (резисторов) на схемах показаны на рис. 3.3:

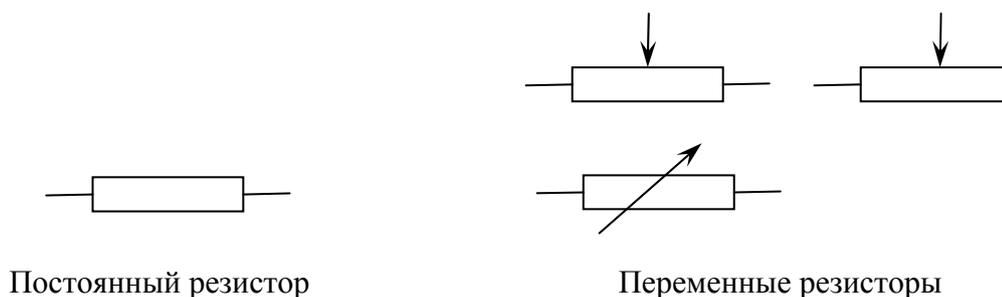


Рис. 3.3

Сопротивление зависит от материала проводника, а также от его формы и размеров. В простейшем случае однородного проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.14)$$

где ρ – *удельное электрическое сопротивление*; l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения. В СИ ρ измеряется в *омметрах*: $[\rho] = \text{Ом}\cdot\text{м}$.

Удельное сопротивление зависит от материала проводника и его температуры. Опытным путем установлено, что для большинства металлов с повышением температуры удельное сопротивление увеличивается по линейному закону:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.15)$$

где ρ и ρ_0 – удельные сопротивления при температурах $t^\circ\text{С}$ и 0°С , α – *температурный коэффициент сопротивления*.

Значения удельного электрического сопротивления для наиболее часто используемых проводников (медь, алюминий) составляют при комнатной температуре несколько единиц на 10^{-8} Ом·м.

Подставив (3.11), (3.12) и (3.14) в закон Ома (3.13), получим связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля в проводнике:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3.16)$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная электропроводимость. Единицей σ является сименс на метр: $[\sigma] = \text{См/м}$. При выводе (3.16) мы учли, что в изотропном проводнике направления векторов \vec{j} и \vec{E} совпадают.

Соотношение (3.16) выражает закон Ома в дифференциальной форме. Свое название оно получило из-за того, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника. Иначе говоря, соотношение (3.16) выражает локальный закон Ома, в отличие от закона Ома (3.13), который носит интегральный характер.

§ 3.3. Электродвижущая сила

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то, как мы установили в § 2.9, перемещение носителей тока приведет очень быстро к выравниванию потенциалов во всех точках проводника и к исчезновению поля внутри проводника. В результате этого ток в проводнике прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, в цепи наряду с участками, где положительные носители тока двигаются в сторону уменьшения потенциала φ под действием электрического поля, должны иметься участки, на которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания φ , т. е. против сил электрического поля (рис. 3.4). В этом случае разность потенциалов на концах проводника поддерживается постоянной, и в цепи существует электрический ток. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых *сторонними силами*. Физическое происхождение их может быть самым разнообразным – механическим, термическим, химическим или электромагнитным, но не электростатическим. Физической характеристикой сторонних сил является *электродвижущая сила* \mathcal{E} , или ЭДС. Она численно равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}, \quad (3.17)$$

где $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил над зарядом q . Единицей измерения ЭДС в СИ является вольт: $[\mathcal{E}] = \text{Дж/Кл} = \text{В}$.

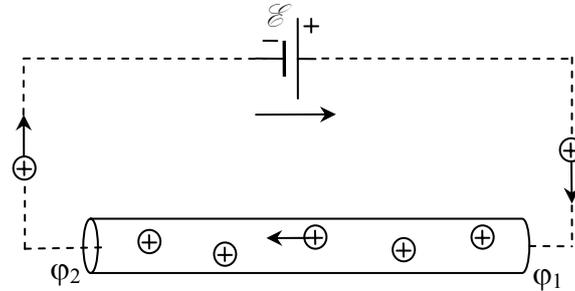


Рис. 3.4

Сторонние силы в цепи создаются приборами – *источниками ЭДС (источниками напряжения)*, или *источниками тока*. Ими могут быть гальванические элементы, аккумуляторы, электрические генераторы постоянного тока. На рис. 3.4 показано условное обозначение источника постоянного тока (гальванического элемента или аккумулятора) и направление, в котором источник создает электрический ток. Совокупность элементов (устройств), предназначенных для протекания электрического тока, называют *электрической цепью*.

Заметим, что роль источника сторонних сил состоит не в том, чтобы создавать в проводниках соответствующее электрическое поле, а в том, чтобы обеспечивать такое распределение зарядов вдоль проводника, которое создает нужное электрическое поле в них. Это поле обеспечивает существование постоянного тока.

Участок электрической цепи, на котором действуют сторонние силы, называется *неоднородным участком*. Сторонние силы, действующие на заряд q , можно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_{\text{ст}}, \quad (3.18)$$

где $\vec{E}_{\text{ст}}$ называют *напряженностью сторонних сил*.

Работа сторонних сил по перемещению заряда на этом участке

$$A_{\text{ст}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{r} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{r}, \quad (3.19)$$

где интегрирование идет по данному неоднородному участку.

Разделив эту работу на q , получим ЭДС (3.17), действующую на данном участке:

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{r}. \quad (3.20)$$

Заметим, что сторонние силы могут действовать не только на отдельных участках цепи, но и во всей цепи (в каждой ее точке). В этом случае интегрирование производится по всей замкнутой цепи.

Кроме сторонних сил, на неоднородном участке цепи на заряды также действуют силы со стороны электростатического поля $\vec{F}_{\text{эл}}$, создаваемого в проводнике. Они определяются соотношением (1.9). Следовательно, результирующая сила, действующая на заряд q на этом участке,

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_0, \quad (3.21)$$

где $\vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}$; \vec{E} – напряженность электрического поля в проводнике.

Работа, совершаемая этой силой по перемещению заряда q , равна сумме работ действующих сил:

$$A = A_{\text{эл}} + A_{\text{ст}}. \quad (3.22)$$

Принимая во внимание соотношение (3.19) для работы $A_{\text{ст}}$ сторонних сил и формулу (1.54) для работы $A_{\text{эл}}$ электростатического поля, найдем

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}, \quad (3.23)$$

где учитывается соотношение (3.20) для интеграла от напряженности сторонних сил.

Величину U , численно равную работе, совершаемой как сторонними, так и электростатическими силами по перемещению единичного положительного заряда вдоль неоднородного участка цепи, называют *падением напряжения* или просто *напряжением* на данном участке цепи:

$$U = \frac{A}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (3.24)$$

Понятие напряжения для неоднородного участка цепи (3.24) является обобщением понятия напряжения для электростатического поля (1.56). Участок цепи, на котором на носители тока не действуют сторонние силы, называется *однородным участком*. Напряжение на этом участке равно разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$.

§ 3.4. Обобщенный закон Ома

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют электростатические $\vec{F}_{\text{эл}}$ и сторонние $\vec{F}_{\text{ст}}$ силы. Результирующая этих сил определяется соотношением (3.21). Сторонние силы способны вызывать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, что и электростатические силы. Очевидно, что на неоднородном участке цепи плотность тока пропорциональна не напряженности \vec{E} электрического поля в проводнике (см. (3.16)), а сумме напряженностей $\vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}$:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_0 = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (3.25)$$

Формула (3.25) обобщает формулу (3.16) на случай неоднородного участка цепи. Она выражает в дифференциальной форме закон Ома для неоднородного участка цепи.

От закона в дифференциальной форме можно перейти к интегральной форме закона Ома. Рассмотрим неоднородный участок электрической цепи, содержащей сопротивление R и ЭДС \mathcal{E} (рис. 3.5).

