Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В 2-х частях

Часть 2

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего
образования по техническим специальностям*

Минск 2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В93

Авторы:
В. М. Марченко, И. К. Асмыкович, И. М. Борковская, Н. В. Бочило, Ж. Н. Горбатович, В. В. Игнатенко, Е. И. Ловенецкая, О. Н. Пыжкова, И. Ф. Соловьева, А. А. Якименко, В. И. Янович, Л. Д. Яроцкая

Под редакцией *В. М. Марченко*

Рецензенты:
кафедра высшей математики Белорусского государственного университета (доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой *С. А. Мазаник*);
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного экономического университета *М. П. Дымков*

В93 **Высшая математика.** В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям / В. М. Марченко [и др.]; под ред. В. М. Марченко. – Минск : БГТУ, 2014. – 337 с.
ISBN 978-985-530-330-6.

Учебное пособие (часть 2) является продолжением ранее изданного учебного пособия (часть 1) и написано в соответствии с уровневой методологией преподавания математических дисциплин. Содержит основной теоретический материал по темам курса, не вошедшим в первую часть, образцы решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов, ответы. Теоретический и практический минимум – это минимальные требования к математическому образованию инженеров.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-530-330-6 (Ч. 2)
ISBN 978-985-530-041-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие представляет собой вторую часть теоретического и практического минимума годового курса по высшей математике для студентов технических специальностей Белорусского государственного технологического университета (БГТУ). Оно подготовлено в соответствии с уровневой технологией преподавания математических дисциплин, разрабатываемой и внедряемой на кафедре высшей математики БГТУ.

Изложение всех трех уровней А, Б, С в одном пособии существенно увеличивало бы его объем, к тому же наиболее востребованным студентами является уровень А. Поэтому издание материалов этого уровня – теоретического и практического минимума отдельным пособием представляется актуальным и своевременным. Его полное усвоение, на наш взгляд, дает основание для успешного продолжения обучения в последующем, при этом предполагается, что глубокое овладение основными понятиями и методами высшей математики позволит студентам освоить и те дополнительные ее разделы, которые могут им понадобиться в дальнейшем обучении.

Структурно учебное пособие организовано следующим образом: вначале излагаются основные теоретические сведения по данному разделу, затем примеры их применения при решении типовых задач, после чего предлагаются задания для самостоятельной работы, из которых выделяется обязательный аудиторный минимум.

В первую часть вошли следующие разделы курса: введение в математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Вторая часть содержит сведения о комплексных числах и различных их формах, дифференциальное исчисление функций многих переменных, теорию определенных, несобственных, кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, краткие сведения по теории поля. В нее также включена теория обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков и систем дифференциальных уравнений, методы решения линейных однородных и неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами, элементы теории числовых и функциональных рядов и их приложений, краткие сведения по теории вероятностей и математической статистике. Отдельно выделено применение метода наименьших квадратов для сглаживания экспериментальных зависимостей.

Глава 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1.1.1. Теоретический минимум

1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость

Под ***комплексными числами*** понимают упорядоченные пары $z=(x,y)$ действительных чисел x и y, над которыми можно производить следующие действия (операции):

– ***сложение*** z_1+z_2 и обратное сложению ***вычитание*** z_1-z_2:

$$z_1 \pm z_2 \overset{def}{=} (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2);$$

– ***умножение*** $z_1 z_2$:

$$z_1 z_2 \overset{def}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

– ***деление*** (как действие, обратное умножению):

$$z_1 : z_2 = z_1 \frac{1}{z_2} \overset{def}{=} \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Имеем: $(x_1, 0) \pm (x_2, 0) = (x_1 \pm x_2, 0)$; $(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$; $(x_1, 0):(x_2, 0) = \left(\dfrac{x_1}{x_2}, 0 \right)$, где $x_2 \neq 0$, что полностью отвечает соответствующим операциям над действительными числами. Поэтому комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляются с действительным числом x. Таким образом, $(x, 0) = x$ и множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел. Число вида $(1, 0) = 1$ называют ***действительной единицей***. Число вида $(0, 1) = i$ называют ***мнимой единицей***.

Пример. Найти i^2.

Решение. Нетрудно видеть, что $i^2 = (0,1)(0,1) = -1$.

Тогда $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)=x+iy$ и комплексные числа можно изображать как ***точки на плоскости*** – элементы двумерного векторного пространства, где роль базисных векторов играют действительная и мнимая единицы.

Таким образом, комплексное число z в ***алгебраической форме*** записывается в виде

$$\boxed{z=x+iy,}$$

где i – ***мнимая единица*** $(i^2=-1)$; $x=\mathrm{Re}\,z$ – ***действительная***; $y=\mathrm{Im}\,z$ – ***мнимая*** часть числа $z\in\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, его изображение – ***комплексная плоскость*** (рис. 1.1).

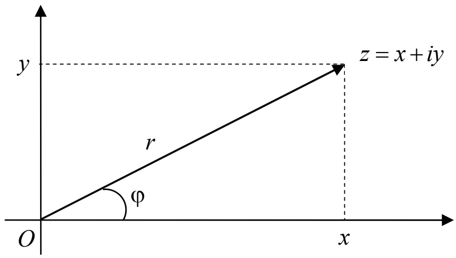


Рис. 1.1. Комплексная плоскость

Здесь ось абсцисс Ox – ***действительная ось*** изображает числа вида $x+i0=x$, отождествляемые с действительными, а ось ординат Oiy – ***мнимая ось*** изображает ***чисто мнимые числа***, т. е. числа вида $0+iy=iy$.

Два комплексных числа считаются ***равными*** тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части. Комплексные числа $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными***. На комплексной плоскости они располагаются симметрично относительно действительной оси.

Пример. Изобразить числа –2, i, $1+2i$, $-3+i$, $\overline{1+2i}$ на комплексной плоскости.

Решение. Поскольку $\overline{1+2i}=1-2i$, имеем рис. 1.2.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, ***вычитание*** и ***умножение*** комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производят по правилам сложения, вычитания и умножения алгебраических многочленов с учетом того, что $i^2=-1$.

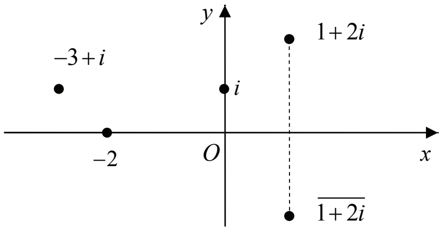


Рис. 1.2. Изображение чисел на комплексной плоскости

В частности, при сложении комплексных чисел в алгебраической форме их действительные и мнимые части складываются, при вычитании – вычитаются; умножение осуществляется следующим образом:

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)i+y_1y_2i^2=$$
$$=x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

Деление определяется как действие, обратное умножению. Поэтому при делении частное обычно представляют в виде дроби, затем числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю. При записи результата действий над комплексными числами следует отделить действительную часть от мнимой.

Основываясь на геометрической интерпретации, действия сложения и вычитания комплексных чисел в алгебраической форме можно осуществлять по правилам сложения и вычитания векторов – радиус-векторов точек, изображающих эти числа на комплексной плоскости.

Пример. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, $\dfrac{z_2}{z_1}$, если $z_1=3-2i$, $z_2=-1+4i$.

Решение. Имеем:

$$z_1+z_2=(3-2i)+(-1+4i)=(3-1)+i(-2+4)=2+2i;$$
$$z_1-z_2=(3-2i)-(-1+4i)=(3-(-1))+i(-2-4)=4-6i;$$
$$z_1z_2=(3-2i)(-1+4i)=-3+12i+2i-8i^2=-3+14i+8=5+14i;$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{-1+4i}{3-2i}=\frac{(-1+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-3-2i+12i-8}{9+4}=-\frac{11}{13}+\frac{10}{13}i.$$

1.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите комплексное число в алгебраической форме.

2. Что называют действительной (мнимой) частью комплексного числа?

3. Как изображают комплексные числа на плоскости?

4. Продемонстрируйте, как на комплексной плоскости изобразить действительные (чисто мнимые) числа.

5. Для всякого ли комплексного числа существует сопряженное?

6. Как выполнить арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме?

1.1.3. Практический минимум

1. Даны комплексные числа: $z_1 = -1$, $z_2 = \pi$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 3i - 3$, $z_5 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_6 = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Требуется:

а) найти действительную и мнимую части комплексных чисел $z_1, \dots, z_6$;

б) записать числа, сопряженные данным;

в) изобразить числа $z_1, \dots, z_6$ и им сопряженные $\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_6$ соответствующими точками на комплексной плоскости;

г) осуществить действия $z_1 - z_4 + z_5 + z_6$, $z_1^3 + z_3^3 + (2 - i)z_4$, $\dfrac{z_3}{z_4}$.

2. Для чисел $z_1 = 7 + 2i$, $z_2 = 1 - 4i$ выполнить указанные операции:

а) $z_1 + z_2$; б) $\overline{\overline{z}_1 - z_2}$; в) $z_1 z_2$; г) $\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}$; д) $\dfrac{z_1}{z_2}$; е) $z_1^2 - z_2^3$.

Найти действительные решения уравнений:

3. $(x - i)(2 - yi) = 11 - 23i$.

4. $(x + i)(2 + yi)i = -23 + 11i$.

5. Решить уравнение (во множестве комплексных чисел) $\dfrac{1 - 3i}{3z + 2i} = \dfrac{2i - 3}{5 - 2iz}$.

Изобразить на комплексной плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

6. $|z - 5 + 3i| > 2$. 7. $\operatorname{Re} z \le 0$. 8. $z \cdot \overline{z} < 2\operatorname{Re} z$.

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 6; 7.

1.1.4. Ответы

1. г) $3-3i$; $-4+17i$; $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$. **2.** а) $8-2i$; б) $6-2i$; в) $15-26i$; г) $\frac{66-246i}{901}$; д) $\frac{-1+30i}{17}$; е) $92-24i$. **3.** $(7,3)$; $\left(-\frac{3}{2},-14\right)$. **4.** $(7,3)$; $\left(-\frac{3}{2},-14\right)$. **5.** $-\frac{99+45i}{73}$. **6.** Внешность круга радиуса 2 с центром $(5,-3)$. **7.** Полуплоскость $x \le 0$. **8.** Внутренность круга радиуса 1 с центром (1, 0).

1.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМАХ

1.2.1. Теоретический минимум

1. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Эйлера.
2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
3. Извлечение корней из комплексных чисел.

Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Эйлера

Число $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ называется ***модулем***, а число $\varphi \in \mathbb{R}$ (такое, что $\cos\varphi=\frac{x}{r}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r}$) – ***аргументом*** комплексного числа $z=x+iy$ (см. рис. 1.1 на с. 5). Если при этом $0 \le \varphi < 2\pi$, то такое значение $(\arg z)$ аргумента будем называть ***главным***. Отсюда $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, что приводит к ***тригонометрической форме*** комплексного числа:

$$\boxed{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).}$$

С помощью ***формулы Эйлера***

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

можно перейти от тригонометрической формы к ***показательной***:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}.}$$

Нетрудно видеть, что комплексные числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на период, т. е. число, кратное 2π.

Пример. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = \sqrt{3} - i$.

Решение. Применяя формулы, находим $r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$, откуда главное значение $\varphi = \dfrac{11}{6}\pi$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $z = 2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi + i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$, а показательная – $z = 2e^{i\frac{11}{6}\pi}$.

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 z_2 = \left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]\left[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ r_2 > 0.$$

При возведении в степень имеет место формула Муавра:

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{N}.$$

Пример. Выполнить действия $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^4 над комплексными числами в тригонометрической форме, если $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -1 + i$.

Решение. Поскольку $z_1 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ (см. выше), запишем в тригонометрической форме число z_2. Имеем $|z_2| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда главное значение $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Следовательно, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$.

Применяя формулы умножения, деления и возведения в степень, получим:

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{3}{4}\pi\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{31}{12}\pi + i\sin\frac{31}{12}\pi\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{3}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right),$$

$$z_1^4 = 2^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right)\right) = 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -8 - 8\sqrt{3}i.$$

Извлечение корней из комплексных чисел

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется любое комплексное число u такое, что

$$u^n = z.$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ описывается формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \{z_0, ..., z_{n-1}\},$$

где

$$\boxed{\begin{gathered} z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \\ k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n \in \mathbb{N}. \end{gathered}}$$

Таким образом, корень n-й степени из комплексного числа (не равного нулю) имеет ровно n различных значений, которые лежат на окружности $|z| = \sqrt[n]{r}$ в комплексной плоскости.

Пример. Извлечь корни 3-й степени из комплексного числа $z=\sqrt{3}-i$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{11}{6}\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{11}{6}\pi+2\pi k}{3}\right),$$

где $k=0,\ 1,\ 2$. Отсюда

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{18}\pi+i\sin\frac{11}{18}\pi\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{23}{18}\pi+i\sin\frac{23}{18}\pi\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{35}{18}\pi+i\sin\frac{35}{18}\pi\right).$$

Значения $\left(\sqrt[3]{z}\right)_0$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_2$ на комплексной плоскости изображаются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[3]{2}$ с центром в начале координат.

1.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется модулем и аргументом (главным значением аргумента) комплексного числа?
2. Как от алгебраической формы комплексного числа перейти к тригонометрической? А наоборот?
3. Поясните, как записать комплексное число в показательной форме.
4. Как умножить и разделить два комплексных числа в тригонометрической форме?
5. Расскажите, как возвести в натуральную степень комплексное число в тригонометрической форме.
6. Сколько значений имеет корень *n*-й степени из комплексного числа? Запишите формулу.

1.2.3. Практический минимум

Для заданных комплексных чисел требуется:

а) найти модули и аргументы комплексных чисел $z_1, ..., z_6$;

б) записать эти числа в тригонометрической и показательной формах;

в) осуществить действия $z_4 z_5,\ \dfrac{z_6}{z_4},\ z_5^{14},\ \sqrt{z_3},\ \sqrt[4]{z_5^{12}}.$

1. $z_1 = -1,\quad z_2 = \pi,\quad z_3 = -2i,\quad z_4 = 3i - 3,\quad z_5 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2},\quad z_6 = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}.$

2. $z_1 = 8,\quad z_2 = -e,\quad z_3 = 4i,\quad z_4 = 1 + i,\quad z_5 = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2},\quad z_6 = -\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}.$

Числа z_1 и z_2 представить в тригонометрической форме и выполнить указанные над ними действия:

3. $z_1 z_2,\ \dfrac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i,\ z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i.$

4. $z_1^2 \cdot \overline{z}_2,\ \dfrac{\overline{z}_2}{z_1}$, если $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i.$

Представить в тригонометрической форме следующие числа:

5. $2\sqrt{3} + 2i.$ 6. $5 + 2i.$ 7. $\sin\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3}$

Вычислить и записать результат в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

8. $(1+i)^{22}\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{10}}{(1-\sqrt{3}\,i)^6}.$ 9. $\dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^{50}}{(-1-i)^6}.$

10. Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2, 3 и 4-й степени из единицы.

Во множестве комплексных чисел рассчитать все значения корней, используя а) тригонометрическую форму; б) определение:

11. $\sqrt{-i}.$ 12. $\sqrt[3]{27}.$ 13. $\sqrt[3]{-125}.$

Решить уравнения (во множестве комплексных чисел):

14. $x^2 - 2x + 26 = 0.$ 15. $z^3 + 125 = 0.$

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 5; 14.

1.2.4. Ответы

1. в) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$; $\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\{-1+i,\ 1-i\}$; $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$. **2.** в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\{\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$; $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$. **3.** $-24i$; $\frac{8}{3}$. **4.** $8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i$; $-2i$. **5.** $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. **6.** $\sqrt{29}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5}\right)\right)$. **7.** $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$. **8.** $-32 = 32\times$ $\times(\cos\pi + i\sin\pi) = 32e^{i\pi}$. **9.** $2^{46}\left(\sqrt{3} + i\right) = 2^{47}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^{47}e^{\frac{\pi}{6}i}$.

10. $\sqrt{1} = \{1, -1\}$; $\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$; $\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$.

11. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. **12.** 3; $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

13. $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$; -5; $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$. **14.** $1 \pm 5i$. **15.** -5; $\frac{5}{2} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

Глава 2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1.1. Теоретический минимум

1. Определение функции нескольких переменных. Область определения и область изменения функции.
2. График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.
3. Предел функции двух переменных.
4. Непрерывность функции двух переменных.

Определение функции нескольких переменных. Область определения и область изменения функции

Переменная z (с областью изменения Z) называется ***функцией независимых переменных x и y*** в области D, если каждой паре (x, y) их значений из D по некоторому закону (правилу f) соответствует одно определенное значение z (из Z), что обозначается следующим образом: $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Переменные x и y называются аргументами функции z, область D – областью определения функции. Если функция $z = z(x, y)$ задана только формулой, то в качестве ее области определения рассматривается естественная ***область определения*** функции – множество точек (x, y) плоскости Oxy, при которых выражение $z(x, y)$ имеет смысл.

Переменная u называется функцией переменных $x_1, ..., x_n$, если каждому набору этих переменных по некоторому правилу соответствует единственное значение переменной u: $u = u(x_1, ..., x_n)$.

График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня

Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x, y, z(x, y))$ при всех $(x, y) \in D$ называется ***графиком функции*** $z = z(x, y)$. График функции $z = z(x, y)$, как правило, является ***поверхностью*** в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Множество точек области D, в которых функция $z(x, y)$ принимает заданное значение c, называется ***линией уровня*** функции и задается уравнением $z = z(x, y) \equiv \text{const} = c$.

Множество точек пространства, в которых функция $u = u(x, y, z) \equiv \text{const} = c$, называется ***поверхностью уровня*** этой функции.

Пример. Найти область определения и линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Выражение справа имеет смысл при всех x и y, значит, областью определения функции будет вся плоскость Oxy.

На линии уровня $z = x^2 + y^2 = c$ и $c \geq 0$, следовательно, линии уровня – концентрические окружности радиуса $\sqrt{c}$ с центром в начале координат. Графиком функции является параболоид вращения.

Предел функции двух переменных

Окрестностью $\mathbf{O}_r$ ***радиуса r*** (r-окрестностью) точки $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ называется совокупность всех точек $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, т. е. совокупность всех точек $M(x, y)$ на плоскости Oxy, лежащих внутри круга радиуса $r > 0$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\mathrm{O}_r(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 : |MM_0| < r\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

Если из круга удалить точку M_0, то окрестность называется проколотой и обозначается $\hat{\mathrm{O}}_r(M_0)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки M_0. Тогда число A (конечное или бесконечное) называется ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r = r(\varepsilon) > 0$, что $f(x, y) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$ для всех $M \in \hat{\mathrm{O}}_r(M_0)$.

В частности, число $A \in \mathbb{R}$ называется ***конечным пределом*** функции $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого положительного ε) найдется такое число $r = r(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, отличных от $M_0(x_0, y_0)$ и отстоящих от $M_0(x_0, y_0)$ меньше, чем на r, имеет место неравенство

$$| f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Обозначения: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Нетрудно видеть, что если предел существует, то он единственный.

При вычислении пределов используются известные теоремы о пределах. Если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$, то

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B;\ 2)\ \lim\limits_{M \to M_0} (f(M)g(M)) = AB; \\ 3)\ \lim\limits_{M \to M_0} (f(M)/g(M)) = A/B\ (B \neq 0);\ 4)\ \lim\limits_{M \to M_0} \left(f(M)\right)^{g(M)} = A^B\ (A > 0). \end{array}}$$

Определенный выше предел называется ***двойным пределом*** в отличие от так называемых ***повторных пределов***:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y),\ \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \dfrac{\sin(x + y - 2)}{(x + y)^2 - 4}$.

Решение. Будем использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ при $\alpha = x + y - 2$, стремящемся к нулю при $x \to 1, y \to 1$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \dfrac{\sin(x + y - 2)}{(x + y - 2)(x + y + 2)} = \dfrac{1}{4}$.

Пример. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x - y}{x + 2y}$ не существует.

Решение. Исследуемая функция рассматривается в некоторой проколотой окрестности точки (0, 0). Поэтому $(x, y) \to (0, 0)$, но $x + 2y \neq 0$ в этой окрестности. Рассмотрим теперь приближение $M(x, y)$ к (0, 0), например, вдоль прямых $y = kx$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{2x - y}{x + 2y} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - kx}{x + 2kx} = \frac{2 - k}{1 + 2k}$$

и предел зависит от k, что противоречит его единственности. Полученное противоречие означает, что двойной предел не существует, в то время как повторные пределы существуют:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{x+2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{2y}=-\frac{1}{2}.$$

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** (по совокупности переменных x и y) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ($M \to M_0$ произвольным образом, оставаясь в окрестности точки M_0).

Другими словами, функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в этой области*** (в случае граничных точек имеет место соответствующая односторонняя непрерывность (изнутри)).

Если функция определена в некоторой проколотой окрестности точки M_0, но не определена в самой точке M_0 или $\lim\limits_{M\to M_0} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$, то точка M_0 называется ***точкой разрыва***.

Точки разрыва функции $z = f(x, y)$ могут образовывать целые линии разрыва.

Отметим также, что непрерывность функции по одной переменной при фиксированном значении другой (других) переменной называется ***непрерывностью функции по этой переменной***.

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 по совокупности переменных, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$, и, таким образом, функция в этой точке непрерывна по каждой переменной (в отдельности).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример. Исследовать точки разрыва функции $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Решение. Данная функция имеет единственную точку разрыва $O(0, 0)$. В этой точке функция не определена и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = +\infty$. По аналогии с функцией одной переменной имеем дело с точкой бесконечного разрыва. В остальных точках функция непрерывна.

2.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение функции двух и большего числа переменных. Приведите примеры функций двух и трех переменных.

2. Что называется областью определения, графиком функции двух переменных? Приведите примеры графиков функций двух переменных.

3. Дайте определение линии уровня.

4. Что называется окрестностью, проколотой окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$?

5. Дайте определение конечного предела в точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции двух переменных.

6. При каких условиях функция $z = f(x, y)$ будет непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$?

7. Какая точка называется точкой разрыва?

2.1.3. Практический минимум

1. Дано: $f(x, y) = x + \dfrac{1}{y}$. Найти $f(-2;\ 0{,}5)$ и показать, что $f(x, y) = f\left(\dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{x}\right)$.

2. Показать, что $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z) = f\left(1, \dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$, если $f(x, y, z) = \dfrac{x-y}{y-z}$.

3. Выразить объем V конуса как функцию его образующей l и высоты h. Указать область определения этой функции.

4. Выразить длину хорды окружности как функцию радиуса r и центрального угла α. Найти область определения этой функции.

5. Найти и изобразить области определения функций:

а) $z = \dfrac{1}{x-y}$; б) $z = \ln(-x-y)$; в) $z = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{9-y^2}$;

г) $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$; д) $z = \ln xy$, $z = \ln x + \ln y$; е) $z = \ln(x^2+y)$;

ж) $z = \sqrt{(x^2-1)(4-y^2)}$.

6. Найти линии уровня следующих функций:

а) $z = xy$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = (x + y)^2$;

г) $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$; д) $z = x^2 + y^2$; е) $z = x\sqrt{y - 1}$

и построить линию уровня, проходящую через точку (1, 5).

7. Исследовать методом сечений характер поверхностей (графиков функций):

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$; в) $z^2 = x^2 + y^2$.

8. Привести пример функций двух переменных, имеющих следующие области определения:

а) вся плоскость, кроме точек на осях координат;

б) вся плоскость, кроме точек окружности $x^2 + y^2 = 3$;

в) точки круга радиуса 2, кроме точек окружности радиуса 2.

9. Привести пример функции двух переменных, имеющей областью определения часть плоскости, заключенную между параболами $y = x^2$ и $x = y^2$ (включая границы).

10. Подобрать аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$ так, чтобы областью определения этой функции была плоскость, из которой выброшена парабола $x^2 = 2y$ и прямая $x = -2$.

11. Используя определение, показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x + 2y) = 7$.

12. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x + y)\cos\dfrac{1}{x - y}$.

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 5. б), в), ж), з); 6. б), г); 7. г); 8. а), в); 11; 12. а), б), в), е).

2.1.4. Ответы

3. $V = \dfrac{\pi}{3}h(l^2 - h^2)$; $0 < h < l$, $0 < l < +\infty$. **4.** $l = 2r\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $0 < r < +\infty$, $0 \le \alpha \le \pi$. **5.** а) все точки плоскости, кроме точек прямой $x = y$; б) полуплоскость $x + y < 0$; в) две полуполосы: $x \le -3$, $-3 \le y \le 3$ и $x \ge 3$, $-3 \le y \le 3$; г) область определения ограничена правой ветвью параболы $y = x^2$ и полуосью $x \ge 0$; д) первый и третий квадранты, исключая точки осей координат; первый квадрант, исключая точки осей координат; е) часть плоскости, расположенная выше параболы $y = -x^2$, исключая точки самой параболы; ж) две полуполосы $|x| \le 1$, $|y| \ge 2$ и две полуполосы $|x| \ge 1$, $|y| \le 2$. **6.** а) равносторонние гиперболы $xy = C$; б) гиперболы $x^2 - y^2 = C$; в) параллельные прямые $x + y = C$; г) семейство подобных эллипсов $x^2 + 2y^2 = C$, $C > 0$; д) окружности $x^2 + y^2 = C$; е) кривые $y = \dfrac{c^2}{x^2} + 1$. **7.** а) параболоид вращения; б) эллиптический параболоид; в) коническая поверхность. **8.** а) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; б) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 3}$; в) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

9. $z = \sqrt{x - y^2} + \sqrt{y - x^2}$. **10.** $z = \dfrac{1}{(x+2)(x^2 - 2y)}$. **12.** а) 2; б) 2; в) 0.

2.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2.2.1. Теоретический минимум

1. Частные производные первого порядка.
2. Условия дифференцируемости функции двух переменных.
3. Полный дифференциал функции двух переменных.
4. Линеаризация функций.

Частные производные первого порядка

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Будем изменять x, считая $y = y_0$. Тогда $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \Delta_x z$ называется ***частным приращением z по x***. Аналогично при $x = x_0$ имеем: $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ – ***частное приращение z по y***.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$, соответствующим приращениям Δx и Δy аргументов x и y, называется разность

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).}$$

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x или y называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению переменной при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$\boxed{z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},\ z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.}$$

Используются обозначения: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, f'_x, z'_x$ и аналогичные обозначения для переменной y.

При дифференцировании по x переменная y зафиксирована (считается постоянной); при дифференцировании по y переменная x считается постоянной.

Если находится частная производная функции $u = u(x_1, ..., x_n)$ по некоторой переменной, то все остальные переменные рассматриваются как постоянные.

Условия дифференцируемости функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и ее полное приращение можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y$, где величины A и B не зависят от Δx и Δy, и γ_1, γ_2 стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

***Необходимые условия дифференцируемости*:**

1) если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке по совокупности переменных;

2) если функция дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные z'_x и z'_y.

***Достаточное условие дифференцируемости*:** если в точке $M_0(x_0, y_0)$ существуют непрерывные частные производные по x и по y, то функция дифференцируема в этой точке.

Пример. Найти частные приращения и полное приращение функции $z = xy$.

Решение. Используя формулы $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, получаем $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$, $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$. Полное приращение $\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$.

При $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$ имеем $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$.

В данном случае полное приращение не равно сумме частных приращений.

Пример. Дана функция $z = y^3x^5 + \sin xy$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. При дифференцировании по x переменная y рассматривается как постоянная, поэтому $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^3x^4 + y\cos xy$. При дифференцировании по y переменная x рассматривается как постоянная, поэтому $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2x^5 + x\cos xy$.

Полный дифференциал функции двух переменных

Главная часть $A\Delta x + B\Delta y$ полного приращения Δz, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** dz функции $z = f(x, y)$ в точке M_0:

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy,}$$

причем $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ для независимых переменных x и y.

Обозначения: $z'_x dx = d_x z$, $z'_y dy = d_y z$ – частные дифференциалы функции. Тогда $dz = d_x z + d_y z$.

Линеаризация функций

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ приращение Δz и дифференциал dz мало отличаются друг от друга, т. е. $dz \approx \Delta z$. Это приближенное равенство можно записать в виде

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

что означает ***линеаризацию*** функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (здесь $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$), т. е. в этой окрестности функцию заменяем ее линейным приближением.

Пример. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = xy$ в точке (2, 3) при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Полное приращение $\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$.

Следовательно, $\Delta z = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}72$; $dz = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}7$.

Пример. Вычислить приближенно $1{,}05^{3{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^y$ и применим формулу линеаризации при $x = 1$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}02$. Известно, что $f(1, 4) = 1$, $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$, $f'_x(1, 4) = 4$, $f'_y(1, 4) = 0$, $df(1, 4) = 4 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot (-0{,}02) = 0{,}2$. Таким образом, $1{,}05^{3{,}98} \approx 1 + 0{,}2 = 1{,}2$.

2.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения частных приращений и полного приращения функции двух переменных. Верно ли равенство $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z$?

2. Что называется частной производной первого порядка функции двух переменных?

3. Перечислите правила нахождения частных производных.

4. Сформулируйте необходимые и достаточное условия дифференцируемости функции двух переменных.

5. Дайте определение полного дифференциала функции двух переменных и запишите формулу для нахождения dz.

6. Как связаны частные дифференциалы и полный дифференциал функции двух переменных?

7. В чем заключается смысл линеаризации функции?

2.2.3. Практический минимум

1. Найти частные приращения и полное приращение функции:

а) $z = xy^2$ в точке $M(2, 1)$ при $\Delta x = -0{,}2$ и $\Delta y = 0{,}1$;

б) $z = \dfrac{x}{y}$ в точке $M(3, -2)$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

2. Вычислить частные производные первого порядка функций:

а) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y^2}$; в) $z = \ln(x^2 + 5y^4)$;

г) $u = \sqrt{x + y^3 + 2z^6}$; д) $z = \sqrt{x^3 + 3^{xy}}$.

3. Показать, что:

а) $3yz'_x - xz'_y = 0$, если $z = \sin(x^2 + 3y^2)$;

б) $xz'_x + yz'_y = xy + z$, если $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.

4. Найти полный дифференциал функций:

а) $z = yx^{3y}$; б) $z = e^{\operatorname{arctg}\left(x^3 - \frac{x}{y}\right)}$; в) $u = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$.

5. Найти Δz и dz для функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(3, 4)$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = 0{,}2$.

6. Вычислить приближенно, используя формулу линеаризации (заменяя приращение функции дифференциалом):

а) $\sin 28° \cos 61°$; б) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

Минимум для аудиторной работы

1. а); 2. а), б), в), г); 3. а); 5; 6. а).

2.2.4. Ответы

1. а) $\Delta_x z = -0{,}2$; $\Delta_y z = 0{,}42$; $\Delta z = 0{,}178$; б) $\Delta_x z = -0{,}05$; $\Delta_y z \approx 0{,}037$; $\Delta z \approx -0{,}012$. **2.** а) $z'_x = 3x^2 + 6xy$; $z'_y = 3x^2 - 3y^2$; б) $z'_x = \dfrac{y^2}{x^2+y^4}$; $z'_y = -\dfrac{2yx}{x^2+y^4}$; в) $z'_x = \dfrac{2x}{x^2+5y^4}$; $z'_y = \dfrac{20y^3}{x^2+5y^4}$; г) $u'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y^3+2z^6}}$; $u'_y = \dfrac{3y^2}{2\sqrt{x+y^3+2z^6}}$; $u'_z = \dfrac{6z^5}{\sqrt{x+y^3+2z^6}}$; д) $z'_x = \dfrac{3x^2 + y\cdot 3^{xy}\ln 3}{2\sqrt{x^3+3^{xy}}}$; $z'_y = \dfrac{x\cdot 3^{xy}\ln 3}{2\sqrt{x^3+3^{xy}}}$. **4.** а) $dz = 3y^2x^{3y-1}dx + x^{3y}(1 + 3y\ln x)dy$; б) $du = \sin 2x dx + \sin 2y dy + \sin 2z dz$. **5.** $\Delta z \approx 0{,}22015$, $dz = 0{,}22$. **6.** а) 0,227; б) 2,95.