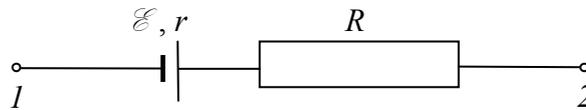


Рис. 3.5

Плотность тока на этом участке определяется соотношением (3.25). Разделим уравнение (3.25) на σ , полученное выражение умножим скалярно на вектор перемещения $d\vec{r}$ вдоль оси провода, взятый по направлению от сечения 1 к сечению 2 (его мы примем за положительное направление), и затем проинтегрируем по длине участка от сечения 1 до сечения 2:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{r}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{r}. \quad (3.26)$$

Учитывая в (3.26) соотношения (1.55) и (3.20), получим

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{r}}{\sigma} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (3.27)$$

Преобразуем подинтегральное выражение в (3.27). Примем во внимание, что $\vec{j}d\vec{r} = j|d\vec{r}| = jdl$, где dl – элемент длины данного участка; $\sigma = 1/\rho$; $j = I/S$, где S – площадь сечения участка. Таким образом, (3.27) примет вид

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (3.28)$$

Поскольку для постоянного тока $I = \text{const}$ во всех сечениях цепи, эту величину в (3.28) мы вынесли за знак интеграла. Подынтегральное выражение $\rho dl / S$ определяет не что иное, как сопротивление участка цепи длиной dl , а интеграл от этого выражения – полное сопротивление R_{12} участка цепи между точками 1 и 2:

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R + r, \quad (3.29)$$

где R – сопротивление проводника на участке (*внешнее сопротивление* по отношению к источнику); r – *внутреннее сопротивление* (сопротивление источника).

Из уравнения (3.28) с учетом (3.29) следует выражение для силы тока на неоднородном участке цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R + r}. \quad (3.30)$$

Соотношение (3.30) называют *обобщенным законом Ома* (или *законом Ома для неоднородного участка цепи*). Сила тока на неоднородном участке пропорциональна напряжению (3.24). Заметим, что ЭДС \mathcal{E} в соотношении (3.30) берется с учетом знака. Если ЭДС способствует движению положительных носителей в выбранном направлении, то $\mathcal{E} > 0$, если же препятствуют, то $\mathcal{E} < 0$. Например, на рис. 3.5 ЭДС создает ток в направлении, которое совпадает с выбранным направлением от 1 к 2, поэтому в (3.30) $\mathcal{E} > 0$.

Если на данном участке цепи отсутствует ЭДС ($\mathcal{E} = 0$, $r = 0$), то из (3.30) следует закон Ома для однородного участка цепи (3.13):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \quad (3.31)$$

где принимается во внимание, что напряжение равно разности потенциалов на концах проводника.

В случае неразветвленной замкнутой электрической цепи (рис. 3.6) сила тока одинакова во всех ее сечениях. Такую цепь можно рассматривать как неоднородный участок (рис. 3.5), концы которого (точки 1 и 2) совпадают, так что $\varphi_1 = \varphi_2$.

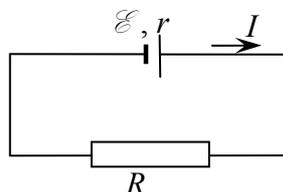


Рис. 3.6

Поэтому закон Ома для замкнутой цепи имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (3.32)$$

Представим себе участок цепи, содержащий только источник ЭДС. Тогда в уравнении (3.30) для выбранного нами участка $R = 0$, а $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов на его клеммах. Если источник разомкнут, то $I = 0$ и из (3.30) следует, что ЭДС источника

$$\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (3.33)$$

Таким образом, ЭДС источника равна разности потенциалов на его клеммах в разомкнутом состоянии. Разность потенциалов на клеммах данного источника ЭДС, замкнутого на внешнее сопротивление, всегда меньше его ЭДС. Она зависит от внешней нагрузки.

§ 3.5. Соединение проводников в электрические цепи

Электрические цепи содержат, как правило, несколько соединенных между собой различных проводников. Простейшая электрическая цепь имеет один «вход» и один «выход», т. е. два зажима, к которым можно присоединять провода. По этим проводам заряды могут втекать в цепь и вытекать из нее. Если ток в цепи стационарен, т. е. в ней не происходит накопления электрических зарядов, то сила тока на входе и выходе должна быть одинакова.

Если взять цепь, состоящую из многих соединенных между собой различных проводников, и выбрать в ней две точки в качестве входа и

выхода, то для этих точек мы можем считать всю цепь эквивалентной одному единственному сопротивлению. В этом случае можно говорить о токе I в этой цепи и о напряжении U на зажимах, что означает разность электрических потенциалов между входом и выходом. Отношение U/I можно рассматривать как сопротивление R резистора, эквивалентного всей цепи. Когда для всех отдельных элементов такой цепи справедлив закон Ома, значение эквивалентного сопротивления легко может быть рассчитано. Рассмотрим простейшие случаи соединения проводников – последовательное и параллельное.

При *последовательном соединении* (рис. 3.7) сила тока в каждом из них одна и та же, а напряжение на зажимах всей цепи равно сумме напряжений на отдельных резисторах:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (3.34)$$

Поскольку для каждого резистора, в соответствии с законом Ома (3.13), $U_i = IR_i$, то (3.34) можно записать в виде

$$U = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR. \quad (3.35)$$

Откуда сопротивление цепи при последовательном соединении резисторов

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (3.36)$$

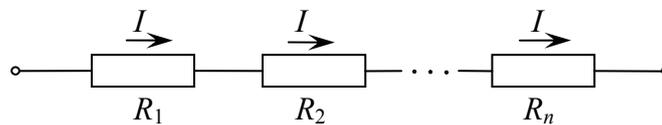


Рис. 3.7

При *параллельном соединении* (рис. 3.8) напряжения одинаковы на всех резисторах. Они равны приложенному напряжению U . Сила тока на входе и на выходе равна сумме сил токов в отдельных ветвях параллельной цепи:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (3.37)$$

Подставив сюда $I = U/R$ вместо левой части и $I_i = U/R_i$ вместо слагаемых в правой части, получим

$$\frac{U}{R} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right). \quad (3.38)$$

Откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \quad (3.39)$$

т. е. при параллельном соединении проводников складываются величины, обратные их сопротивлениям, – проводимости. Сопротивление параллельной цепи всегда меньше сопротивления входящего в нее резистора.

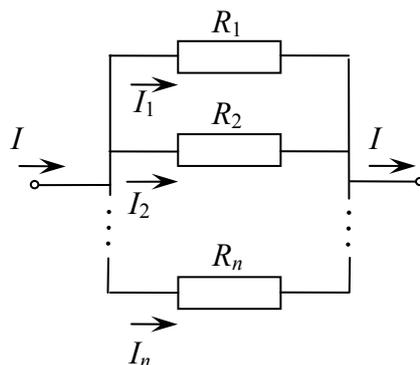


Рис. 3.8

Схемы многих электрических цепей можно упрощать, шаг за шагом заменяя группы последовательно или параллельно соединенных резисторов их эквивалентами, переходя тем самым к эквивалентной схеме всей исходной цепи. Однако не любую электрическую схему можно свести к комбинациям последовательных и параллельных соединений. В этом случае следует найти силу тока I в цепи в зависимости от приложенного к его зажимам напряжения U и по формуле $R = U / I$ вычислить сопротивление всей цепи, т. е. эквивалентного ей резистора.

§ 3.6. Правила Кирхгофа

Непосредственный расчет разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров, каждый из которых может иметь несколько источников тока, довольно сложен. Расчет разветвленной цепи, например нахождение токов в отдельных ее ветвях, значительно упрощается, если использовать два правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа относится к узлам цепи. *Узлом* называют любую точку разветвленной цепи, в которой сходится три и более

проводника. При этом токи, входящие в узел, считаются положительными, а исходящие – отрицательными. Согласно этому правилу, алгебраическая сумма токов (сумма с учетом знаков), сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3.40)$$

Например, применительно к рис. 3.9 уравнение (3.40) запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (3.41)$$

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения электрического заряда в узлах, которое требует, чтобы заряд, вошедший в узел, был равен заряду, вышедшему из него.

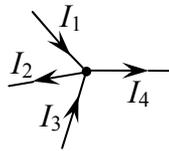


Рис. 3.9

Второе правило Кирхгофа относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Согласно этому правилу, алгебраическая сумма произведений сил тока в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \mathcal{E}_i. \quad (3.42)$$

Это правило является следствием обобщенного закона Ома (3.30). Докажем его для случая, когда выделенный контур состоит из трех участков (рис. 3.10). Зададим направление обхода контура (например, по часовой стрелке, как указано на рисунке) и применим к каждому из трех участков закон Ома (3.30):

$$I_1 R_{AB} = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1, \quad (3.43)$$

$$-I_2 R_{BC} = \varphi_B - \varphi_C - \mathcal{E}_2, \quad (3.44)$$

$$I_3 R_{CA} = \varphi_C - \varphi_A + \mathcal{E}_3. \quad (3.45)$$

Сложив эти равенства, приходим ко второму правилу Кирхгофа (3.42):

$$I_1 R_{AB} - I_2 R_{BC} + I_3 R_{CA} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (3.46)$$

Заметим, что направления токов на участках цепи задаются произвольным образом. Если ток совпадает с направлением обхода, то он считается положительным, а если нет, то отрицательным. ЭДС, действующая по выбранному направлению обхода, является положительной, а против – отрицательной.

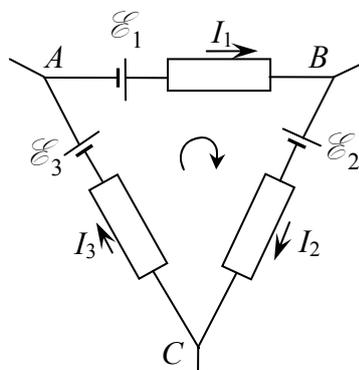


Рис. 3.10

Число независимых уравнений, составленных в соответствии с первым и вторым правилами Кирхгофа, оказывается равным числу различных токов, текущих в разветвленной цепи. Поэтому, если заданы ЭДС и сопротивления для всех неразветвленных участков, то могут быть вычислены все токи.

§ 3.7. Мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим однородный проводник с током I , к концам которого приложена разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$. За время dt через сечение проводника переносится заряд $dq = Idt$. Работа сил электростатического поля при таком переносе заряда определяется соотношением (1.54), которое в данном случае имеет вид

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = IUdt. \quad (3.47)$$

Отсюда, с учетом закона Ома (3.13), мощность, выделяемая во внешней цепи,

$$P_R = \frac{\delta A}{dt} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R. \quad (3.48)$$

Данные формулы справедливы как для постоянного, так и для переменного тока.

Согласно закону сохранения энергии, эквивалентная работе (3.47) энергия должна выделяться в иной форме. Если проводник неподвижен и в нем не происходят химические превращения, то эта энергия должна выделяться в форме внутренней (тепловой) энергии, в результате чего проводник нагревается. По закону сохранения энергии количество теплоты δQ , которое выделяется в проводнике за время dt , равно работе δA (3.47):

$$\delta Q = IUdt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt. \quad (3.49)$$

Количество теплоты Q , которое выделится в проводнике за конечный промежуток времени t , определим интегрированием (3.49):

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (3.50)$$

В случае постоянного тока $I = \text{const}$, поэтому

$$Q = I^2 R t. \quad (3.51)$$

Формулы (3.50) и (3.51) выражают *закон Джоуля – Ленца*.

Получим выражение этого закона в дифференциальной форме, характеризующей выделение теплоты в различных местах проводящей среды. Для этой цели выделим в проводнике элементарный объем в виде цилиндра длиной dl и площадью поперечного сечения dS , которое перпендикулярно плотности тока \vec{j} . Сила тока в этом цилиндре $I = jdS$ и его сопротивление $R = \rho dl/dS$. Согласно закону Джоуля – Ленца, в этом объеме за время dt выделится количество теплоты

$$\delta Q = I^2 R dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (3.52)$$

где $dV = dS dl$ – объем цилиндра. Разделив (3.52) на $dV dt$, получим формулу, которая определяет количество теплоты, выделяемое в единице объема проводника за единицу времени, – *удельную тепловую мощность тока*:

$$w = \frac{\delta Q}{dS dt} = \rho j^2. \quad (3.53)$$

Учитывая в (3.53) закон Ома (3.16) и связь удельного сопротивления с удельной проводимостью $\rho = 1/\sigma$, получим:

$$w = \sigma E^2. \quad (3.54)$$

Эта формула выражает закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

Если участок цепи содержит источник ЭДС, т. е. является неоднородным, то на носители тока будут действовать не только электрические силы, но и сторонние. В этом случае работа по переносу заряда dq на этом участке (см. (3.23))

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) + dq\mathcal{E}. \quad (3.55)$$

Мощность, выделяемая на этом участке,

$$P = \frac{\delta A}{dt} = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}I. \quad (3.56)$$

Согласно (3.56), мощность, выделяемая на неоднородном участке цепи, равна алгебраической сумме мощностей электрических и сторонних сил. Сумму этих мощностей, т. е. соотношение (3.56), называют *мощностью тока* на рассматриваемом участке цепи.

Применяя (3.56) ко всей неразветвленной цепи (тогда $\varphi_1 = \varphi_2$), получим, что мощность, выделяемая во всей цепи, равна мощности только сторонних сил:

$$P = \mathcal{E}I. \quad (3.57)$$

Таким образом, мощность производится только сторонними силами за счет энергии, запасенной в источнике тока. Роль же электрического поля сводится к тому, что оно перераспределяет эту мощность по различным участкам цепи.

§ 3.8. Вывод законов Ома и Джоуля – Ленца в классической электронной теории электропроводности металлов

С точки зрения классической электронной теории высокая электропроводность металлов обусловлена наличием огромного числа носителей зарядов – электронов проводимости, слабо связанных с ионами кристаллической решетки и способных перемещаться по всему объему проводника. Систему электронов проводимости можно рассматривать как электронный газ, который по своим свойствам близок к идеальному одноатомному газу. Механизм прохождения тока по проводнику и его нагревание в рамках классических представлений выглядит так.

Свободный электрон ускоряется электрическим полем, которое имеется внутри проводника. По второму закону Ньютона все электроны приобретают одинаковое ускорение:

$$a = \frac{F_{\text{эл}}}{m} = \frac{eE}{m}, \quad (3.58)$$

где $F_{\text{эл}} = eE$ – сила, действующая на электрон со стороны электрического поля; e , m – модуль заряда и масса электрона; E – напряженность электрического поля внутри проводника.

В результате все электроны приобретают дополнительную скорость в одном и том же направлении, т. е. образуется упорядоченное движение электронов – электрический ток. Действительное движение электрона очень сложно, поскольку электроны находятся в хаотическом тепловом движении, на которое в электрическом поле накладывается упорядоченное движение. При своем движении электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки металла и передают им небольшую часть своей энергии, которая в среднем равна энергии, приобретенной ими за счет электрического поля.

Между двумя последовательными соударениями электрон движется равноускоренно, поэтому его средняя скорость упорядоченного движения

$$\langle u \rangle = \frac{u_{\text{max}}}{2} = \frac{a \langle t \rangle}{2} = \frac{eE}{2m} \langle t \rangle, \quad (3.59)$$

где $u_{\text{max}} = a \langle t \rangle$ – максимальная скорость упорядоченного движения, которую электрон приобретает к концу свободного пробега, непосредственно перед соударением; $\langle t \rangle$ – среднее время свободного пробега.

Если λ – средняя длина свободного пробега (расстояние, пройденное электроном между двумя последовательными столкновениями) и $\langle v \rangle$ – средняя скорость хаотического движения, то

$$\langle t \rangle = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (3.60)$$

где принято во внимание, что средняя скорость хаотического движения во много раз превышает среднюю скорость упорядоченного движения ($\langle v \rangle \sim 10^5$ м/с и $\langle u \rangle \sim 10^{-4}$ м/с).

Подставим (3.59), с учетом (3.60), в формулу (3.8) для плотности тока и учтем, что заряд носителей тока $q_0 = e$. Получим

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2m \langle v \rangle} E. \quad (3.61)$$

Сравнив (3.61) с законом Ома в дифференциальной форме (3.16), найдем выражение для удельной электропроводности металлов:

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m \langle v \rangle}. \quad (3.62)$$

Таким образом, получены правильная зависимость плотности тока от напряженности электрического поля и выражение удельной электропроводности металлов через характеристики движения электронов проводимости.

Из электронной теории электропроводности следует также закон Джоуля – Ленца (3.54). Рассмотрим превращение энергии, происходящее при соударениях электронов с ионами кристаллической решетки. В конце свободного пробега каждый электрон теряет скорость упорядоченного движения, приобретенную им под действием электрического поля за время свободного пробега:

$$u_{\max} = a \langle t \rangle = \frac{eE}{m} \frac{\lambda}{\langle v \rangle}. \quad (3.63)$$

Поэтому при каждом столкновении ионам проводника передается приобретенная между столкновениями кинетическая энергия:

$$K = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2m \langle v \rangle^2} E^2. \quad (3.64)$$

Число столкновений в единицу времени каждого электрона с ионами проводника равна $\langle v \rangle / \lambda$. Если n – концентрация электронов проводимости, то в единицу времени происходит $n \langle v \rangle / \lambda$ столкновений в единице объема проводника. При этом решетке передается энергия, которая идет на нагревание проводника. Количество теплоты, выделяемое в единице объема проводника за единицу времени, – удельная тепловая мощность тока:

$$w = n \frac{\langle v \rangle}{\lambda} K = \frac{ne^2\lambda}{2m \langle v \rangle} E^2 = \sigma E^2, \quad (3.65)$$

где учтены равенства (3.62) и (3.64). Тем самым, исходя из электронной теории электропроводности, получено правильное выражение для закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме (3.54).