2.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.3.1. Теоретический минимум

1. Дифференцирование функций вида $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ (случай одной независимой переменной).
2. Дифференцирование функций вида $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (случай нескольких независимых переменных).
3. Дифференциал сложной функции.
4. Дифференцирование неявной функции одной переменной.
5. Дифференцирование неявной функции двух переменных.
6. Производные высших порядков.
7. Понятие о дифференциалах высших порядков.

Случай одной независимой переменной

Пусть $z = z(x, y)$ – дифференцируемая функция двух переменных в области D, а $x = x(t)$, $y = y(t)$ – дифференцируемые функции переменной t в некотором промежутке, и при изменении t точка (x, y) не выходит за пределы D. Тогда $z = z(x(t), y(t))$ является функцией t и

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$ – ***полная производная z по t***.

Если $z = z(x, y)$ и $y = y(x)$, то

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$ – ***полная производная z по x***.

Пример. Найти производную $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^3y^5$, $x = \sin 2t$, $y = \cos 3t$.

Решение. Непосредственная подстановка не упрощает функцию, и поэтому действуем по первой формуле: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4x^3$, $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$, $\frac{dy}{dt} = -3\sin 3t$. В результате можно сохранить переменные x и y, или заменить их через t (как проще): $\frac{dz}{dt} = 3y^5x^2 \cdot 2\cos 2t + 5y^4x^3\times$ $\times(-3\sin 3t) = 6y^5x^2\cos 2t - 15y^4x^3\sin 3t.$

Случай нескольких независимых переменных

Пусть $z = z(x, y)$ и $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда имеют место следующие формулы:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}} \text{ и } \boxed{\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.}$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Пример. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^3y^5$, $x = u + \sin 2v$, $y = u\cos 3v$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4x^3$, $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 2\cos 2v$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \cos 3v$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -3u\sin 3v$.

В результате можно сохранить переменные x и y, или выразить их через u и v: $\frac{\partial z}{\partial u} = 3y^5x^2 + 5y^4x^3\cos 3v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 3y^5x^2 \cdot 2\cos 2v + 5y^4x^3 \cdot (-3u\sin 3v) = 6y^5x^2\cos 2v - 15y^4x^3u\sin 3v$.

Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ можно получить, если в формуле $dz = z'_x dx + z'_y dy$ заменить dx и dy:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \ \ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Тогда

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.}$$

Таким образом, форма дифференциала первого порядка не зависит от того, будут ли аргументы функции независимыми переменными или функциями других переменных. Это свойство называется свойством ***инвариантности*** формы первого дифференциала.

Пример. Найти дифференциал dz функции $z = x^3y^5$, $x = u + \sin 2v$, $y = u\cos 3v$.

Решение. По формуле дифференциала сложной функции, используя результаты предыдущего примера, получаем: $dz = (3y^5x^2 + 5y^4x^3\cos 3v)du + (6y^5x^2\cos 2v - 15y^4x^3u\sin 3v)dv$.

Подстановка x и y не улучшает структуры ответа.

Дифференцирование неявной функции одной переменной

Пусть функция $y = y(x)$ определяется уравнением $F(x, y) = 0$, неразрешенным относительно y, и $F(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в области, содержащей точку (x, y), которая удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, причем $F'_y(x, y) \neq 0.$ Тогда

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.}$$

Пример. Найти производную неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^3y - y^3x = 2$.

Решение. Обозначим $F(x, y) = x^3y - y^3x - 2$. Тогда $F'_x(x, y) = 3x^2y - y^3$, $F'_y(x, y) = x^3 - 3y^2x$ и $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3yx^2 - y^3}{x^3 - 3xy^2}.$

Дифференцирование неявной функции двух переменных

Пусть функция $z = z(x, y)$ определяется уравнением $F(x, y, z) = 0$, неразрешенным относительно z, и $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, причем $F'_z(x,y,z) \neq 0$. Тогда

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}} \text{ и } \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.}$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $z^3 + xz + xy - 2x = 0$.

Решение. Обозначим $F(x, y, z) = z^3 + xz + xy - 2x$. Вычислим частные производные функции $F(x, y, z)$: $F'_x = z + y - 2$, $F'_y = x$, $F'_z = 3z^2 + x$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z+y-2}{3z^2+x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{3z^2+x}$.

Производные высших порядков

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ являются дифференцируемыми функциями, то их производные по x или y будут частными производными второго порядка.

Приняты следующие обозначения: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по x, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – смешанные производные второго порядка, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по y. Используются также обозначения: $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и других порядков. Частные производные высшего порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$: сначала функцию дифференцируем по x, а результат дифференцируем 2 раза по y.

Если смешанные частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то они равны, т. е. не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

или

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Понятие о дифференциалах высших порядков

Выражение $d^2z = d(dz) = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$ называется дифференциалом второго порядка.

Выражение $d(d^{n-1}z) = d^n z$ называется дифференциалом n-го порядка. В случае независимых переменных x и y дифференциал $d^n z$ символически можно записать в виде выражения $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n (z)$, которое понимается следующим образом: сначала формально возводим в степень n, затем все члены «умножаем» (точнее применяем операторы дифференцирования) на z, которое пишется в числитель при ∂^n, после чего всем символам возвращается их смысл как производных и дифференциалов. Например,

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 (z) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2\right)(z) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

В общем случае (зависимых переменных x и y) дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

Пример. Найти d^2z для функции $z = x^3y^5$.

Решение. Используем приведенную выше формулу, найдя предварительно производные второго порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4x^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^5x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 15y^4x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20y^3x^3$, тогда $d^2z = 6y^5x\,dx^2 + 30y^4x^2dxdy + 20y^3x^3dy^2$.

2.3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулы для полных производных при дифференцировании сложных функций двух переменных вида $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ и вида $z = z(x, y)$, $y = y(x)$.

2. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции двух переменных вида $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Запишите соответствующие формулы.

3. Приведите формулы для частных производных функции $z = z(x, y)$ в случае неявного задания функции.

4. Поясните, как определяются частные производные второго порядка функции $z = z(x, y)$ и как они обозначаются. Сколько существует частных производных второго порядка?

5. Каким свойством обладают смешанные частные производные?

6. Как найти дифференциал второго порядка функции $z = z(x, y)$?

2.3.3. Практический минимум

1. Рассчитать полную производную:

а) $z = x^2 + xy^2$, $x = e^{2t}$, $y = \sin t$; б) $z = e^{xy}\ln(x + y)$, $x = 2t^2$, $y = 1 - 2t^2$;

в) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, $y = e^{(1+x)^2}$; г) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \cos v$, $y = \sin v$.

2. Вычислить частные производные z'_x и z'_y:

а) $z = \cos uv$, $u = xe^y$, $v = y\ln x$; б) $z = \sqrt{\dfrac{1+u}{1+v}}$, $u = -\cos x$, $v = \cos y$;

в) $z = u^3 + v^3$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$; г) $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$.

3. Введя промежуточные аргументы, найти z'_x и z'_y: $z = \dfrac{x + y + xy}{x^2 + y^2}$.

4. Определить частные производные z'_u и z'_v, если $z = x^2y - xy^2$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

5. Найти $\dfrac{\partial\omega}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial v}$: $\omega = x^2 + \sqrt{yz} + \sin z$, $x = u + v$, $y = u^2 - v$.

6. Определить производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной неявно:

а) $xy - \ln y = 0$; б) $ye^x + e^y = 0$; в) $xy = y^x$.

7. Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z = z(x, y)$, заданной неявно:
а) $z^3 + 3xyz = a^3$; б) $e^z - xyz = 0$; в) $x^2 + z^2 - zx + xy^4 - 1 = 0$.

8. Показать, что функция $z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет уравнению $xz'_x + yz'_y = z$.

9. Рассчитать:
а) z''_{xx} и z''_{xy}, если $z = \ln(3xy + y^2)$; б) z''_{yy}, если $z = \sin(3x + e^{2y})$.

10. Определить u'''_{xyz}, если $u = e^{xyz}$.

11. Показать, что $u'''_{xyz} = u'''_{zxy}$, если $u = x^3y^3z^3$.

12. Найти d^2z, если: а) $z = x^3 - x^2y - y^3$; б) $z = e^{xy}$.

Минимум для аудиторной работы

1. а), в), д); 2. а), в); 5; 6. а); 7. а); 9. а); 11; 12.

2.3.4. Ответы

1. а) $\frac{dz}{dt} = 2e^{2t}(2e^{2t} + \sin^2 t) + e^{2t}\sin 2t$; б) $\frac{dz}{dt} = 0$; в) $\frac{dz}{dx} = \frac{1 - 2(x+1)^2}{y^2 + (x+1)^2}e^{(1+x)^2}$; г) $\frac{dz}{dv} = (2y + x)\cos v - (2x + y)\sin v$. **2.** а) $z'_x = -\left(ve^y + u\frac{y}{x}\right)\sin uv$; $z'_y = -(ve^yx + u\ln x)\sin uv$; б) $z'_x = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{y}{2}}$; $z'_y = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{y}{2}}\sin\frac{y}{2}$; в) $z'_x = 3x^2(y^3 + y^{-3})$; $z'_y = 3x^3(y^2 - y^{-4})$; г) $z'_x = e^{u-2v}\times$ $\times(\cos x - 6x^2)$; $z'_y = -4ye^{u-2v}$. **3.** $z'_x = \frac{(1 + y)(y^2 - x^2) - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $z'_y = \frac{(1 + x)(x^2 - y^2) - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. **4.** $z'_u = 3u^2\cos v\ \sin v\ (\cos v - \sin v)$; $z'_v = u^3(\cos^3 v + \sin^3 v - \sin 2v\ (\cos v + \sin v))$. **5.** $\frac{\partial\omega}{\partial u} = 2(u + v) +$

$+\ u\sqrt{\dfrac{z}{u^2-v}}$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial v} = 2(u\ +\ v)\ -\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{z}{u^2-v}}$. **6.** а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1-xy}$; б) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ye^x}{e^x+e^y}$; в) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^x \ln y - y}{x - xy^{x-1}}$. **7.** а) $z'_x = -\dfrac{yz}{z^2+xy}$; $z'_y = -\dfrac{xz}{z^2+xy}$; б) $z'_x = \dfrac{yz}{e^z - xy}$; $z'_y = \dfrac{xz}{e^z - xy}$; в) $z'_x = \dfrac{2x - z + y^4}{x - 2z}$; $z'_y = \dfrac{4xy^3}{x-2z}$.

9. а) $z''_{xx} = -\dfrac{9}{(3x+y)^2}$; $z''_{xy} = -\dfrac{3}{(3x+y)^2}$; б) $z''_{yy} = 4e^{2y}(\cos(3x+e^{2y}) - e^{2y}\sin(3x+e^{2y}))$. **10.** $u'''_{xyz} = e^{xyz}((xyz)^2 + 3xyz + 1)$. **12.** а) $d^2z = (6x - 2y)dx^2 - 4xdxdy - 6ydy^2$; б) $d^2z = e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2)$.

2.4. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

2.4.1. Теоретический минимум

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
2. Производная по направлению.
3. Градиент и его свойства.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Под ***касательной плоскостью*** к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ понимается плоскость T, в которой расположены касательные к всевозможным кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (если такая плоскость существует).

Нормалью к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется прямая L, перпендикулярная касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Из определения T и L следует, что нормальный вектор касательной плоскости является направляющим вектором нормали.

Уравнения касательной плоскости и нормали, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеют вид:

а) поверхность задана явно (графиком функции $z = z(x, y)$):

$$T\colon \boxed{z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0),}$$

$$L:\ \boxed{\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1};}$$

б) поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$:

$$T:\ \boxed{F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0,}$$

$$L:\ \boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

(предполагается, что в точке M_0 производные F'_x, F'_y, F'_z одновременно не обращаются в нуль, т. е. точка M_0 не является особой).

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 2, 5)$.

Решение. Найдем $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $z'_x(1, 2) = 2$, $z'_y(1, 2) = 4$ и подставим в формулы пункта а). Тогда уравнение касательной плоскости T имеет следующий вид: $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$, а уравнения нормали L выглядят так: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$.

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, заданной уравнением $x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 15$ в точке $M_0(2, -3, 2)$.

Решение. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 15$. Найдем $F'_x = 2x$, $F'_y = 6y$, $F'_z = -8z$, $F'_x(2, -3, 2) = 4$, $F'_y(2, -3, 2) = -18$, $F'_z(2, -3, 2) = -16$.

Подставляя в формулы пункта б), получаем уравнение касательной плоскости T: $4(x - 2) - 18(y + 3) - 16(z - 2) = 0$ или $2x - 9y - 8z - 15 = 0$, а уравнения нормали L – $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-9}=\frac{z-2}{-8}$.

Производная по направлению

Пусть функция $u = u(x, y, z)$ определена и дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и задан вектор $\vec{a}$. Проведем через точку M_0 луч в направлении вектора $\vec{a}$. Параметрические уравнения луча запишем в виде $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$, $t \geq 0$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$. Если $M(x, y, z)$ – точка луча, то значение параметра t, соответствующее точке M, равно расстоянию от точки M_0 до точки M. Точке M_0 соответствует $t = 0$. На луче функция $u = u(x, y, z) = u(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$ является функцией одной переменной t.

Правосторонняя производная этой функции в точке $t = 0$ называется ***производной функции*** $u = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***по направлению*** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{d}{dt} u(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma)\,|_{t=0}.$$

Кроме того, $\frac{\partial u}{\partial a} = \lim\limits_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|MM_0|}$, $M \to M_0$ по лучу. Дифференцируя функцию $u = u(x, y, z)$ как сложную по переменной t и полагая $t = 0$, получим:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.}$$

Если $z = z(x, y)$, то

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.}$$

Градиент и его свойства

Направление наискорейшего возрастания функции в данной точке определяется вектором ***градиента***:

$$\boxed{\mathrm{grad}\,u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.}$$

Если $z = z(x, y)$, то $\mathrm{grad}\,z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\}$, $|\,\mathrm{grad}\,z\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$.

Градиент в каждой точке направлен по нормали к линии (поверхности) уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial a} = (\mathrm{grad}\,u, \vec{a}^{\,0}) = = np_{\vec{a}}\mathrm{grad}\,u$, где $\vec{a}^{\,0}$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

Пример. Дана функция $z = x^2 + y^2$, точка $M(1, 2)$ и вектор $\vec{a} = \{3, -4\}$. Найти grad$z$ в точке M и производную функции z в точке M по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение. Определим $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $z'_x(1, 2) = 2$, $z'_y(1, 2) = 4$. Тогда grad$z$ = $\{2, 4\}$. Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5};\ \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = -\frac{4}{5}.$$

В результате имеем $\dfrac{\partial z}{\partial a} = 2\cdot\dfrac{3}{5} + 4\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -2.$

2.4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение касательной плоскости и нормали к поверхности.

2. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

3. Приведите определение grad$z$, если $z = z(x, y)$.

4. Дайте определение производной функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$.

5. Дана функция $z = z(x, y)$, точка M и вектор $\vec{a}$. Как связаны grad$z$ в точке M и производная функции z в точке M по направлению вектора $\vec{a}$?

6. Перечислите основные свойства градиента.

2.4.3. Практический минимум

1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанной точке к следующим поверхностям:

а) $z = x^3 + y^3$ в точке $M(1, 2, 9)$; б) $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ в точке $M\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M(3, 4, 12)$.

2. Записать уравнение касательной плоскости к поверхности $xy + z^2 + xz = 1$, параллельной плоскости $x + 2z - y = 0$.

3. Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, параллельных плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

4. Найти производную по направлению вектора $\vec{a} = \{3,\ 4\}$ и градиент функции $z = xy^2$ в точке $A(1, 1)$.