Классическая теория электропроводности весьма наглядна и дает правильную зависимость плотности тока и тепловой мощности тока от напряженности электрического поля в проводнике. Однако она не

приводит к правильным количественным результатам. Главные расхождения теории с экспериментом состоят в следующем:

1) для того чтобы по формуле (3.62) получить правильные значения σ , наблюдаемые у металлов, надо принять, что длина свободного пробега электронов λ в тысячи раз превосходит межатомные расстояния в проводнике. Понять возможность таких больших свободных пробегов затруднительно в рамках классических представлений;

2) эксперимент для зависимости удельной проводимости σ от температуры приводит к закону $\sigma \sim 1/T$. Объяснить это формулой (3.62) невозможно, поскольку кинетическая теория газов дает $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, допустить же зависимость $\lambda \sim 1/\sqrt{T}$ невозможно в классической картине взаимодействия;

3) по теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы следует ожидать от свободных электронов очень большого вклада в теплоемкость проводников, который на эксперименте не наблюдается.

Указанные расхождения теории с экспериментом устраняются в квантовой теории электропроводности. Эта теория описывает физические явления и процессы микромира. Она учитывает волновые свойства микрочастиц. Важнейшей характеристикой волнового движения является способность волн огибать препятствия благодаря дифракции. В результате этого при своем движении электроны как бы огибают ионы кристаллической решетки без столкновений, и длины их свободного пробега могут быть весьма большими. Решение квантово-механической задачи о движении электрона в металлическом проводнике приводит к зависимости $\sigma \sim 1/T$, как это и наблюдается в действительности. Кроме того, вклад электронов в теплоемкость металлов оказывается незначительным. Таким образом, непротиворечивая количественная теория электропроводности была построена лишь в рамках квантовой механики.

§ 3.9. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов

Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в ос-

новном не кристаллической решеткой, а свободными электронами. Они, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического движения, т. е. осуществляют перенос теплоты.

Видеман и Франц установили эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности α к удельной электропроводимости σ для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется прямо пропорционально абсолютной температуре:

$$\frac{\alpha}{\sigma} = LT, \quad (3.66)$$

где постоянную для всех металлов величину L называют *числом Лоренца*.

Рассматривая электроны как одноатомный газ, для коэффициента теплопроводности α можно заимствовать выражение из кинетической теории газов (см. [2], § 2.5, формула (2.43)):

$$\alpha = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \lambda, \quad (3.67)$$

где c_V – удельная теплоемкость газа электронов при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle v \rangle$ – средняя скорость хаотического движения электронов; λ – средняя длина свободного пробега электрона.

Примем во внимание, что для одноатомного газа

$$c_V = \frac{3R}{2M} = \frac{3k}{2m}, \quad (3.68)$$

где R – универсальная газовая постоянная; M – молярная масса газа; k – постоянная Больцмана; m – масса электрона.

Тогда, учитывая связь между плотностью ρ и концентрацией n газа ($\rho = mn$), формула (3.67) примет вид

$$\alpha = \frac{1}{2} kn \langle v \rangle \lambda. \quad (3.69)$$

Разделим α на выражение (3.62) для σ , получим

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{km \langle v \rangle^2}{e^2}. \quad (3.70)$$

Согласно закону равномерного распределения энергии по степеням свободы (см. [2], § 1.9), средняя кинетическая энергия электрона определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{m \langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (3.71)$$

Учитывая это в уравнении (3.70), найдем

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (3.72)$$

Сравнивая (3.66) и (3.72), приходим к выражению, определяющему число Лоренца:

$$L = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2. \quad (3.73)$$

Подставив $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К и $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, получим

$$L = 2,23 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \text{К}^2}. \quad (3.74)$$

В квантовой теории металлов

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2,45 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \text{К}^2}. \quad (3.75)$$

Это значение L находится в хорошем согласии с экспериментом при комнатных температурах.

Глава 4. КОНТАКТНЫЕ И ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ 4.1. Контактная разность потенциалов

Электроны проводимости в металле находятся в хаотическом тепловом движении. Наиболее быстро движущиеся электроны, обладающие достаточной кинетической энергией, могут вылетать из металла в окружающее пространство. Это приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Взаимодействие вылетевшего электрона с этим зарядом, а также силы отталкивания со стороны ранее вылетевших электронов заставляют электрон вернуться обратно. Таким образом, отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляются от нее на несколько межатомных расстояний и затем возвращаются назад. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов. Между электронным газом в металле и электронным облаком устанавливается динамическое равновесие. Концентрация электронного облака зависит от количества быстрых электронов, обладающих энергией, достаточной, чтобы покинуть металл. Количество таких электронов зависит от температуры. При увеличении температуры концентрация электронов в облаке увеличивается.

Работа, которую необходимо совершить для удаления электрона из металла в вакуум, называют *работой выхода*. В данном случае работа производится электронами за счет уменьшения их кинетической энергии. Работа выхода зависит от химической природы металла и состояния его поверхности (загрязнения, следы влаги и пр.). Работу выхода принято измерять в электронвольтах (эВ): $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Для чистых металлов работа выхода колеблется в пределах нескольких электронвольт.

Избыточный положительный заряд в металле и избыточный отрицательный заряд в окружающей среде находятся в очень тонком слое по обе стороны поверхности металла. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям в металле. Система этих зарядов представляет собой двойной электрический слой, подобный очень тонкому конденсатору. Электрон, вылетая за пределы металла, должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного

слоя. Принимая во внимание, что заряд электрона $q = -e$, и используя соотношение (1.54) для работы в электрическом поле, найдем разность потенциалов между слоями:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{e}, \quad (4.1)$$

где A – работа выхода электрона из металла. Эту разность потенциалов принято называть *поверхностным скачком потенциала* или *контактной разностью потенциалов* между металлом и окружающей средой.

Контактная разность потенциалов возникает также при соприкосновении металлов между собой. При соприкосновении двух металлических проводников электроны вследствие теплового движения переходят из одного проводника в другой. Если соприкасающиеся проводники различны или если их температуры в разных точках неодинаковы, то оба потока диффузии электронов неодинаковы и один из проводников заряжается положительно, а другой – отрицательно. Поэтому внутри проводников и во внешнем пространстве между проводниками появляется электрическое поле. Разность потенциалов, возникающая между двумя контактирующими металлами, называется *внутренней контактной разностью потенциалов*. Разность потенциалов между двумя точками, находящимися в непосредственной близости от поверхностей первого и второго контактирующих металлов вне их, называется *внешней контактной разностью потенциалов*. Она характеризует электростатическое поле, создаваемое контактирующими металлами в окружающем их пространстве.

Экспериментально были установлены два закона (*законы Вольты*).

1. Контактная разность потенциалов, возникающая при соединении двух проводников, изготовленных из различных металлов, зависит только от их химического состава и температуры.

2. Разность потенциалов между концами цепи, состоящей из последовательно соединенных металлических проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников. Она равна разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

Классическая электронная теория проводимости металлов позволила объяснить законы Вольты и найти выражения для внешней и внутренней контактных разностей потенциалов.

Внешняя контактная разность потенциалов обусловлена разницей работы выхода электронов из контактирующих металлов:

$$U' = \varphi'_1 - \varphi'_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e}, \quad (4.2)$$

где знак минус показывает, что при $A_1 > A_2$, $\varphi'_1 < \varphi'_2$, т. е. первый металл заряжается отрицательно, а второй положительно.

Причина появления внутренней контактной разности потенциалов между металлами связана с представлением об электронном газе в металлах как об идеальном газе. Давление такого газа в металле определяется концентрацией электронов проводимости n и температурой T . Таким образом, даже если температуры металлов одинаковы, давление электронного газа в этих металлах различно, так как концентрации электронов проводимости не равны в металлах. Под действием перепада давлений электроны будут переходить из одного металла в другой. Это будет происходить до тех пор, пока электрическое поле, возникающее вследствие диффузионного перехода электронов, не компенсирует своим противодействием влияние перепада давления. Внутренняя контактная разность потенциалов, которая возникает в результате диффузионного перехода электронов, выражается формулой

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}, \quad (4.3)$$

где k – постоянная Больцмана; n_1 и n_2 – концентрации электронов проводимости в металлах.