5. Определить градиент и производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению $\vec{a} = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

6. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 + xy$ в точке $A(3, 1)$ по направлению к точке $B(6, 5)$.

7. Определить производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1, 1)$ по направлению, составляющему угол 60° с положительным направлением оси Ox.

8. Найти производную функции $u = \ln(x + y + z + 1)$ по направлению, составляющему равные углы с осями координат.

9. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 - xy$ в точке $A(1, 1)$ по направлению, составляющему угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) равна нулю?

Минимум для аудиторной работы

1. а), в); 2; 4; 6; 8.

2.4.4. Ответы

1. а) $3x + 12y - z - 18 = 0$; $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{12} = \dfrac{z-9}{-1}$; б) $z = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}(x - y)$; $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z - \frac{\pi}{4}}{2}$; в) $3x + 4y + 12z = 169$; $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{12}$. **2.** $y - x - 2z \pm \pm\sqrt{5} = 0$. **3.** $x + 4y + 6z = \pm 21$. **4.** $\operatorname{grad} z = \{1, 2\}$; $\dfrac{\partial z}{\partial a} = 2{,}2$. **5.** $\operatorname{grad} u = \{2, 2, 2\}$; $\dfrac{\partial z}{\partial a} = 2 + \sqrt{2}$. **6.** $\dfrac{\partial z}{\partial a} = 8{,}2$. **7.** $\dfrac{\partial z}{\partial a} = 1 - \sqrt{3}$. **8.** $\dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{x + y + z + 1}$. **9.** $\dfrac{\partial z}{\partial a} = \sin\alpha + \cos\alpha$; а) $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\dfrac{5\pi}{4}$; в) $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{4}$.

2.5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.5.1. Теоретический минимум

1. Локальный экстремум.
2. Глобальный экстремум (наибольшее и наименьшее значения функции в области).
3. Условный экстремум.

Локальный экстремум

Пусть функция $z = z(x, y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0, y_0)$ – внутренняя точка области. Если существует такая окрестность точки

$M_0(x_0, y_0)$, что для всех точек M из этой окрестности $z(M_0) \geq z(M)$ ($z(M_0) \leq z(M)$), то точка M_0 называется точкой ***локального максимума (минимума)*** функции $z = z(x, y)$. Если эти неравенства строгие для $M \neq M_0$, то и соответствующий локальный максимум (минимум) называется строгим. Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***.

Характерное свойство точки экстремума: в некоторой окрестности такой точки приращение функции не меняет знак.

Необходимые условия экстремума. Если функция $z = z(x, y)$ имеет в точке M_0 экстремум, то в этой точке $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (или не существует). Такие точки называются ***критическими***. Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются ***стационарными***.

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = z(x, y)$ и в окрестности этой точки функция имеет непрерывные производные второго порядка. Тогда если в точке M_0

1) $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0$ и $z''_{xx} < 0$ или $z''_{yy} < 0$ (что равносильно), то точка M_0 – точка строгого локального максимума;

2) $\Delta > 0$, $z''_{xx} > 0$ $(z''_{yy} > 0)$, то точка M_0 – точка строгого локального минимума;

3) в случае $\Delta < 0$ локального экстремума в точке M_0 нет;

4) случай $\Delta = 0$ требует дополнительного исследования.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 3y^2$.

Решение. Функция определена и дифференцируема во всех точках плоскости Oxy.

1. Найдем критические точки: $z'_x = 4x = 0$, $z'_y = 6y = 0$. Отсюда следует, что функция имеет одну критическую (стационарную) точку $O(0, 0)$.

2. Для проверки достаточных условий экстремума рассчитаем вторые частные производные: $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = 6$. Вычислим определитель $\Delta = 4 \cdot 6 - 0 = 24 > 0$, и поскольку $z''_{xx} = 4 > 0$, то точка O – точка строгого локального минимума, $z(0, 0) = 0$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = -2x^2 - 3y^2$.

Решение. Имеем одну критическую точку $O(0, 0)$, в которой $z''_{xx} = -4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = -6$, $\Delta = 24 > 0$, и поскольку $z''_{xx} = -4 < 0$, то O – точка строгого локального максимума, $z(0, 0) = 0$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 3y^2$.

Решение. Имеем одну критическую точку $O(0, 0)$, в которой $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = -6$, $\Delta = -24 < 0$, и поэтому точка O не является точкой локального экстремума. Локальных экстремумов функция не имеет.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y) = 2x^2$.

Решение. Имеем $z'_x = 4x = 0$, $z'_y = 0$, и, таким образом, целая прямая $x = 0$ (ось Oy) состоит из критических точек. Поскольку в этих точках $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = 0$, $\Delta = 0$, требуется дополнительное исследование. Нетрудно заметить, что графиком исследуемой функции является параболический цилиндр с направляющей $z = 2x^2$ в плоскости Oxz и образующей, параллельной оси Oy. Таким образом, в каждой точке прямой $x = 0$ (ось Oy) функция имеет локальный экстремум и принимает минимальное значение, равное 0.

Глобальный экстремум (наибольшее и наименьшее значения функции в области)

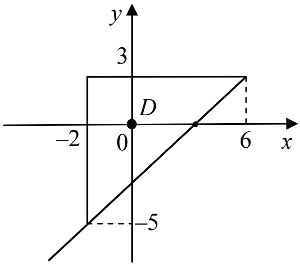
Пусть функция $z = z(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области (компакте) D. Тогда функция $z = z(x, y)$ достигает в этой области глобальных экстремумов, иными словами, своего наибольшего (***глобальный максимум***) и наименьшего (***глобальный минимум***) значений (теорема Вейерштрасса). Чтобы найти эти значения в области, нужно определить все критические точки внутри области, вычислить значения функции в этих точках и сравнить с наибольшим и наименьшим значениями функции на границе области.

Условный экстремум

Рассмотрим экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$. Такая задача сводится к задаче на экстремум функции одной переменной, если найти из условия одну переменную (x или y) через другую, например, $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = z(x, y)$: $z = z(x, y(x))$. Наряду с этим подходом используется (особенно, если определить $y(x)$ сложно) метод множителей Лагранжа, в котором необходимые и достаточные условия экстремума формулируются в терминах ***функции Лагранжа*** $F(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ – множитель Лагранжа, в частности (***необходимое условие*** условного экстремума): если (x_0, y_0) – точка локального условного экстремума, в которой градиент функции φ ограничений отличен от нуля, то существует такой множитель λ_0 Лагранжа, что точка (x_0, y_0, λ_0) является стационарной точкой функции Лагранжа.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 3y^2$ в замкнутой области D, ограниченной линиями $y = 3$, $x = -2$, $x - y = 3$.

Решение. Изобразим область D на рисунке.



Находим критические точки, лежащие внутри области D, и вычисляем значения функции в этих точках, не исследуя характер этих точек (т. е. проверку достаточных условий экстремума можно опускать). Критическая точка одна: $O(0, 0)$, $\underline{z(0, 0) = 0}$.

Исследуем функцию на границе области D:

а) рассмотрим участок границы $y = 3$, $x \in [-2, 6]$. Подставим $y = 3$ в функцию z и получим функцию одной переменной $z = 2x^2 + 27$, $x \in [-2, 6]$. Найдем точки, в которых $z'_x = 0$, и вычислим значения z в этих точках и на концах отрезка: $z'_x = 4x = 0$, $x = 0$, $\underline{z(0, 3) = 27}$, $\underline{z(-2, 3) = 35}$, $\underline{z(6, 3) = 99}$;

б) аналогично исследуем участок $x = -2$, $y \in [-5, 3]$: $z = 8 + 3y^2$, $z'_y = 6y = 0$, $y = 0$, $\underline{z(-2, 0) = 8}$, $\underline{z(-2, -5) = 83}$, $\underline{z(-2, 3) = 35}$;

в) на участке $x - y = 3$ можно, как и выше, подставить $y = x - 3$ в функцию z и найти ее экстремум на отрезке [2, 6] либо решить как задачу на условный экстремум. Составим функцию Лагранжа $F(x, y, \lambda)$: $F(x, y, \lambda) = 2x^2 + 3y^2 + \lambda(x - y - 3)$.

Находим стационарные точки этой функции: $F'_x = 4x + \lambda = 0$, $F'_y = 6y - \lambda = 0$, $F'_\lambda = x - y - 3 = 0$. Решая эту систему, получаем $x = 1{,}8$; $y = 1{,}2$; $\underline{z(1{,}8;\ 1{,}2) = 10{,}8}$.

Из подчеркнутых значений выбираем самое большое и самое малое значения. Итак, $\max\limits_D z = 99$, $\min\limits_D z = 0$.

2.5.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения точек локального максимума (минимума), точек строгого экстремума функции $z = z(x, y)$.

2. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции $z = z(x, y)$.

3. Опишите схему исследования функции $z = z(x, y)$ на экстремум.

4. Приведите схему отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области.

5. Сформулируйте задачу на условный экстремум функции $z = z(x, y)$ и опишите методы ее решения.

2.5.3. Практический минимум

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$; б) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$; в) $z = x^2 + (y - 1)^2$;
г) $z = x^3 - 3xy + y^3$; д) $z = 3\ln x + xy^2 - y^3$.

2. Исследовать на экстремум нижеприведенные функции:

а) $z = 3x^3y - x^2y^3 + x$; б) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - xy$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3y^2(12 - x - y)$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функций в указанных областях D:

а) $z = x - 2y - 3$, D: $x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0$;

б) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, D: $x^2 + y^2 \le 25$;

в) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, границы D: $x = 0, x = 2, y = 1, y = -1$.

5. Определить точки условного экстремума следующих функций:

а) $z = xy$, если $x + y = 1$; б) $z = x^2 + y^2$, если $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$;
в) $z = e^{xy}$, если $x + y = a$; г) $z = xy$, если $x^2 + y^2 = 2$.

6. В плоскости треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин является наименьшей.

Минимум для аудиторной работы

1. а), б), в); 2. а); 4. а), в); 5. а), в).

2.5.4. Ответы

1. а) $z_{\min}(1,\ 0) = -1$; б) $z_{\min}(-2,\ 0) = -2e^{-1}$; в) $z_{\min}(0,\ 1) = 0$; г) $z_{\min}(1,\ 1) = -1$; д) точек экстремума нет. **2.** а) точек экстремума нет; б) $z_{\max}(-1, -1) = -3$. **3.** $z_{\max}(6, 4) = 6912$. **4.** а) $\max\limits_D z = -2$; $\min\limits_D z = -5$; б) $\max\limits_D z = 125$; $\min\limits_D z = -75$; в) $\max\limits_D z = 9 + 4\sqrt{2}$; $\min\limits_D z = -7$. **5.** а) $z_{\max}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; б) $z_{\min}\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$; в) $z_{\max}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = e^{\frac{a^2}{4}}$; г) $z_{\min} = z(1,\ -1) = z(-1,\ 1) = -1$; $z_{\max} = z(1,\ 1) = z(-1,\ -1) = 1$. **6.** $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$; $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

Глава 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

3.1.1. Теоретический минимум

1. Нахождение определенного интеграла, его геометрический и механический смысл.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница.
4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
5. Интегрирование заменой переменной в определенном интеграле.
6. Общая схема применения определенного интеграла.
7. Геометрические приложения определенного интеграла.
8. Физические приложения определенного интеграла.

Нахождение определенного интеграла, его геометрический и механический смысл

Пусть на промежутке (отрезке) $[a, b]$ определена некоторая функция $f(x)$, $x \in [a, b]$. Осуществим ***n*-разбиение** промежутка $\left[a, b\right]$ на n частей точками $x_0, x_1, ..., x_n$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b.$ Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину i-го промежутка и наибольшую d_n из этих длин назовем ***диаметром разбиения***: $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. На каждом из частичных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим ***интегральную сумму***:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Если теперь существует конечный предел $\lim\limits_{d_n \to +0} \sigma_n$ интегральных сумм σ_n, когда диаметр d_n разбиения стремится к нулю, и этот предел *не зависит*: а) от *выбора разбиения* и б) *выбора точек* ξ_i на частичных промежутках, то этот предел и называется ***определенным интегралом*** (ОИ) от функции f по промежутку $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx,$ при этом функция f называется *интегрируемой* (по Риману) по промежутку (на промежутке) $[a, b]$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d_n \to +0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

здесь f – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; x – переменная интегрирования; a, b – соответственно нижний и верхний пределы интегрирования.

Рассмотрим в плоскости Oxy фигуру – ***криволинейную трапецию*** $T_f,$ ограниченную снизу осью $Ox,$ сверху – графиком неотрицательной функции $y = f(x), x \in [a, b], a < b,$ и с боков – прямыми $x = a$ и $x = b.$ Тогда интегральная сумма σ_n выражает сумму площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i),$ что приближенно равно площади криволинейной трапеции (если она существует, см. рис. 3.1). Переходя к пределу при $d_n \to 0,$ получаем точное значение S_T площади T_f: $\int\limits_a^b f(x)dx = S_T.$

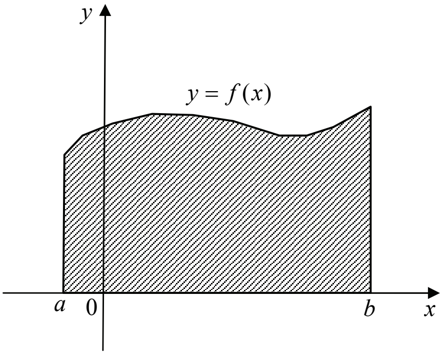


Рис. 3.1. Геометрический смысл определенного интеграла

Отсюда ***геометрический смысл*** ОИ: интеграл по промежутку от неотрицательной на этом промежутке функции дает **площадь** соответствующей криволинейной трапеции, что по существу является определением площади криволинейной трапеции (рис. 3.1).

Аналогично получаем ***механический смысл*** ОИ: если $f(x) = \rho(x)$ – плотность (линейная) в точке x материального стержня $[a, b]$, то интеграл от плотности по промежутку $[a, b]$ выражает **массу** $m_{[a,b]}$ этого материального стержня $[a, b]$: $\int_a^b \rho(x)dx = m_{[a,b]}$.

Свойства определенного интеграла

Из определения ОИ вытекает ***необходимое условие*** интегрируемости: если функция интегрируема по промежутку, то она ограничена на этом промежутке.

Имеет место ***достаточное условие*** интегрируемости: если функция непрерывна на промежутке (отрезке), то она интегрируема по этому промежутку.

В дальнейшем будем считать рассматриваемые функции интегрируемыми на соответствующих промежутках. Тогда имеют места следующие ***свойства*** ОИ:

1. Интеграл от единичной функции выражает *длину* отрезка $[a, b]$: $\int_a^b dx = b - a$. Кроме этого, по определению:

$$\int_a^a f(x)dx = 0,\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. *Линейность*:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C = \mathrm{const}$$

(постоянную можно выносить за знак интеграла);

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций).

3. *Аддитивность*: интеграл по промежутку $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ равен сумме интегралов по составляющим промежуткам:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. *Монотонность*: если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, в частности, для непрерывной на $[a,b]$ функции f имеет место *теорема об оценках*:

$$m_*(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq m^*(b-a),$$

где $m_* = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $m^* = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

5. *Теорема о среднем*. Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ и $f(c) = \frac{1}{b-a} \times$ $\times \int_a^b f(x)dx$ – среднее значение функции f на промежутке $[a,b]$.

Геометрический смысл теоремы о среднем: в случае неотрицательной на $[a,b]$ функции f найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$ (рис. 3.2).

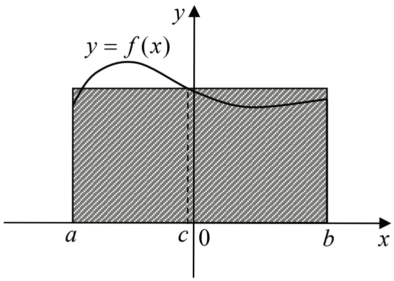


Рис. 3.2. Геометрический смысл теоремы о среднем

В случае, когда промежуток $[-a, a]$ интегрирования симметричен относительно начала координат и интегрируемая на нем функция f является либо четной, либо нечетной, имеют место равенства:

1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ – для *нечетной функции*;

2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$ – для *четной функции*.

Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Для каждого $x\in[a,b]$ рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t)dt=F(x)$ – ***функцию переменного верхнего предела***.

Оказывается, если $f(x)$ интегрируема, то $F(x)$ непрерывна; более того, имеет место ***теорема о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу***: в каждой точке $x\in(a,b)$, где $f(x)$ непрерывна, функция $F(x)$ является дифференцируемой, причем в этом случае производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной на этом переменном верхнем пределе:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = F'(x)=f(x),\ x\in(a,b).$$

Пример. Найти производную $\frac{d}{dx}\int_{-x^2}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt.$

Решение. Имеем:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x^2}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt=\frac{d}{dx}\left(\int_{-x^2}^{0} e^{-t^2}dt+\int_{0}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt-\int_{0}^{-x^2} e^{-t^2}dt\right)=\left(F(\sin^4 x)-F(-x^2)\right)'=e^{-(\sin^4 x)^2}(\sin^4 x)'-$$

$$-e^{-(-x^2)^2}(-x^2)'=e^{-\sin^8 x}\cdot 4\sin^3 x\cos x-e^{-x^4}\cdot(-2x)=$$

$$=4e^{-\sin^8 x}\sin^3 x\cos x+2xe^{-x^4}.$$

Пусть $F(x)$ – произвольная первообразная для непрерывной функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$. Тогда $\int_a^x f(t)dt$ и $F(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$. Поэтому они различаются, разве лишь, на постоянную: $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$, откуда, полагая $x=a$, находим $C=-F(a)$, затем, принимая $x=b$, получаем одну из основных формул интегрального исчисления – ***формулу Ньютона – Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)$ – произвольная первообразная для $f(x)$: $F'(x) = f(x)$, $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – двойная подстановка.

Отсюда получаем *связь* $\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b$ ОИ с неопределенным интегралом (НИ) и, как следствие, ***основной метод вычисления*** ОИ:

1) находим соответствующий НИ $\int f(x)dx = F(x) + C$ и определяем первообразную $F(x)$;

2) вычисляем ОИ, выполняя двойную подстановку $F(b) - F(a)$.

Пример. Рассчитать ОИ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

Решение. Находим НИ методом интегрирования по частям:

$$\int x\sin x\,dx = \left[\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ \sin x dx = dv, & v = -\cos x \end{matrix}\right] = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Вычисляем ОИ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \left[-x\cos x + \sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - (-0\cos 0 + \sin 0) = 1.$$

Пример. Рассчитать ОИ $\int_2^4 \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}dx$.

Решение. Находим НИ, разлагая подынтегральную правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Приравниваем числители исходной и конечной дробей: $4x-1=A(x+2)+B(x-1)$ и сравниваем их при $x=-2$ и $x=1$. Получим при $x=-2$: $-9=-3B$, откуда $B=3$, при $x = 1$: $3=3A$, откуда $A=1$. Таким образом,

$$\int\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C.$$

Вычисляем ОИ:

$$\int_2^4\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}dx=\left[\ln|x-1|+3\ln|x+2|\right]\Big|_2^4=$$
$$=\ln 3+3\ln 6-\ln 1-3\ln 4=\ln\frac{81}{8}.$$

Как уже отмечалось, формула Ньютона – Лейбница позволяет свести вычисление ОИ к нахождению соответствующих НИ и, таким образом, позволяет применить все известные для НИ методы интегрирования, к примеру интегрирование по частям и замену переменной. Однако зачастую оказывается более удобным использовать эти методы непосредственно для ОИ.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Предположим, что $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывные на промежутке $[a,b]$ функции. Тогда, применяя формулу Ньютона – Лейбница и интегрирование по частям в НИ, имеем:

$$\int_a^b u(x)dv(x)=F(b)-F(a)=\left[u(x)v(x)-\int v(x)du(x)\right]\Big|_a^b=$$
$$=\left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

Отсюда получаем ***формулу интегрирования по частям*** в ОИ:

$$\int_a^b u(x)dv(x)=\left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

Пример. Вычислить ОИ $\int_1^2 x^2e^{-x}dx.$

Решение. Применяем интегрирование по частям в ОИ:

$$\int_1^2 x^2 e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = \left[-x^2e^{-x}\right]\Big|_1^2 + 2\int_1^2 xe^{-x}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -4e^{-2} + e^{-1} + 2\left(\left[-xe^{-x}\right]\Big|_1^2 + \int_1^2 e^{-x}dx\right) =$$

$$= -4e^{-2} + e^{-1} - 4e^{-2} + 2e^{-1} - 2e^{-2} + 2e^{-1} = -10e^{-2} + 5e^{-1}.$$

Интегрирование заменой переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[t_0, t_1]$, причем $a = \varphi(t_0)$; $b = \varphi(t_1)$, и множество значений функции φ не выходит за пределы промежутка $[a, b]$. Тогда имеет место ***замена переменной в ОИ*** (*интегрирование подстановкой*):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Замена переменной в ОИ обладает тем преимуществом по сравнению с НИ, что не требуется возвращаться к исходной переменной, однако при этом приходится пересчитывать пределы интегрирования.

Пример. Вычислить ОИ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Воспользуемся заменой переменной в ОИ:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = \cos t,\ dx = -\sin t\,dt \\ 0 = \cos t_0,\ 1 = \cos t_1 \\ t_0 = \dfrac{\pi}{2},\ t_1 = 0 \end{bmatrix} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} = \left[\frac{1}{2}t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Рассчитать ОИ $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Заменим переменную в ОИ:

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x = t^2, & dx = 2tdt \\ 1 = t_0^2, & 4 = t_1^2 \\ t_0 = 1, & t_1 = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2\left[t - \ln|1+t|\right]\Big|_1^2 = 2\left(2 - \ln 3 - 1 + \ln 2\right) = 2\left(1 + \ln\frac{2}{3}\right).$$

Общая схема применения определенного интеграла

Основным методом, используемым в приложениях ОИ, является метод интегральных сумм, непосредственно вытекающий из определения ОИ. Этот метод по существу был применен ранее при выяснении геометрического смысла ОИ. Рассмотрим общую схему применения ОИ.

Предположим, что рассматривается некоторая геометрическая (физическая или любая другая) величина Q, которая является ***аддитивной функцией*** промежутка, т. е. величина $Q = Q[a, b]$, отнесенная ко всему промежутку $[a, b]$, для любого *n-разбиения* этого промежутка равна сумме величин $Q = Q[x_{i-1}, x_i]$, отнесенных к частичным промежуткам. Например, величина Q – масса материального стержня $[a, b]$ обладает свойством *аддитивности*: масса всего стержня $[a, b]$ равна сумме масс составляющих его частичных стержней. Введем понятие $Q(x) = Q[a, x]$ – величины Q (массы), отнесенной к промежутку $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Обычно в приложениях величина $Q(x)$ имеет ***плотность*** $\rho = \rho(x) = Q'(x), x \in [a, b]$. Например, в случае *массы* $\rho(x)$ – *линейная плотность* материального стержня $[a, b]$ в точке x. Для вычисления аддитивной величины Q может быть использована следующая ***общая схема*** применения ОИ.

Осуществляем *n-разбиение* промежутка $[a, b]$:

$$a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b, \ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ d_n = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i;$$

тогда, с одной стороны,

$$Q[a, b] \underset{\text{аддитивность}}{=} \sum_{i=1}^{n} Q[x_{i-1}, x_i] = \sum_{i=1}^{n} (Q(x_i) - Q(x_{i-1})) \underset{\text{формула Лагранжа}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$$

– интегральная сумма (*масса* стержня). Таким образом, в случае наличия плотности $\rho(x)$ величина $Q[a,b]$ совпадает, по крайней мере, с одной из интегральных сумм для функции $\rho(x)$ по промежутку $[a,b]$, при этом точки ξ_i заранее неизвестны. Однако если существует конечный предел интегральных сумм при $d_n \to 0$ и этот предел не зависит как от разбиения, так и от точек ξ_i, то величина $Q[a,\, b]$ совпадает с соответствующим ОИ:

$$Q[a,\, b] = \int_a^b \rho(x)dx,$$

в частности, с массой материального стержня $[a,\, b]$ в случае, когда интегрируемая функция является его линейной плотностью (*механический смысл* ОИ).

Тот факт, что величина $Q[a,\, b]$ совпадает не с каждой интегральной суммой для интегрируемой функции (плотности) проясняет понимание того, почему в определении ОИ требуется независимость соответствующего предела и от вида разбиения, и от выбора точек на частичных интервалах.

Отсюда ***метод интегральных сумм*** применения ОИ: для плотности $\rho(x)$ величины $Q[a,b]$ составляем интегральные суммы, затем осуществляем переход к пределу при $d_n \to 0$ и в результате получаем ОИ от плотности по промежутку $[a,b]$.

С другой стороны, возвращаясь к величине $Q(x),\, x \in [a,b]$, имеем: $Q[a,\, b] = Q(b) - Q(a) = \int_a^b dQ(x)$, где $dQ(x) = p(x)dx$ – дифференциал величины Q. Отсюда получаем широко используемый в инженерной практике ***метод дифференциалов*** применения ОИ: определяем дифференциал величины $dQ(x) = p(x)dx$ и интегрируем по промежутку $[a,\, b]$. В результате получаем величину $Q[a,b]$. На практике обычно выделяется элементарный промежуток длиной $\Delta x = dx$, считается, что на этом промежутке величина Q распределена равномерно и тогда $\Delta Q \approx \rho(x)dx$, откуда, переходя к дифференциалам, получаем точное равенство $dQ = \rho(x)dx$ и окончательно $Q[a,\, b] = \int_a^b \rho(x)dx$.

В последующих пунктах метод дифференциалов будет применен к определению различных геометрических и физических аддитивных величин.

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть D – ограниченная фигура в плоскости Oxy и $|D|$ – ее площадь. Тогда в зависимости от описания этой фигуры различают следующие применения ОИ при вычислении площади:

а) *в декартовых координатах*:

1) $|D|=\int\limits_a^b f(x)dx$, если D – криволинейная трапеция, ограниченная снизу осью Ox, сверху – графиком неотрицательной функции $y=f(x)$, а с боков – прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ (*геометрический смысл* ОИ, см. рис. 3.1 на с. 42);

2) $|D|=\int\limits_a^b \big(y_2(x)-y_1(x)\big)dx$, если D – фигура, ограниченная снизу графиком функции $y=y_1(x)$, сверху – графиком функции $y=y_2(x)$, где $y_2(x)\ge y_1(x), x\in[a,b]$, и с боков – прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ (рис. 3.3);

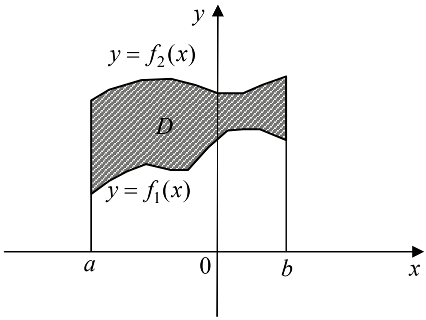


Рис. 3.3. Криволинейная трапеция в случае 2

3) $|D|=\int\limits_a^b |g(x)-f(x)|dx$, если D – фигура, ограниченная сверху и снизу графиками функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ и с боков – прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 3.4);

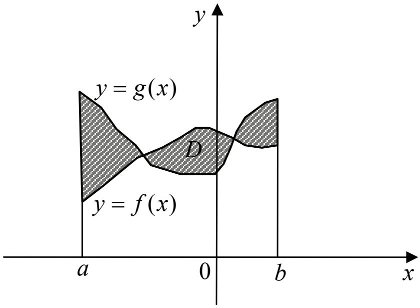


Рис. 3.4. Область в случае 3

б) в случае *параметрического задания*:

$\left|D\right| = \int\limits_a^b y(x)dx = \int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt,$ если D – криволинейная трапеция, ограниченная линией $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1],$ заданной параметрически и $y(t)x'(t) > 0,\ t_0 < t_1;$

в) *в полярных координатах* $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$: используя метод дифференциалов, получаем:

1) $\left|D\right| = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi,$ если D – криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_2$ и кривой $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ (рис. 3.5);

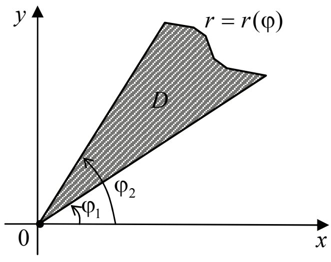


Рис. 3.5. Криволинейный сектор в случае 1

2) $\left|D\right| = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r_2^{\,2}(\varphi) - r_1^{\,2}(\varphi))\,d\varphi,$ если D – фигура, ограниченная лучами $\varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_2$ и кривыми $r = r_1(\varphi),\ r = r_2(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ (рис. 3.6).

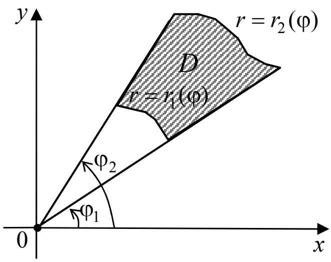


Рис. 3.6. Площадь криволинейного сегмента
в случае 2

Пример. Вычислить площадь фигуры (рис. 3.7)

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, a > 0, b > 0 \right\},$$

ограниченной эллипсом.

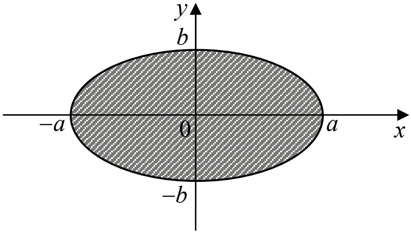


Рис. 3.7. Фигура, ограниченная эллипсом

Решение. Фигура D симметрична относительно координатных осей. Поэтому можно вычислить площадь части фигуры (расположенной в первой четверти) – криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$. Имеем:

$$S_D = |D| = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = a\sin t, & dx = a\cos t\, dt \\ 0 = a\sin t_1, & a = a\sin t_2 \\ t_1 = 0, & t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 2ab\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) =$$

$$= ab\pi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры (рис. 3.8), ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x - 2,\ y = -x^2 + 2x + 4,\ x = -2,\ x = 4.$

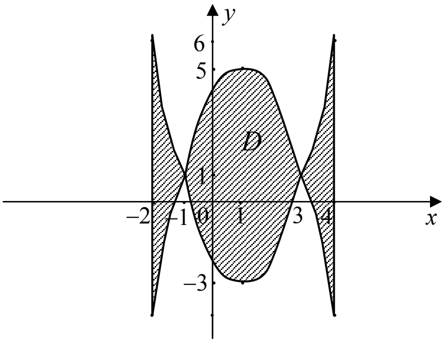


Рис. 3.8. Фигура

Решение. Определим точки пересечения парабол и прямых:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2, \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2, \\ x = -2; \end{cases} y = 6; \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 4, \\ x = -2; \end{cases} y = -4;$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2, \\ x = 4; \end{cases} y = 6; \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 4, \\ x = 4; \end{cases} y = -4.$$

Из рис. 3.8 видно, что криволинейная трапеция симметрична относительно прямой $x = 1$, поэтому найдем площадь при изменении x от 1 до 4 и увеличим ее в 2 раза:

$$S_D = |D| = 2\int_1^4 \left|x^2 - 2x - 2 - (-x^2 + 2x + 4)\right| dx =$$

$$= 2\int_1^3 \left(-x^2 + 2x + 4 - (x^2 - 2x - 2)\right) dx +$$

$$+2\int_3^4 \Big(x^2-2x-2-(-x^2+2x+4)\Big)dx=$$

$$=2\int_1^3(-2x^2+4x+6)dx+2\int_3^4(2x^2-4x-6)dx=$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]\Bigg|_1^3+2\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]\Bigg|_3^4=$$

$$=2\left(-\frac{2}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3^2+6\cdot 3+\frac{2}{3}-2-6\right)+$$

$$+2\left(\frac{2}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2-6\cdot 4-\frac{2}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3^2+6\cdot 3\right)=\frac{92}{3}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями: $x=2y^2$, $x=3y^2-1$ (рис. 3.9).