Соотношение (4.3) является математическим выражением первого закона Вольта, так как оно показывает, что разность потенциалов зависит только от температуры и химической природы (концентраций) контактирующих металлов. Из этого соотношения следует также второй закон Вольта. Например, для цепи, состоящей из трех последовательно соединенных проводников, разность потенциалов между крайними проводниками

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3. \quad (4.4)$$

Подставив в (4.4) соотношение (4.3) для каждой разности потенциалов контактирующих проводников, найдем

$$U_{13} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_3} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_3}. \quad (4.5)$$

Таким образом, разность потенциалов между крайними проводниками равна разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

§ 4.2. Термоэлектрические явления

Между тепловыми и электрическими процессами в металлах имеется взаимосвязь, которая обуславливает явления, называемые *термоэлектрическими*. К их числу принадлежит явление *Зеебека*. Оно состоит в том, что если спаи a и b двух разнородных металлов, образующих замкнутую цепь (рис. 4.1), поддерживать при различных температурах, то в цепи течет ток. Изменение знака у разности температур спаев сопровождается изменением направления тока.

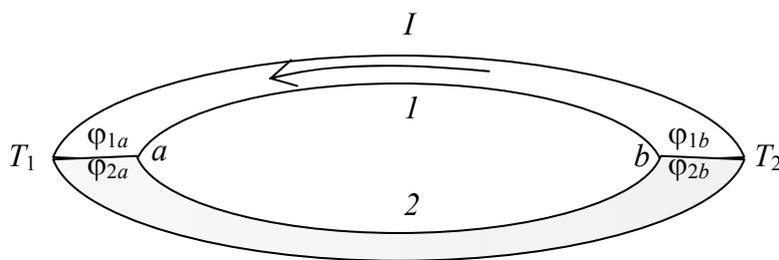


Рис. 4.1

Электрический ток является следствием появления в цепи *термоэлектродвижущей силы* \mathcal{E}_T (сокращенно термо-ЭДС). Она обусловлена тем, что внутренняя контактная разность потенциалов (4.3) зависит от температуры. Поэтому скачок потенциала (внутренняя контактная разность потенциалов) при переходе из одного металла в другой неодинаков в спаих, находящихся при разных температурах, и сумма скачков потенциалов для всей цепи отлична от нуля. Из закона Ома для замкнутой цепи (3.32) следует, что возникающая термо-ЭДС равна сумме падений напряжений на каждом участке цепи:

$$\mathcal{E}_T = U_1 + U_2. \quad (4.6)$$

Так как $U_1 = \varphi_{1b} - \varphi_{1a}$ и $U_2 = \varphi_{2a} - \varphi_{2b}$, то

$$\mathcal{E}_T = \varphi_{1b} - \varphi_{2b} + \varphi_{2a} - \varphi_{1a}. \quad (4.7)$$

Таким образом, в рассматриваемой цепи действует электродвижущая сила, равная алгебраической сумме всех внутренних контактных разностей потенциалов. Принимая во внимание (4.3), получим

$$\mathcal{E}_T = \alpha(T_2 - T_1), \quad (4.8)$$

где постоянная величина α характеризует свойства контакта двух металлов, ее называют *удельной термо-ЭДС* данной пары металлов. Она определяется соотношением

$$\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.9)$$

Явление Зеебека используется для измерения температур. Для этой цели применяют *термопары*, представляющие собой две спаянные между собой проволоки, изготовленные из различных металлов или сплавов (рис. 4.2), с известным значением коэффициента α в формуле (4.8).

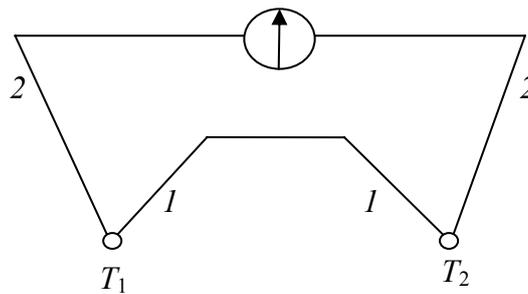


Рис. 4.2

Один спай термопары поддерживают при постоянной температуре T_1 , другой помещают в среду, температуру T_2 которой нужно измерить. О величине температуры можно судить по силе возникающего в цепи тока или появляющейся в цепи термо-ЭДС, которые измеряются гальванометром. С помощью термопар можно измерять с точностью порядка сотых долей градусов как низкие, так и высокие температуры.

§ 4.3. Эмиссионные явления в металлах

Если сообщить электронам проводимости в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, они получают возможность покинуть металл. В результате наблюдается явление испускания электронов, или *электронная эмиссия*. В зависимости от того,

каким способом сообщают электронам энергию, различают разные типы электронной эмиссии. *Термоэлектронная эмиссия* возникает при нагревании тел, *фотоэлектронная эмиссия (внешний фотоэффект)* – под действием света, *вторичная электронная эмиссия* – при бомбардировке поверхности металлов пучком ускоренных электронов, *автоэлектронная эмиссия (холодная эмиссия)* – под действием сильного электрического поля.

Рассмотрим более подробно применение термоэлектронной эмиссии. Электроны, испускаемые нагретым телом, называют *термоэлектронами*, а само тело – *эмиттером*. При термоэлектронной эмиссии электроны вылетают за счет тепловой энергии. Число термоэлектронов зависит от свойств эмиттера и его температуры.

Явление термоэлектронной эмиссии лежит в основе работы электронных ламп, электронно-лучевых трубок и других приборов. Простейшей электронной лампой является *вакуумный диод*. Он представляет собой стеклянный (или металлический) баллон, в котором создан высокий вакуум. Внутри баллона размещены два электрода – *катод К* и *анод А*. Анод изготовлен из металлической пластины, катод – из тонкой металлической проволоки, свернутой в спираль. Катод изготавливают из тугоплавких металлов (вольфрам, молибден и др.) с возможно меньшей работой выхода электрона. Соединив выводы катода с источником тока, по нему пропускают электрический ток, который нагревает его до высокой температуры. Проволочную спираль, нагреваемую электрическим током, называют *нитью накала* лампы. На рис. 4.3 показано условное схематическое изображение диода в электрических схемах.

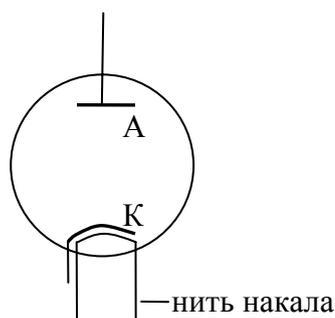


Рис. 4.3

Включив диод в электрическую цепь последовательно с источником постоянного тока и миллиамперметром (рис. 4.4), можно обнару-

жить основное свойство диода, используемое в различных радиоэлектронных приборах, – одностороннюю проводимость. При подключении источника положительным полюсом к аноду и отрицательным к катоду электроны, испускаемые нагретым катодом, двигаются под действием электрического поля к аноду – в цепи течет электрический ток, который называют *анодным током*. Если поменять полярность соединения источника тока, то электрическое поле в лампе препятствует движению электронов от катода к аноду – электрический ток в цепи отсутствует. Это свойство диода используют для выпрямления переменного тока, при котором напряжение между катодом и анодом (*анодное напряжение*) меняет знак.

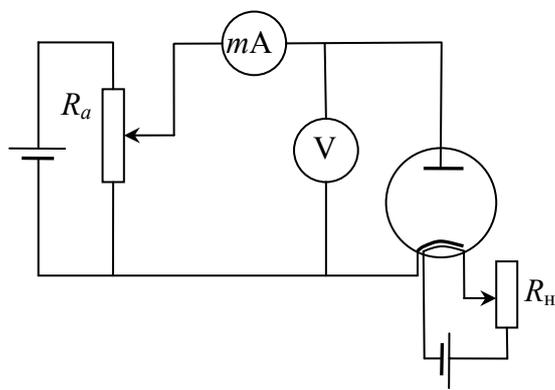


Рис. 4.4

Зависимость анодного тока I_a от приложенного к лампе анодного напряжения U_a (*вольт-амперная характеристика*) при различных значениях температуры катода показана на рис. 4.5.

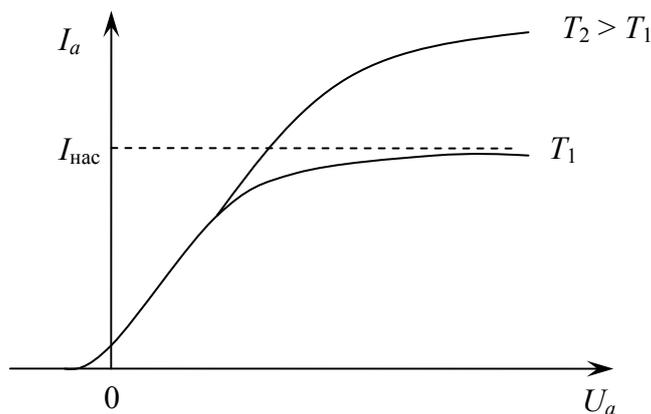


Рис. 4.5

Если анодное напряжение равно нулю, то небольшое число самых быстрых электронов, вылетевших из катода, все же достигает анода. Поэтому в лампе будет течь очень малый ток. При отрицательном анодном напряжении, когда полярность соединения источника тока изменена, ни один из электронов не достигает анода – тока через лампу нет (лампа «заперта»). С увеличением анодного напряжения ток через лампу растет, так как все больше электронов, вылетевших из катода, достигает анода. Зависимость анодного тока I_a от анодного напряжения в области малых значений U_a описывается *формулой Богуславского – Ленгмюра* («закон трех вторых»):

$$I_a = BU_a^{3/2}, \quad (4.10)$$

где B – коэффициент, зависящий от формы электродов и их взаимного расположения.

При дальнейшем росте анодного напряжения ток перестает изменяться, достигая некоторого максимального значения $I_{\text{нас}}$, называемого *током насыщения*. Это означает, что все электроны, вылетевшие с катода, достигают анода. Поэтому дальнейшее увеличение напряженности электрического поля в диоде не приводит к увеличению тока. Плотность тока насыщения находится по *формуле Ричардсона – Дешимана*:

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (4.11)$$

где C – постоянная, зависящая от материала катода и состояния его поверхности; T – температура катода; A – работа выхода электрона из металла; k – постоянная Больцмана.

Таким образом, вольт-амперная характеристика диода является нелинейной, а следовательно, диод представляет собой пример проводника, не подчиняющегося закону Ома. Для управления током в лампы вводят дополнительные электроды. В зависимости от общего числа электродов такие лампы называют *триодами* (анод, катод и управляющая сетка), *тетрадами* (анод, катод и две сетки), *пентодами* (анод, катод и три сетки) и т. д.

§ 4.4. Электрический ток в жидкостях

Чистые жидкости в основном являются плохими проводниками электричества. Это обусловлено тем, что они состоят из электрически

нейтральных атомов и молекул, движение которых не может осуществить электрический ток. Однако ряд жидкостей, таких как водные растворы неорганических кислот, солей и оснований, расплавы солей являются хорошими проводниками электрического тока. Это связано с тем, что молекулы растворенного или расплавленного вещества диссоциируют, т. е. распадаются на положительные и отрицательные ионы – молекулы, обладающие избытком или недостатком электронов по сравнению с соответствующими нейтральными молекулами. Диссоциация обусловлена действием растворителя или большой температуры в случае расплавов, которые ослабляют силы притяжения между отдельными частями молекулы вещества так, что энергии теплового движения ее атомов, оказывается достаточной для диссоциации этой молекулы. Ион с избытком электронов имеет отрицательный заряд и называется *анионом*. Ион с недостатком электронов имеет положительный заряд и называется *катионом*.

Упорядоченное движение ионов в жидкости (электрический ток) возникает под действием электрического поля, которое создается электродами, опущенными в жидкость и соединенными с разноименными полюсами источника тока (рис. 4.6). Положительный электрод называют анодом, а отрицательный – катодом. Электрическое поле разделяет существующие катионы и анионы и собирает их у катода и анода.

Таким образом, при прохождении электрического тока через растворы происходит разделение молекул растворенного или расплавленного вещества на составные части, которые выделяются на электродах. Это явление называется *электролизом*, а вещества, в которых электролиз происходит, называют *электролитами*.

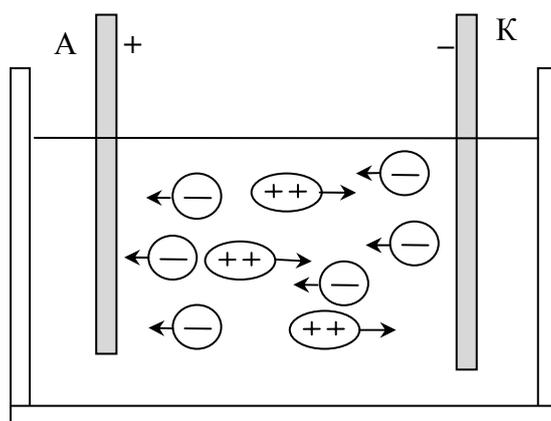
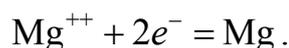


Рис. 4.6

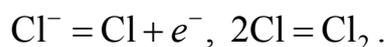
Например, молекула хлорида магния MgCl_2 в расплаве диссоциирует на ионы магния и хлора:



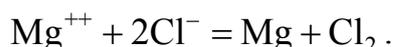
При прохождении электрического тока через расплав катионы магния под действием электрического поля двигаются к катоду, где они нейтрализуются электронами, приходящими из внешней цепи, и превращаются в нейтральные атомы магния:



Анионы хлора перемещаются к аноду и, отдавая избыточные электроны, превращаются в нейтральные атомы хлора, которые, затем соединяясь попарно, образуют молекулы хлора Cl_2 , выделяющиеся на аноде в виде пузырьков:



Таким образом, суммарное уравнение реакции, происходящей при электролизе расплава MgCl_2 , имеет вид



Эта реакция не может протекать самопроизвольно; энергия, необходимая для ее осуществления, поступает от внешнего источника тока. Электролиз расплава хлорида магния используют для промышленного получения металлического магния.

Основные законы *электролиза* были экспериментально установлены М. Фарадеем. Согласно *первому закону Фарадея*, масса m вещества, выделяющаяся на каком-либо из электродов, прямо пропорциональна заряду q , прошедшему через электролит:

$$m = Kq = Kit , \quad (4.12)$$

где $I = q / t$ – сила тока, протекающего через электролит за время t . Коэффициент K называется *электрохимическим эквивалентом вещества*. Он численно равен массе данного вещества, выделяемой при электролизе единичным зарядом. Коэффициент K зависит от химической природы вещества.

Каждый ион содержит целое число элементарных зарядов e , поэтому заряд иона по абсолютной величине $q_0 = Ze$, где Z – целое число, равное валентности соответствующего химического элемен-

та или соединения. Если на электроде выделилось N таких ионов, то их общий заряд NZe . Если эти ионы выделились на катоде, то их заряд нейтрализуется электронами, подтекающими к катоду по проводникам. Если же они выделяются на аноде, то такое же количество электронов по проводам утечет от анода. В обоих случаях через цепь пройдет количество электричества $q = NZe$. Масса выделившегося на электроде вещества равна массе всех ионов, пришедших к электроду:

$$m = m_0 N = m_0 \frac{q}{Ze} = \frac{m_0}{Ze} q, \quad (4.13)$$

где m_0 – масса одного иона.

Сравнивая (4.12) и (4.13), найдем выражение для электрохимического эквивалента вещества:

$$K = \frac{m_0}{Ze} = \frac{M}{ZeN_A}, \quad (4.14)$$

где $m_0 = M / N_A$; M – молярная масса вещества; N_A – число Авогадро.

Представим (4.14) в виде

$$K = \frac{1}{F} \frac{M}{Z}, \quad (4.15)$$

где постоянную $F = eN_A$ называют *числом Фарадея*. Формула (4.15) выражает *второй закон Фарадея*. Согласно этому закону, электрохимический эквивалент вещества K прямо пропорционален его *химическому эквиваленту*, равному отношению молярной массы вещества к его валентности.

Подставив (4.15) в (4.12), получим формулу, объединяющую оба закона Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{Z} q. \quad (4.16)$$

Из (4.16) следует физический смысл числа Фарадея. Оно равно заряду, который надо пропустить через электролит, чтобы на электроде выделилась масса, численно равная химическому эквиваленту вещества.

Явление электролиза находит широкое техническое применение.

1. *Очистка, или рафинирование, металлов.* Процесс происходит в электролитической ванне. Анодом служит металл, подлежащий очистке, катодом – тонкая пластинка из чистого металла, а электролитом – раствор соли данного металла, например, при рафинировании меди – раствор медного купороса. В загрязненных металлах могут содержаться различные примеси. Так, медные руды содержат сернистые соединения меди, ее окислы, а также примеси посторонних металлов (Ni, Pb, Sb и др.). Для того чтобы на катоде выделялся только чистый металл, необходимо учитывать, что выделение каждого вещества начинается лишь при некоторой определенной разности потенциалов между электродами, называемой «потенциалом разложения». При надлежащем ее выборе из раствора медного купороса на катоде выделяется чистая медь, а примеси выпадают в виде осадка или переходят в раствор.

2. *Электрометаллургия.* Получение металлов путем электролиза играет в современной цветной металлургии исключительно важную роль. Например, алюминий получают методом электролиза из расплавленной руды. Электролитической ванной и одновременно катодом служит железный ящик с угольным полом, а анодом – угольные стержни. Температура руды (около 900 С) поддерживается протекающим в ней током. Расплавленный алюминий опускается на дно ящика, откуда его через особое отверстие выпускают в формы для отливки.