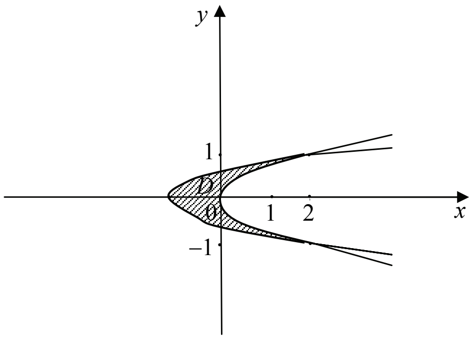


Рис. 3.9. Фигура D

Решение. Определим точки пересечения парабол:

$$\begin{cases} x=2y^2, \\ x=3y^2-1 \end{cases} \Rightarrow\ 2y^2=3y^2-1\ \Leftrightarrow\ y^2=1,$$

$$y_1=-1,\ y_2=1,\ x_1=2,\ x_2=2.$$

Поскольку D симметрична относительно оси Ox, то площадь рассчитаем при изменении y от 0 до 1 и результат умножим на 2:

$$S_D=|D|=2\int_0^1\left|3y^2-1-2y^2\right|dy=2\int_0^1(2y^2-3y^2+1)dy=2\int_0^1(1-y^2)dy=$$

$$=2\left[y-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^1=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

Пример. Найти площадь фигуры D, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ и осью абсцисс.

Решение. Одна арка циклоиды образуется, когда параметр t изменяется, например, от 0 до 2π.

Тогда

$$S_D=|D|=\int_0^{2\pi}a\big(1-\cos t\big)\big(a(t-\sin t)\big)'\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi-\frac{3}{2}\cdot 0+2\sin 0-\frac{1}{4}\sin 0\right)=3a^2\pi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры D (рис. 3.10), ограниченной линиями: $r=a(1-\cos\varphi)$, $r=a\,(r\ge a,\ a>0)$, в полярной системе координат.

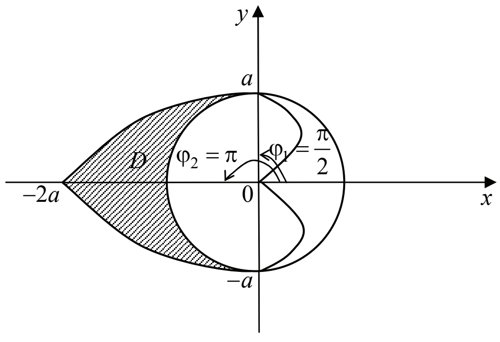


Рис. 3.10. Криволинейный сектор

Решение. Фигура D ограничена кардиоидой – $r=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $r=a$. D симметрична относительно луча $\varphi=\pi$, поэтому найдем площадь при изменении φ от $\frac{\pi}{2}$ до π и результат увеличим в 2 раза:

$$S_D = |D| = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(a^2(1-\cos\varphi)^2 - a^2\right)d\varphi = a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = a^2\left[-2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= a^2\left(-2\sin\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi+2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\pi\right) =$$

$$= a^2\left(0+\frac{\pi}{2}+0+2-\frac{\pi}{4}-0\right) = a^2\left(\frac{\pi}{4}+2\right).$$

Вычисление длины дуги плоской кривой. Под длиной s дуги кривой понимают предел вписанных в эту дугу длин ломаных, когда наибольшая из длин звеньев ломаных стремится к нулю. Будем рассматривать так называемые ***спрямляемые кривые***, т. е. кривые, для которых длина бесконечно малой дуги кривой эквивалентна длине стягивающей дугу хорды. Для таких кривых $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ или, переходя к дифференциалам, $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ или $(ds)^2 = (dx)^2+(dy)^2$, что иногда называют «теоремой Пифагора» для дифференциалов.

1. Если рассматриваемая кривая L задана *параметрически*, т. е. $L:\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,\ t_1]$, и является *гладкой*, т. е. функции $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы и их производные одновременно в нуль не обращаются, то выражение для ***дифференциала длины*** дуги можно уточнить:

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt,$$

где $t\in[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ (считаем, что $dt > 0$, т. е. t изменяется в порядке возрастания).

Отсюда получаем формулу для ***вычислений длины*** s_L гладкой параметризованной кривой L:

$$s_L = |L| = \int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt,\ t_0 < t_1.$$

Пример. Найти длину кривой L: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Имеем:

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left((t - \sin t)'_t\right)^2 + \left((1 - \cos t)'_t\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= -4\left[\cos\frac{t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = -4(\cos\pi - \cos 0) = 8.$$

2. Если кривая L задана *явно* как график функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то формула для вычисления длины дуги кривой упрощается (здесь $t = x$):

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx, \ \ a < b.$$

Пример. Найти длину дуги кривой L: $y^2 = x^3$, отсекаемую прямой $x = 1$.

Решение. Дуга лежит в первой и четвертой четвертях и симметрична относительно оси Ox. Поэтому можно вычислить длину дуги в первой четверти и результат удвоить. Имеем:

$$|L| = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = 2 \cdot \frac{4}{9}\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, d\left(\frac{9}{4}x + 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{16}{27}\left(\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}\right)^3} - 1\right) = \frac{16}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

3. Аналогично можно рассмотреть выражение для нахождения дуги в полярных координатах, если в качестве параметра t принять полярный угол φ.

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и площадей поверхностей тел вращения.

1. *Определение объемов по площадям поперечных сечений.*

Предположим, что тело G расположено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и площадь $S(C)$ поперечного сечения тела плоскостью $x = C$ является функцией непрерывной $C \in [a, b]$. Выделим элементарный промежуток $[x,\ x+dx]$. Ему отвечает элементарное тело с площадью основания $S(x)$ и высотой dx, и, отбросив бесконечно малые более высокого порядка малости, выделим *дифференциал* объема: $dV = S(x)dx$, откуда, интегрируя, получим $V = V_G = |G|$ тела G:

$$V_G = |G| = \int_a^b S(x)dx.$$

Пример. Найти объем тела G, ограниченного эллипсоидом: $G = \{(x,\ y,\ z):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{c^2} \le 1,\ a > 0,\ b > 0, c > 0\}$.

Решение. Можно тело G рассматривать (рис. 3.11), расположенным вдоль оси Ox между плоскостями $x = -a$ и $x = a$. Площадь поперечного сечения тела G плоскостью $x = C$ выражается формулой: $S(C) = \pi bc\left(1 - \dfrac{C^2}{a^2}\right)$, $C \in [-a, a]$. Тогда *объем* $V = V_G = |G|$ тела G можно вычислить следующим образом:

$$V_G = |G| = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\int_0^a\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi bc\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = 2\pi bc\frac{2a}{3} = \frac{4abc\pi}{3}.$$

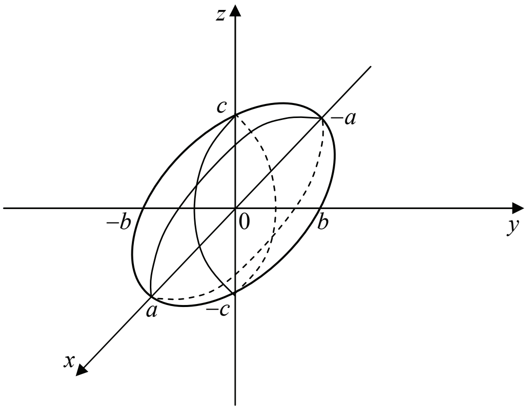


Рис. 3.11. Трехосный эллипсоид

2. *Вычисление объемов тел вращения*. Предположим, что тело G получено вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = f(x) \geq 0,$ $y = 0, x = a, x = b,$ вокруг оси Ox. Тогда $S(x) = \pi y^2(x)$ – площадь круга и *объем* $V_G = V_x$ выражается формулой

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Аналогично $V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy$ – *объем* тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $x = x(y) \geq 0, x = 0, y = c, y = d$.

Пример. Найти объем тела, образованного вращением дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 1$ (рис. 3.12).

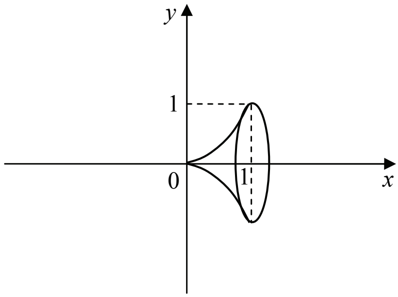


Рис. 3.12. Тело вращения

Решение. Имеем:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^3 dx = \pi\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3. *Вычисление площадей поверхностей тел вращения*. Рассмотрим поверхность П, образованную вращением кривой $y = f(x) \geq 0,$ $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox:

$$S_x = 2\pi\int_a^b y(x)ds(x) = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Аналогично $S_y = 2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}dy$ – площадь поверхности вращения кривой $x = x(y) \geq 0, y \in [c, d]$, вокруг оси Oy.

Физические приложения определенного интеграла

Вычисление работы. Материальная точка передвигается по прямолинейному пути $[a,\ b]$ под воздействием переменной силы величиной $F(x),\ x\in[a,\ b]$. Тогда $\Delta A\approx F(x)dx$ – элементарная работа по передвижению на участке $[x,\ x+dx]$. Отбрасывая бесконечно малые более высокого порядка малости, получаем точное равенство для *дифференциала* работы: $dA=F(x)dx$, откуда, интегрируя, имеем:

$$A=\int_a^b F(x)dx \text{ – работа силы } F(x) \text{ на промежутке } [a,\ b].$$

Пример. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из сосуда, ограниченного параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=h$.

Решение. Такой же параболоид вращения, как и в условии задачи, получается при вращении линии $y=\sqrt{x}$ вокруг оси Ox, $0\le x\le h$. Тогда

$$A=g\pi\int_0^h \rho x f^2(x)dx=g\pi\int_0^h 1\cdot x\cdot x\,dx=$$

$$=g\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^h=\frac{g\pi h^3}{3}.$$

Вычисление давления. Некоторая пластина опущена в жидкость. Требуется определить силу давления жидкости на пластину.

Предположим, что эта пластина ограничена линиями: $x=0$, $x=h$, $y=0$, $y=f(x)$, опущена в жидкость перпендикулярно поверхности и ось Oy находится на поверхности жидкости (рис. 3.13). Тогда, выделяя элементарную площадку пластины высотой dx на глубине x погружения и используя *закон Паскаля*, находим *дифференциал* силы давления: $dP=xg\rho dS$, где g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; dS – площадь элементарной площадки. В нашем случае $dS=f(x)dx$. Таким образом, $dP=xg\rho dS=$ $=xg\rho f(x)dx$, откуда, интегрируя, получаем выражение

$$P=g\int_0^h x\rho f(x)dx.$$

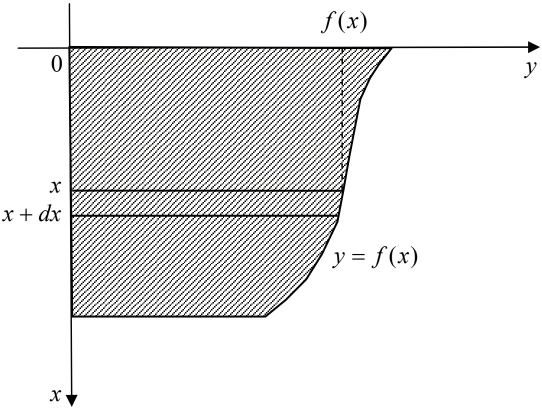


Рис. 3.13. Пластина, погруженная в жидкость

Пример. Найти силу давления воды на пластину в форме равнобедренной трапеции с основаниями длиной a и b и высотой h, если трапеция опущена в воду так, что верхнее основание находится на поверхности воды (рис. 3.14).

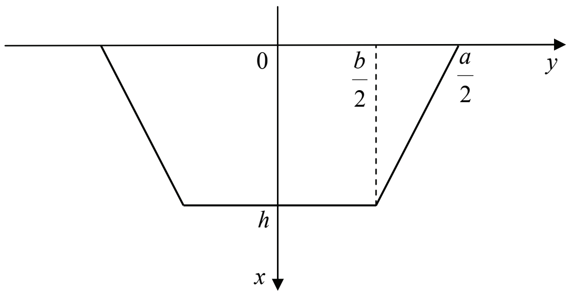


Рис. 3.14. Трапеция

Решение. Определим вначале вид функции, график которой ограничивает трапецию справа. Это прямая, проходящая через точки $\left(h,\ \frac{b}{2}\right)$ и $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$. Имеем:

$$\frac{x-h}{0-h} = \frac{y-\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-h}{-h} = \frac{2y-b}{a-b} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{b-a}{2h}(x-h) + \frac{b}{2} \Leftrightarrow y = \frac{b-a}{2h}x + \frac{a}{2}.$$

Поскольку пластина симметрична относительно прямой $y = 0$, то посчитаем давление для $y > 0$ и результат умножим на 2.

Таким образом,

$$P = 2g\int_0^h x\rho f(x)dx = 2g\int_0^h x \cdot 1 \cdot \left(\frac{b-a}{2h}x + \frac{a}{2}\right)dx =$$

$$= 2g\int_0^h \left(\frac{b-a}{2h}x^2 + \frac{a}{2}x\right)dx = 2g\left[\frac{b-a}{2h}\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2\cdot 2}\right]\Bigg|_0^h =$$

$$= 2g\left[\frac{(b-a)h^2}{6} + \frac{ah^2}{4}\right] = \frac{gh^2(2b-2a+3a)}{6} = \frac{gh^2(2b+a)}{6}.$$

3.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Как строится интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на отрезке$[a,\ b]$?
2. Что такое определенный интеграл?
3. Сформулируйте геометрический и механический смысл определенного интеграла.
4. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
5. Какие существуют способы вычисления определенного интеграла?
6. Укажите основные геометрические приложения определенного интеграла.
7. Как используется метод интегральных сумм для физических приложений определенного интеграла?

3.1.3. Практический минимум

Не вычисляя интегралы, определить их знак:

1. $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx.$ 2. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x \ln x\, dx.$

3. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\, dx.$

Не вычисляя, сравнить интегралы:

4. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$ и $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

6. $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ и $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\,dx$.

7. $\int\limits_3^4 \ln x\,dx$ и $\int\limits_3^4 (\ln x)^2\,dx$.

Оценить интегралы:

8. $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}dx$.

9. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x}{1+x^2}dx$.

Найти среднее значение функций:

10. $y=2x+3,\ x\in[0,\,2]$.

11. $y=1-x^2,\ x\in[0,\,1]$.

Интеграл с переменным верхним пределом. Вычислить производные по x от функций:

12. $\int\limits_1^x (x+3x^2)dx$.

13. $\int\limits_1^{2x} \sin x\,dx$.

14. $\int\limits_x^{2x} \ln^2 x\,dx\ (x>0)$.

Формула Ньютона – Лейбница:

15. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^4}$.

16. $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$.

17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$.

18. $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

19. $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 t\,dt$.

20. $\int\limits_0^1 \left(e^x-1\right)^3 e^x dx$.

21. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

22. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin 2x\,dx$.

24. $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

Интегрирование по частям:

25. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos\frac{x}{2}dx$.

27. $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x\, dx.$

28. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\, dx.$

29. $\int_0^1 \operatorname{arctg} 2x\, dx.$

30. $\int_1^e \ln^2 x\, dx.$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{2x} dx.$

Замена переменной в определенном интеграле:

32. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

33. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx.$

34. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$

35. $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

36. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\, dx.$

Вычисление площадей с помощью ОИ.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, которые заданы в декартовой системе координат:

37. $y=4x-x^2,\ y=0.$

38. $x=5y-y^2,\ y=0.$

39. $2x-y=0,\ x-2y+3=0,\ y=4.$

40. $y=x^2+4x+5,\ x-y+9=0.$

41. $yx=6,\ x+y-7=0.$

42. $x=2y^2,\ x=3y^2-1.$

43. $y=x^2-6x+10,\ y=6x-x^2,\ x=-1.$

Определить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

44. $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$

45. $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi,\ y=0.$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, которые заданы в полярной системе координат:

46. $r=2\cos 3\varphi,\ -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}.$

47. $r=\sin 2\varphi.$

48. $r=3+\sin 2\varphi.$

Найти длину дуги плоской линии с помощью ОИ:

49. $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 3.$

50. $y^2=(x-1)^3,\ 2\le x\le 5.$

51. $y=2\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right), 0\le x\le 4.$ 52. $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}, 0\le x\le 3.$

53. $x=t^2, y=t-\frac{1}{3}t^3, 0\le t\le\sqrt{3}.$

54. $x=8\sin t+6\cos t, y=6\sin t-8\cos t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$

Вычисление площади поверхности вращения с помощью ОИ.

55. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2=4ax$ вокруг оси Ox от вершины до точки с абсциссой $x=3a$.

56. Определить площадь поверхности, образованной вращением кубической параболы $3y-x^3=0$ вокруг оси Ox от $x_1=0$ до $x_2=a$.

Вычисление объемов с помощью ОИ.

Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

57. $y=2x-x^2, y=0.$ 58. $y=\sin x, y=\cos x, y=0 \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

59. $y=x, y=\frac{1}{x}, y=0, x=2.$ 60. $y=x+1, y=2x+1, x=2.$

61. $y=(x+2)^2, y=4-x, y=0.$

Вычислить объем тела, получающегося при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями:

62. $y=x^3, y=0, x=2.$ 63. $y=x^2, 8x=y^2.$

64. $y=x, y=\frac{1}{x^2}, x=2.$

Применение ОИ к решению некоторых физических задач.

65. Рассчитать массу стержня длиной $l=10$ м, если линейная плотность стержня изменяется по закону $\rho=2+0{,}1x^3$ кг/м, где x – расстояние от одного из концов стержня.

66. Резервуар в форме прямого кругового конуса с высотой 12 м и радиусом основания 8 м заполнен водой. Найти работу, которую требуется затратить, чтобы выкачать воду из резервуара.

67. Вычислить величину силы, с которой вода воздействует на пластинку, имеющую форму параболического сегмента, погруженную вертикально в воду, вершина которого лежит на поверхности воды, а основание, равное 1,2 м, находится на глубине 2 м.

Минимум для аудиторной работы

Свойства ОИ: 1; 2; 3; 6; 7; 8; 10.

Формула Ньютона – Лейбница: 15; 16; 18; 20; 23; 24.

Интегрирование по частям в ОИ: 25; 26; 27; 29.

Замена переменной в ОИ: 32; 33; 35; 36.

Вычисление площадей с помощью ОИ: 37; 38; 42; 43; 44; 46.

Вычисление длины дуги плоской линии с помощью ОИ: 49; 52; 53.

Вычисление объемов с помощью ОИ: 57; 59; 60; 62.

Применение ОИ к решению некоторых физических задач: 65; 66.

3.1.4. Ответы

1. $\int_{-1}^{2} x^3 dx > 0$. **2.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x \ln x\, dx < 0$. **3.** $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\, dx > 0$. **4.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$. **6.** $\int_1^2 \ln x\, dx > \int_1^2 (\ln x)^2\, dx$. **7.** $\int_3^4 \ln x\, dx < \int_3^4 (\ln x)^2\, dx$.

8. $3 \le \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx \le 5$. **9.** $\frac{20}{29} \le \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x}{1+x^2} dx \le 1$. **10.** 5. **11.** $\frac{2}{3}$. **12.** $x+3x^2$.

13. $2\sin 2x$. **14.** $2\ln^2 2x - \ln^2 x$. **15.** $\frac{26}{81}$. **16.** $\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{6}$. **17.** $\frac{1}{4}$.

18. $\operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{4}$. **19.** $\frac{4}{3}$. **20.** $\frac{(e-1)^4}{4}$. **21.** 2. **22.** $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$. **23.** $\frac{2}{7}$.

24. 1. **25.** $1-2e^{-1}$. **26.** $2\sqrt{2}-4+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. **27.** $-\frac{1}{2}\pi^2$. **28.** $\frac{1}{12}\pi+\frac{1}{2}\sqrt{3}-1$.

29. $\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{4}\ln 5$. **30.** $e-2$. **31.** $\frac{1}{5}e^{\pi}-\frac{2}{5}$. **32.** $4-2\ln 3$. **33.** $2\ln 2+7$.

34. $\frac{32}{3}$. **35.** $\frac{231}{10}$. **36.** $\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$. **37.** $\frac{32}{3}$. **38.** $\frac{125}{6}$. **39.** 3. **40.** $\frac{125}{6}$.

41. $\frac{35}{2}-6\ln 6$. **42.** $\frac{4}{3}$. **43.** $\frac{64}{3}$. **44.** $\frac{3\pi}{2}$. **45.** 27π. **46.** $\frac{\pi}{3}$. **47.** $\frac{\pi}{4}$. **48.** $\frac{19\pi}{2}$.

49. $\ln\frac{3e}{2}$. **50.** $\frac{40\sqrt{40}-13\sqrt{13}}{27}$. **51.** $2e-2e^{-1}$. **52.** $2\sqrt{3}$. **53.** $2\sqrt{3}$. **54.** 5π.

55. $\frac{56\pi a^2}{3}$. **56.** $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{\left(1+a^4\right)^3}-1\right)$. **57.** $\frac{16\pi}{15}$. **58.** $\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$.

59. $\frac{\pi}{3}-\pi\ln 2$. **60.** 12π. **61.** $\frac{416\pi}{15}$. **62.** $\frac{64\pi}{5}$. **63.** $\frac{24\pi}{5}$. **64.** $\frac{14\pi}{3}-\pi\ln 4$.

65. 270 кг. **66.** $2304g\pi$. **67.** $\frac{100g}{9}$.

3.2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.2.1. Теоретический минимум

1. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку.
2. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
3. Свойства несобственных интегралов.

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Как вытекает из определения ОИ, интегрируемая функция должна: а) быть ограниченной, б) рассматриваться на конечном интервале $[a,\, b]$. В приложениях часто возникает необходимость интегрировать как функции, определенные на бесконечном промежутке, так и функции, являющиеся неограниченными.

В этих двух случаях непосредственно применить ОИ нельзя и, таким образом, возникает потребность в обобщении понятия ОИ, что приводит к понятию несобственных интегралов. В соответствии с вышесказанным существует два основных типа несобственных интегралов:

1) интегралы по бесконечному промежутку;

2) интегралы от неограниченных функций.

Начнем с ***интегралов по бесконечному промежутку***. Пусть I – *один из промежутков вида*: $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$. Пусть далее на промежутке I определена функция $f(x)$, которая является *интегрируемой* на любом конечном промежутке, содержащемся в I. Тогда *несобственный интеграл* по промежутку I рассчитывается следующим образом:

1) $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{a} f(x)dx$, если $I=(-\infty, a]$;

2) $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{b}^{B} f(x)dx$, если $I=[b, +\infty)$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} f(x)dx$, если $I=(-\infty,+\infty)$,

если предел существует и конечен, в этом случае соответствующий интеграл называется ***сходящимся***; если предел не существует или не является конечным, интеграл считается ***расходящимся***.

Если наряду со сходимостью интеграла от функции $f(x)$ по промежутку I имеет место и сходимость интеграла от модуля этой функции, то такая сходимость называется *абсолютной*.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x^n} = \lim_{B\to+\infty} \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-n+1}}{1-n}\right|_1^B, & n\neq 1, \\ \ln|x|\Big|_1^B, & n=1 \end{cases} = \begin{cases} \text{сходится к } \dfrac{1}{n-1} \text{ при } n>1, \\ \text{расходится к } +\infty \text{ при } n\leq 1. \end{cases}$$

Пример. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение. Получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} +$$

$$+ \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{A\to-\infty} \left(-2\sqrt{1-x}\Big|_A^{-1} \right) =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{1-A} \right) = +\infty.$$

Итак, интеграл расходится.

При исследовании сходимости несобственных интегралов представляют интерес ***признаки сравнения несобственных интегралов***:

1) *непредельный*: пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in I$; тогда

а) если сходится интеграл от функции $g(x)$ по промежутку I, то и сходится и интеграл от функции $f(x)$ по этому промежутку;

б) если же расходится интеграл от функции $f(x)$ по промежутку I, то и расходится и интеграл от функции $g(x)$ по этому промежутку;

2) *предельный*: если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, где $c=-\infty$ в случае $I=(-\infty, a]$, $c=+\infty$ для $I=\left[b, +\infty\right)$ и $c=\infty$ для $I=\left(-\infty, +\infty\right)$, то несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ по промежутку I сходятся (или расходятся) одновременно.

Интегралы вида $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^n}$, $\int\limits_{-\infty}^{-1}\dfrac{dx}{x^n}$ часто используются при применении признаков сравнения для несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{-2}\dfrac{4x^3-2x^2+5}{x^6-2x^5+x^2+3}dx.$

Решение. Несложно убедиться, что знаменатель подынтегральной функции строго больше нуля на промежутке интегрирования, следовательно, подынтегральная функция непрерывна на промежутке интегрирования.

Воспользуемся предельным признаком сходимости и сравним исходный интеграл со сходящимся интегралом $\int\limits_{-\infty}^{-2}\dfrac{dx}{x^3}$. Для этого найдем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-2x^2+5}{x^6-2x^5+x^2+3}:\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^6-2x^5+5x^3}{x^6-2x^5+x^2+3}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^6\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{3}{x^6}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{3}{x^6}}=4\neq 0.$$

Следовательно, по предельному признаку сходится и исходный интеграл.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть на промежутке $I=(a, b]$ или $I=[a, b)$ или $I=[a, b]$ задана функция f, которая имеет на этих промежутках единственную «особенность» – точку c, в окрестности которой функция не является ограниченной. Точка $c=a$ для первого, $c=b$ для второго и $c\in(a,b)$ для третьего промежутков. Предположим далее, что функция f интегрируема на любом замкнутом промежутке, целиком лежащем в I. Тогда можно определить несобственные интегралы следующего вида:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, если $I=(a,b]$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если $I=[a,\, b)$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right)$, если $I=[a,b]$,

если предел существует и конечен, в этом случае соответствующий интеграл называется ***сходящимся***; если предел не существует или не является конечным, интеграл считается ***расходящимся***.

Если наряду со сходимостью интеграла от функции $f(x)$ по промежутку I имеет место и сходимость интеграла от модуля этой функции, то такая сходимость называется *абсолютной*.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^n}$.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to+0}\begin{cases}\left.\dfrac{x^{-n+1}}{1-n}\right|_\varepsilon^1, & n\neq 1,\\ \ln|x|\Big|_\varepsilon^1, & n=1\end{cases} = \begin{cases}\text{сходится к } \dfrac{1}{1-n} \text{ при } n<1,\\ \text{расходится при } n\geq 1.\end{cases}$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-2\sqrt{1-x}\,\right]\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\right)\Big|_0^1 = 2.$$

Таким образом, интеграл сходится к 2.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int\limits_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} dx \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\left[3\sqrt[3]{x} \right]\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \left[3\sqrt[3]{x} \right]\Big|_{\varepsilon_2}^{1} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(-3\sqrt[3]{\varepsilon_1} + 3 + 3 - 3\sqrt[3]{\varepsilon_2} \right) = 6.$$

Значит, интеграл сходится к 6.

При исследовании сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций представляют интерес ***признаки сравнения несобственных интегралов***:

1) *непредельный*: пусть $0 \le f(x) \le g(x),\ x \in I$; тогда

а) если сходится интеграл от функции $g(x)$ по промежутку I, то и сходится и интеграл от функции $f(x)$ по этому промежутку;

б) если же расходится интеграл от функции $f(x)$ по промежутку I, то и расходится и интеграл от функции $g(x)$ по этому промежутку;

2) *предельный*: если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, где $c = a$ в случае $I = (a, b]$, $c = b$ для $I = [a, b)$ и $c \in (a, b)$ для $I = [a, b]$, то несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ по промежутку I сходятся (или расходятся) одновременно.

Интеграл вида $\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^n}$ часто используется при применении признаков сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x} + x^2}$.

Решение. Нетрудно убедиться, что подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на нижнем пределе интегрирования. Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^2}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}}+x^2}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+3+x^{2-\frac{1}{4}}\right)}=$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{12}}+3+x^{\frac{7}{4}}\right)}.$$

Используя предельный признак сходимости, сравним исходный несобственный интеграл с интегралом $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}$. Для этого найдем предел:

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{12}}+3+x^{\frac{7}{4}}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{\frac{1}{12}}+3+x^{\frac{7}{4}}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Поскольку интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}$ сходится, то по предельному признаку сходимости сходится и исходный интеграл.

Свойства несобственных интегралов

Несобственные интегралы обладают всеми основными свойствами определенных интегралов, в частности свойствами линейности и аддитивности. В несобственных интегралах можно применять формулу Ньютона – Лейбница и выполнять двойную подстановку, понимая ее следующим образом: $F(x)\Big|_a^b=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)-\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$, а также выполнять интегрирование по частям и заменой переменной. Для несобственных интегралов остаются в силе основные приложения, свойственные ОИ.

Пример. Найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной слева осью Oy, снизу – осью Ox и сверху – графиком функции $y=x^2e^{-x}$, $x\in[0,\ +\infty)$.

Решение. Имеем:

$$S=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x^2,\ du=2xdx \\ e^{-x}dx=dv,\ v=-e^{-x}\end{bmatrix}=(-x^2e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=$$

$$=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x,\ du=dx \\ e^{-x}dx=dv,\ v=-e^{-x}\end{bmatrix}=2(-xe^{-x})\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=$$

$$=-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2$$

(здесь при определении несобственного интеграла дважды применено интегрирование по частям, а при вычислении первых двух подстановок – правило Лопиталя раскрытия неопределенностей).

Пример. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, которая ограничена линиями $x = 1$, $y = 0$, $y=\dfrac{1}{x}$, вокруг оси Ox.

Решение. Получаем:

$$V=\pi\int_1^{+\infty} y^2(x)\,dx=\pi\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=\pi.$$

Наряду с рассмотренными несобственными интегралами от неограниченных функций и по бесконечному промежутку, встречаются и интегралы смешанного типа.

3.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение несобственного интеграла от непрерывной функции по бесконечному промежутку.
2. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?
3. Перечислите признаки сходимости несобственных интегралов по бесконечному промежутку, которые Вы знаете.
4. Дайте определение несобственных интегралов от неограниченных функций.
5. Назовите признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций.

3.2.3. Практический минимум

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^2}.$
2. $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x}.$
3. $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-3}}.$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}e^x dx.$

5. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

6. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+3}}$.

7. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x-1)\ln^2(1-x)}$.

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

10. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x\, dx$.

11. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx$.

12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+3x^2+4}$.

14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4+\cos x}{\sqrt{x^3}}dx$.

15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^x}{x}dx$.

16. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

Минимум для аудиторной работы

1; 2; 4; 6; 7; 8; 13; 15.

3.2.4. Ответы

1. 2. **2.** Расходится. **3.** Расходится. **4.** e. **5.** Расходится. **6.** Расходится. **7.** $-\frac{1}{\ln 2}$. **8.** Расходится. **9.** $\frac{1}{2}\pi$. **10.** Расходится. **11.** $\frac{1}{4}$. **12.** 1. **13.** Сходится. **14.** Сходится. **15.** Расходится. **16.** Сходится.

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

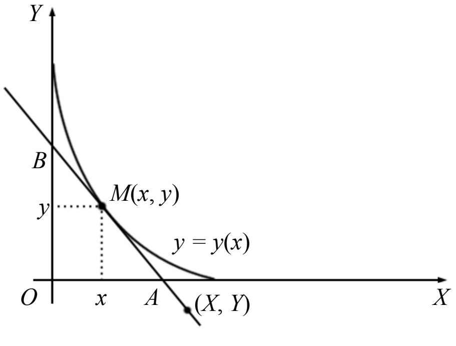
4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

4.1.1. Теоретический минимум

1. Некоторые задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения (ДУ).
2. Общие понятия теории ДУ.