3. *Гальваностегия* – электролитический способ покрытия металлических изделий слоем благородного или другого металла (золота, платины), не поддающегося окислению. Например, при никелировании предмета он сам служит катодом, кусок никеля – анодом. Пропуская через электролитическую ванну в течение некоторого времени электрический ток, покрывают предмет слоем никеля нужной толщины.

4. *Гальванопластика.* Это электролитическое осаждение металла на поверхности предмета для воспроизведения его формы. Она была изобретена в 1837 г. русским ученым Б. С. Якоби, предложившим использовать электролиз для получения металлических отпечатков рельефных предметов (медалей, монет и др.). С предмета снимают слепок из воска или вырезают выпуклое изображение на деревянной доске и делают его проводящим, покрывая слоем графита. Затем опускают слепок или доску в качестве катода в электролит. Анодом служит кусок металла, используемого для

осаждения. Этим способом изготавливают, например, типографские клише.

§ 4.5. Электрический ток в газах

Газы в нормальных условиях являются диэлектриками. Они состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных носителей тока. Проводниками тока газы становятся при их ионизации. *Ионизацией* называют процесс отделения электронов от молекул или атомов и присоединения их к другим нейтральным атомам или молекулам. Следовательно, носителями электрических зарядов в газах могут быть положительные и отрицательные ионы, а также свободные электроны.

В общем случае зависимость плотности тока в газе от напряженности приложенного к нему электрического поля является сложной нелинейной функцией, и закон Ома не выполняется. Это связано с тем, что в ионизованном газе число носителей тока – ионов и электронов – может изменяться в результате дополнительной ионизации газа электрон-атомными и электрон-молекулярными столкновениями, а также за счет *рекомбинации* ионов – воссоединения иона и электрона в нейтральную молекулу.

Прохождение электрического тока через газы называется *газовым разрядом*. Разряды, вызванные действием внешнего ионизатора, называются *несамостоятельными газовыми разрядами*. Ионизация может быть вызвана нагреванием тела (*термическая ионизация*), электромагнитным излучением (*фотоионизация*), бомбардировкой молекул (атомов) газа быстро движущимися электронами или ионами (*ударная ионизация*). Чтобы разряд был непрерывным, необходима постоянная работа ионизатора. В противном случае через некоторое время разряд затухает. Причиной затухания является рекомбинация ионов.

Пусть газ, находящийся между плоскими параллельными электродами (рис. 4.7), подвергается непрерывному постоянному по интенсивности воздействию какого-либо ионизатора (например, рентгеновских лучей). Действие ионизатора приводит к ионизации молекул газа. За единицу времени он создает определенное количество ионов. Некоторые из них рекомбинируют, встречаясь с электронами. При подаче разности потенциалов между электродами ионы в газе приходят в движение, замыкая электрическую цепь.

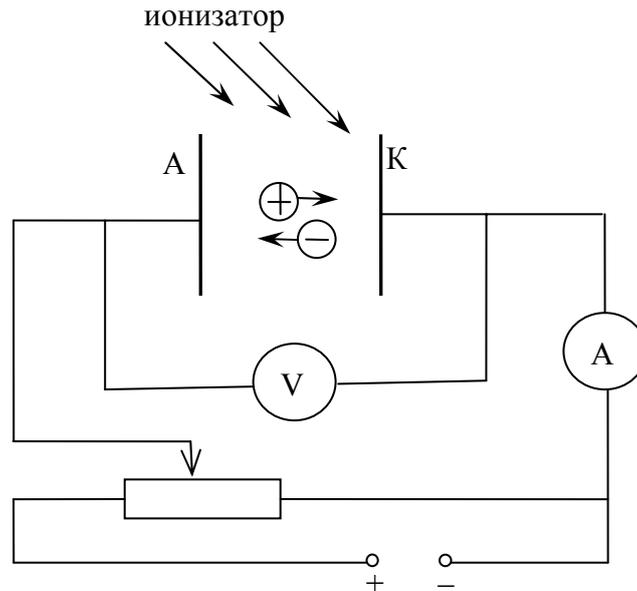


Рис. 4.7

Зависимость силы тока от приложенного к электродам напряжения показана на рис. 4.8. При небольших напряжениях часть образовавшихся ионов достигает электродов, образуя электрический ток. По мере увеличения приложенного напряжения все больше ионов достигает электродов, и сила тока возрастает почти линейно (участок от нуля до U_1). При напряжении U_2 ток достигает насыщения и не изменяется в области напряжений от U_2 до U_3 . При этом все имеющиеся ионы достигают электродов, и дальнейший рост напряжения не приводит к увеличению числа свободных зарядов, участвующих в токе. При $U > U_3$ ток снова начинает возрастать за счет появления в газе новых носителей тока. Это явление обусловлено возникновением *ударной ионизации*. При больших значениях напряжения электроны, возникающие в газе под действием внешнего ионизатора, настолько сильно ускоряются электрическим полем, что, сталкиваясь с молекулами газа, ионизируют их. При этом образуются вторичные электроны и ионы. Вторичные электроны также ускоряются электрическим полем и, в свою очередь, ионизируют новые молекулы газа. Таким образом, число носителей тока в газе и его проводимость сильно возрастают. Сила тока в газовом разряде увеличивается в сотни и тысячи раз, а в самом газе появляются сильные световые и тепловые эффекты. Ионы, необходимые для поддержания высокой электропроводности, создаются самим разрядом в результате внутренних процессов,

происходящих в газе. Если в этих условиях прекратить действие ионизатора, то газовый разряд будет продолжаться самопроизвольно. Газовый разряд, который продолжается после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным газовым разрядом*. Напряжение U_3 , при котором возникает самостоятельный разряд, называется *напряжением пробоя газа*.

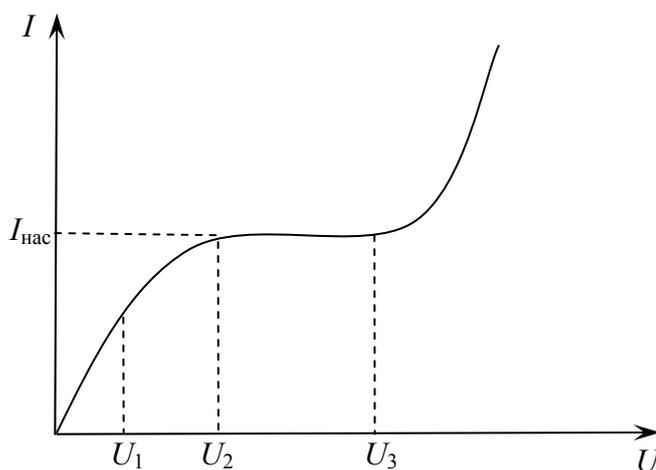


Рис. 4.8

В зависимости от процессов образования ионов в газовом разряде различают несколько типов самостоятельных разрядов: тлеющий, искровой, коронный, дуговой.

Тлеющий разряд — один из видов стационарного самостоятельного электрического разряда. Формируется при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 4.9). На электроды подается напряжение в несколько тысяч вольт. При атмосферном давлении газ внутри трубки остается темным, так как приложенного напряжения недостаточно для того, чтобы пробить длинный газовый промежуток. Однако если давление газа в трубке понизить примерно до 40 мм рт. ст., возникает разряд. Он имеет вид тонкого шнура, соединяющего оба электрода. При дальнейшем понижении давления светящийся шнур расширяется, и приблизительно при 5 мм рт. ст. свечение заполняет все сечение трубки. Цвет свечения зависит от газа, заполняющего трубку. Например, если в трубке воздух — свечение малинового цвета, неон — красно-оранжевого. На рис. 4.9 показаны основные области тлеющего разряда. Около катода располагается небольшая

темная область – *астоново темное пространство 1*. Далее располагается тонкий светящийся слой, называемый *катодной светящейся пленкой 2*, затем – слабосветящийся слой, по контрасту кажущийся темным и называемый *кружковым темным пространством 3*. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют *тлеющим свечением 4*. Все перечисленные выше слои образуют *катодную часть тлеющего разряда*. С тлеющим свечением граничит темный промежуток – *фарадеево темное пространство 5*. Граница между двумя последними областями размыта. Вся остальная часть трубки, вплоть до анода, заполнена светящимся газом. Это часть разряда носит название *положительного столба 6*. При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство расширяются, а положительный столб укорачивается. При определенном давлении положительный столб распадается на ряд чередующихся темных и светлых слоев – *страт*.

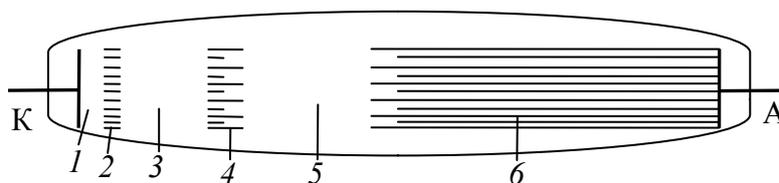


Рис. 4.9

При тлеющем разряде газ хорошо проводит электричество, а значит, в газе все время поддерживается сильная ионизация. Причиной ионизации молекул газа в тлеющем разряде является ударная ионизация электронами, которые появляются в газе вследствие электронной эмиссии с катода под действием высоких температур или сильного электрического поля, а также вследствие вторичной электронной эмиссии с катода, вызванной бомбардировкой катода положительно заряженными ионами газа. Свечение возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами и вследствие квантовых эффектов – переходов возбужденных атомов на нижележащие энергетические уровни, характеризующие возможные состояния атомов.

В настоящее время трубки с тлеющим разрядом находят практическое применение как источник света – газоразрядные лампы. Для освещения часто применяются люминесцентные лампы, в которых разряд происходит в парах ртути, причем вредное для зрения

ультрафиолетовое излучение поглощается слоем флюоресцирующего вещества – люминофора, покрывающего изнутри стенки лампы. Люминофор начинает светиться видимым светом, давая в результате свет, близкий по характеристикам к дневному свету. Однако люминесцентные лампы не лишены недостатков. Так, например, на производстве использование люминесцентных ламп сопряжено с вредным *стробоскопическим эффектом*, заключающемся в том, что мерцание лампы с частотой питающего напряжения может совпасть по частоте вращения с обрабатываемым механизмом, при этом сам механизм в свете такой лампы для человека будет казаться неподвижным, что может привести к травме.

Газоразрядные лампы применяются также для декоративных целей. В этом случае им придают форму различных фигур, букв и т. д. и наполняют газом с красивым цветом свечения (неоном или аргоном).

Искровой разряд возникает между двумя электродами (рис. 4.10) при постепенном увеличении напряжения между ними до значения, при котором напряженность электрического поля между электродами достигает пробивного для данного газа значения. Примером искрового разряда является молния. Напряжение между электродами (облаком и землей) перед возникновением молнии достигает 10^8 – 10^9 В. Напряженность электрического поля, необходимая для пробоя воздуха при нормальных условиях, равна $E_{пр} \approx 3 \cdot 10^6$ В/м.

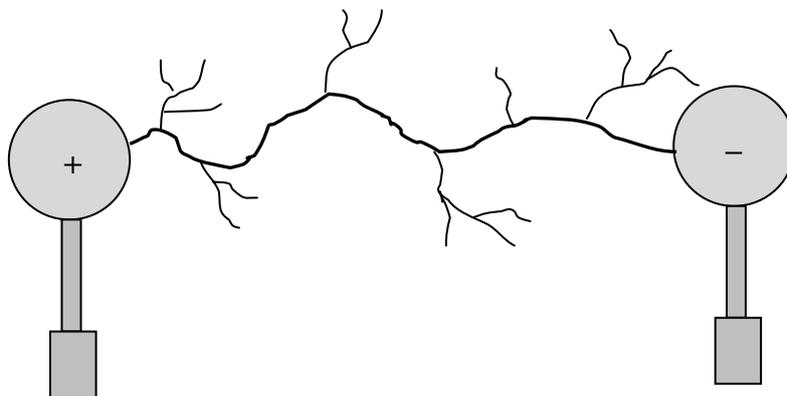


Рис. 4.10

Искровой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты и ярким свечением газа. При этом возникает изогнутый канал сильно ионизированного газа с множеством разветвлений, по которому и распространяется ток. Газ в канале сильно и быстро нагревается, его температура может достигать очень высоких темпера-

тур – до 10^4 К. Это приводит к резкому повышению давления и к возникновению ударных и звуковых волн при расширении газа. Поэтому искровой разряд сопровождается звуковыми явлениями – от слабого треска при искре малой мощности до раскатов грома, раздающихся вслед за молнией.

Качественное объяснение механизма искрового разряда дает *стримерная теория*. Согласно этой теории, электронная лавина, зародившаяся вблизи катода, ионизирует и возбуждает атомы и молекулы газа, которые испускают световые кванты, распространяющиеся к аноду. Эти кванты на своем пути ионизируют газ и порождают, таким образом, новую лавину электронов. Во всем объеме газа появляются *стримеры* – слабо светящиеся скопления ионизованного газа. Соединяясь, стримеры образуют пути, по которым движутся электронные лавины, нагоняя одна другую и сливаясь вместе. В конечном счете лавины образуют канал искрового разряда.

Искровой разряд применяется для искровой обработки металлов, зажигания горючей смеси в двигателе внутреннего сгорания, в бытовых «зажигалках».

Коронный разряд возникает при сравнительно высоком давлении, близком к атмосферному, в сильно неоднородном электрическом поле. Для получения таких полей один из электродов (или оба) должен иметь очень большую кривизну (например, электродом служит тонкая проволока или острие). Главной особенностью этого разряда является то, что ионизационные процессы происходят не по всей длине газового промежутка, а только в небольшой его части вблизи электрода с малым радиусом кривизны (так называемого *коронирующего электрода*). Именно эта зона характеризуется значительно более высокими значениями напряженности поля по сравнению со средними значениями для всего промежутка. Возникающее свечение имеет вид короны, окружающей электрод, чем и вызвано название этого разряда.

Коронные разряды встречаются в природе. Они возникают на вершинах деревьев, корабельных мачтах (огни святого Эльма) под влиянием атмосферного электричества. Коронные разряды являются источниками радиопомех. Возможность их возникновения необходимо учитывать в технике высокого напряжения. Например, на линиях электропередачи возникновение коронного разряда нежелательно, так как оно вызывает значительные потери передаваемой энергии. Коронный разряд используется в электрофильтрах, используемых для очистки промышленных газов от примесей твердых и

жидких частиц. Он применяется также в копировальных аппаратах (ксероксах) и лазерных принтерах для заряда светочувствительного барабана, переноса порошка с барабана на бумагу и для снятия остаточного заряда с барабана.

Дуговой разряд можно получить от источника низкого напряжения. Для этого электроды сближают до соприкосновения. В месте соприкосновения они сильно раскаляются электрическим током, после чего их разводят. Между электродами вспыхивает ослепительное свечение, имеющее форму дуги. Именно таким путем дуговой разряд был впервые получен в 1802 г. русским физиком В. В. Петровым. Данный разряд характеризуется большой силой тока (десятки и сотни ампер) и малым напряжением на разрядном промежутке между электродами (несколько десятков вольт). Наибольшую температуру при дуговом разряде имеет углубление (кратер дуги), образующееся на положительном электроде. Если электроды угольные, то при нормальном атмосферном давлении, температура кратера дуги достигает 4000°C , а при давлении, в двадцать раз больше, температура превышает 7000°C (больше температуры на внешней поверхности Солнца, равной приблизительно 6000°C). При использовании металлических электродов температура меньше – от 2000°C до 2500°C .

Дуговой разряд поддерживается за счет термоэлектронной эмиссии с раскаленной поверхности катода. Вылетевшие из катода электроны ускоряются электрическим полем и ионизируют молекулы газа при столкновении с ними. Кроме этого, имеет место термическая ионизация молекул, обусловленная высокой температурой газа. При этом сильно увеличивается проводимость газа и между электродами возникает столб светящегося газа.

Дуговые разряды нашли широкое применение в технике. Они используются при электросварке металлов, при выплавке стали (дуговая сталеплавильная печь), как мощный источник света (в дуговых лампах).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей. В 5 ч. Ч. 1. Механика / Д. В. Кленицкий; Белорусский государственный технологический университет. – Минск: БГТУ, 2010. – 128 с.

2. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей. В 5 ч. Ч. 2. Термодинамика. Молекулярная физика / Д. В. Кленицкий; Белорусский государственный технологический университет. – Минск: БГТУ, 2012. – 86 с.

3. Курс физики: В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм / А. А. Детлаф [и др.]. – М.: Высшая школа, 1977. – 376 с.

4. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1982. – 496 с.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Т. 3. Электричество / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – 687 с.

6. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М.: Высшая школа, 1991. – 289 с.

Учебное издание

Кленицкий Дмитрий Викентьевич

ФИЗИКА

В 5-ти частях

Часть 3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Тексты лекций

Редактор *Р. М. Рябая*

Компьютерная верстка *А. С. Аристова*

Корректор *Р. М. Рябая*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/227 от 20.03.2014.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.