Некоторые задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения (ДУ)

Геометрическая задача. Требуется найти вид кривых, в каждой точке которых отрезок касательной, заключенной между осями координат, в точке касания делится пополам.



Построим *математическую модель* задачи. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на кривой. Точку на касательной обозначим (X, Y), тогда уравнение касательной имеет вид $Y - y = y'(x)(X - x)$. Находим точку A пересечения касательной с осью Ox, полагая $Y = 0$:

$$X = x - \frac{y}{y'} \Rightarrow A\left(x - \frac{y}{y'},\ 0\right).$$

Аналогично находим точку B пересечения касательной с осью Oy, т. е. $X = 0$:

$$Y = y - xy' \;\Rightarrow\; B(0,\, y - xy').$$

Поскольку точка M – середина отрезка AB, то

$$x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{y'} + 0\right)$$

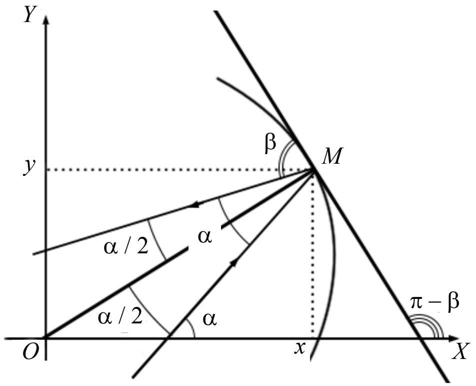
или

$$y = \frac{0 + y - xy'}{2},$$

что приводит к ДУ следующего вида:

$$xy' + y = 0. \qquad (4.1)$$

Физическая задача. Имеется точечный источник света. Какой формы надо взять отражатель, чтобы лучи, выпущенные из этого источника, вернулись параллельным лучом?



Построим *математическую модель* задачи. Поместим источник света в начало координат и направим ось Ox параллельно отраженным лучам в сторону отражателя.

Ось Oy направим через начало координат перпендикулярно Ox (не ограничивая общности, считаем, что ось Ox направлена горизонтально с положительным направлением вправо, ось Oy – вертикально вверх). Тогда точка M на отражателе получит координаты (x, y).

Проведем через точку M касательную к отражателю и нормаль. Угол между падающим и отражающим лучами обозначим α, а через β – угол между касательной и отраженным лучом.

Принимая во внимание физический закон: угол падения равен углу отражения, приходим к соотношению $\beta + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, откуда $\alpha = \pi - 2\beta$ и поэтому:

$$\frac{x}{y} = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\pi - 2\beta) = -\mathrm{tg}\,2\beta = -\frac{2\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{2y'}{1-(y')^2},$$

где $\mathrm{tg}\beta = -y'$.

Тогда $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$, откуда $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$. Из физических соображений ясно, что $yy' < 0$. Поэтому окончательно приходим к ДУ вида

$$y' = -\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}. \tag{4.2}$$

Задача о парашютисте. Маленький парашютист спускается на парашюте. По какому закону он спускается, если сопротивление воздуха пропорционально скорости? Поскольку парашютист маленький, то представим его материальной точкой массы m. Тогда, применяя второй закон Ньютона, приходим к ДУ

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\dot{x}(t), \; x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0,$$

где $x(t)$ – путь парашютиста за время t; $x(0)$ – путь; $\dot{x}(0)$ – скорость в начальный момент времени: $t = 0$.

Общие понятия теории ДУ

Уравнение относительно неизвестной функции и ее производных принято называть ***дифференциальным***. Порядок старшей производной, существенно входящей в данное ДУ, называется ***порядком*** этого ДУ.

Обычно ДУ рассматривается в некоторой области изменения своих переменных.

Если в определении ДУ искомая функция – функция одной переменной, то такое ДУ называется ***обыкновенным***; если же функция нескольких переменных, и, стало быть, производные рассматриваются частные, то тогда говорят о ДУ с частными производными.

Примеры:

1) $F'(x) = f(x)$ – (обыкновенное) ДУ первого порядка;

2) $y'' = \sin x$ – ДУ второго порядка;

3) $0 \cdot y'' + y' = \sin x$ – ДУ первого порядка;

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение колебаний струны – ДУ второго порядка с частными производными относительно неизвестной функции $u = u(x, t)$;

5) см. ДУ (4.1), (4.2);

6) уравнение вида $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ относительно неизвестной функции $y = y(x)$ задает ***общий вид*** ДУ n-го порядка, ***неразрешенного*** относительно старшей производной;

7) уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{n-1}\right) \tag{4.3}$$

задает ***общий вид*** ДУ n-го порядка, ***разрешенного*** относительно старшей производной;

8) уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y'(x) + a_n(x)\, y(x) = f(x) \tag{4.4}$$

задает ***общий вид неоднородного*** (в случае $f(x) \not\equiv 0$) и ***однородного*** (в случае $f(x) \equiv 0$) ***линейного ДУ*** (ЛДУ) n-го порядка.

Здесь $a_1(x), ..., a_n(x)$ – коэффициенты, $f(x)$ – ***правая часть*** ЛДУ (4.4). ***Решением*** (*на множестве X*) ДУ n-го порядка называется произвольная n раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, $x \in X$, удовлетворяющая этому ДУ, т. е. при подстановке которой ДУ превращается в верное тождество (на множестве X).

График решения ДУ называется ***интегральной кривой*** этого ДУ. *Решить* дифференциальное уравнение или *проинтегрировать* его – значит найти все его решения (иными словами, интегральные кривые).

Пример. Решить ДУ первого порядка $F'(x) = f(x)$.

Решение. Интегрируем: $F(x) = \int f(x)dx$.

Пример. Решить ДУ первого порядка $y' = xe^{-x}$.

Решение. Интегрируем: $y = \int xe^{-x}dx$. Интегрируем по частям:

$$y=\int xe^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x, \quad du=dx \\ e^{-x}dx=dv, v=-e^{-x} \end{bmatrix}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C.$$

Пример. Решить ДУ второго порядка $y''=\sin x$.

Решение. Интегрируем: $y'=\int \sin x dx=-\cos x+C_1$. Интегрируем повторно: $y=-\int(\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$.

Примеры показывают, что данное ДУ может иметь много (бесчисленное множество) решений. Поэтому, чтобы из всего множества выделить конкретное решение, обычно задают дополнительные условия, в частности ставится начальная задача Коши.

Начальная задача Коши. Рассмотрим ДУ (4.3) n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, и множество $X\times D$, где $X\subset\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}^n$, на котором определена правая часть уравнения (4.3). Далее предположим, что в области $X\times D$ задана произвольная точка $\left(x_0, y_0^0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}\right)\in X\times D$. В области $X\times D$ рассматривается задача: среди решений ДУ (4.3) найти такое, которое удовлетворяет следующим *начальным условиям Коши*:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0^0, \\ y'(x_0)=y_0^1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Для ДУ первого порядка $y'=f(x,y)$ задача Коши допускает удобную ***геометрическую интерпретацию***: среди интегральных кривых рассматриваемого ДУ найти ту, которая проходит через точку (x_0, y_0) заданной области $X\times D$.

Пример. Решить начальную задачу Коши для ДУ второго порядка $y''=6x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. Интегрируем: $y'=3x^2+C_1$. Интегрируем повторно: $y=x^3+C_1x+C_2$. Удовлетворяем начальным условиям:

$$\begin{cases} 0=y(0)=0+C_1\cdot 0+C_2, \\ 1=y'(0)=0+C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_2=0, \\ C_1=1, \end{matrix}$$

откуда $y=x^3+x$ – искомое решение.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $x \in X$, зависящая от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$, называется ***общим решением*** ДУ (4.3) (в заданной области $X \times D$), если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при фиксированных значениях произвольных постоянных эта функция является решением (на множестве X) этого ДУ;

2) в области $X \times D$ эта функция решает любую задачу Коши, иначе говоря, для любой точки $\left(x_0,\ y_0^0,\ y_0^1,\ ...,\ y_0^{n-1}\right)$ в области $X \times D$ система (4.5):

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, ..., C_n) = y_0^0, \\ \varphi'(x_0, C_1, ..., C_n) = y_0^1, \\ \vdots \\ \varphi^{n-1}(x_0, C_1, ..., C_n) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Пример. Найти общее решение ДУ $y''' = \dfrac{2}{x^3}$.

Решение. Трижды интегрируя: $y'' = 2\int x^{-3}dx = -x^{-2} + C_1 \Rightarrow$ $y' = -\int (x^{-2} + C_1)dx = x^{-1} - C_1x + C_2$, имеем $y = \ln|x| + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ – общее решение этого ДУ в области $X \times \mathbb{R}^2$, где $X = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq 0\}$.

Решение, получающееся из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, принято называть ***частным***.

К примеру, для ДУ $y' = 3x^2$ решение $y = x^3 + x$ является частным.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым***.

Например, для ДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ имеем: $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$, или $\int \dfrac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3\int dx$, или $3y^{\frac{1}{3}} = 3(x + C)$, откуда $y = (x + C)^3$ – общее решение. В то же время решение $y \equiv 0$ является особым, так как в каждой точке $(x_0, 0)$ этого решения нарушается единственность решения задачи Коши, т. е. через эту точку проходят две интегральные кривые: парабола $y = (x - x_0)^3$ и прямая $y \equiv 0$ (ось Ox).

Соотношение $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$ называется ***общим интегралом*** ДУ, если оно определяет общее решение $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ этого ДУ как неявную функцию переменной x.

4.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Что называется решением ДУ?
3. Понятие общего, частного и особого решения ДУ.
4. Приведите примеры ДУ первого, третьего и четвертого порядка.
5. Что называется интегральной кривой ДУ?
6. Может ли ДУ $y' = f(x)$ иметь конечное число решений?
7. Могут ли интегральные кривые ДУ $y' = f(x)$ пересекаться?
8. Существует ли интегральная кривая уравнения $y' = ky$, проходящая через точки: а) $M(1, 2)$; б) $M(1, 2)$ и $N(2, 3)$; в) $M(1, 2)$ и $P(1, 3)$?

4.1.3. Практический минимум

Проверить, является ли заданная функция решением ДУ:

1. $y = e^{2x}$, $y' = 2y$.
2. $y = e^{-x} + 1$, $\dfrac{dy}{dx} = -y + 1$.
3. $v = \dfrac{1}{3(t+1)}$, $v' = 3v^2$.
4. $y = e^{-3x} + e^x$, $y' + 3y = 3e^x$.
5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + C}}$, $y' = -\dfrac{1}{2}y^3$.
6. $y = -\dfrac{2}{x^2 + C}$, $dy = xy^2dx$.

Найти значения k, при которых заданная функция является решением данного уравнения:

7. $y = kx + 1$, $y' = 2$.
8. $x = kt^2$, $x' = 12t$.
9. $y = e^{kt}$, $y' = y$.
10. $x = e^{-t}$, $x' = kx$.
11. $v = t^3$, $v' = kt^2$.
12. $y = \dfrac{1}{x+1}$, $dy = ky^2dx$.

Составить дифференциальные уравнения, решениями которых являются функции:

13. $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C$.
14. $y = x^3 + C$.
15. $y = Ce^{2x}$.
16. $y = Ce^{-2x+1}$.

17. $y = Ce^{-x} + e^{3x}$.

18. $y = Cx^3$.

19. $y = -\dfrac{1}{x+C}$.

20. $y = (x - C)^2$.

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 7; 11; 13; 15; 19.

4.1.4. Ответы

1. Да. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** Да. **7.** 2. **8.** 6. **9.** 1. **10.** –1. **11.** 3. **12.** –1. **13–20.** Указание: продифференцировать функцию и исключить константу C из производной (если она в ней содержится).

4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

4.2.1. Теоретический минимум

1. Общие понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
2. ДУ с разделяющимися переменными.
3. Однородные ДУ.
4. Линейные ДУ (ЛДУ первого порядка).
5. Уравнение Бернулли.
6. Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка.

Общие понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Общий вид ДУ первого порядка: $F(x, y, y') = 0$.

Общий вид ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$y' = f(x, y). \tag{4.6}$$

Начальная задача Коши: найти решение ДУ (4.6), удовлетворяющее начальному условию:

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.7}$$

т. е. найти интегральную кривую ДУ (4.6), проходящую через точку (x_0, y_0).

Вид общего решения: $y = \varphi(x, C)$.

Теорема существования и единственности решения. Предположим, что правая часть $f(x,y)$ ДУ (4.6) непрерывна в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости по совокупности переменных, вместе с частной производной $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Тогда в некоторой окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ решение задачи Коши (4.6), (4.7) существует, и это решение единственно, т. е. в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует одна и только одна интегральная кривая ДУ (4.6), проходящая через эту точку.

Рассмотрим теперь конкретные примеры ДУ первого порядка.

ДУ с разделяющимися переменными

Так называют дифференциальные уравнения вида

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

т. е. ДУ вида (4.6), где правая часть есть произведение функции «только от *x*» на функцию «только от *y*», или сводящиеся к ним ДУ вида $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$.

ДУ с разделяющимися переменными интегрируем путем разделения переменных: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ (переменные с x в одной части, а переменные с y – в другой) и последующим интегрированием: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. В результате получим либо $y = \varphi(x, C)$ – общее решение, либо общий интеграл.

Пример. Проинтегрировать ДУ (4.1): $xy' + y = 0$.

Решение. Разделяем переменные $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$ и интегрируем: $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \;\Rightarrow\; y = \dfrac{C}{x}$ – общее решение (в области, где $x \neq 0$) – семейство интегральных кривых – семейство гипербол.

Однородные ДУ

Так называют ДУ следующего вида:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где $f(tx, ty) = f(x, y)$ для любого t (условие однородности), или сводящиеся к ним.

Однородное дифференциальное уравнение интегрируется (сводится к ДУ с разделяющимися переменными) подстановкой $y = ux$, $y' = xu' + u$. Действительно, применяя подстановку и используя условие однородности: $xu' + u = f(x, xu) = f(1, u)$, приходим к *ДУ с разделяющимися переменными* $xu' = f(1, u) - u$, разделяя которые и интегрируя: $\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x}$, получаем: $u = u(x, c) \Rightarrow y = xu(x, c)$ – общее решение (в некоторой области).

Пример. Проинтегрировать ДУ (4.2): $y' = -\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = f(x, y)$.

Решение. Проверяем условие однородности:

$$f(tx, ty) = -\frac{tx + \sqrt{tx^2 + ty^2}}{ty} = f(x, y).$$

Оно выполняется и, следовательно, (4.2) – однородное ДУ. Применяя подстановку $y = ux$ и интегрируя, получаем:

$$xu' + u = -\frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u} \Rightarrow \quad xu' = -\frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u} - u = -\frac{1 + u^2 + \sqrt{1 + u^2}}{u} \Rightarrow$$

$$\int \frac{udu}{1 + u^2 + \sqrt{1 + u^2}} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1 + \sqrt{1 + u^2}} \frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\ln\left|1 + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow \left(\sqrt{1 + u^2}\right)^2 = \left(\frac{C}{x} - 1\right)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{C^2}{x^2} - \frac{2C}{x} \Rightarrow$$

$y^2 = C^2 - 2Cx$ – семейство интегральных кривых – семейство парабол.

Линейные ДУ (ЛДУ первого порядка)

Так называют ДУ вида

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0,$$

где $a(x) \neq 0$.

ЛДУ интегрируется заменой (методом u на v):

$$y = uv, \;\; y' = u'v + uv',$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция; $v = v(x)$ – вспомогательная функция.

Выполняя подстановку: $a(x)(u'v+uv')+b(x)(uv)+c(x)=0$ и вынося u за скобку, получаем: $a(x)u'v+u\big(a(x)v'+b(x)v\big)+c(x)=0.$ Выбирая вспомогательную функцию так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, приходим к системе ДУ с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} a(x)v'+b(x)v=0, \\ a(x)u'v+c(x)=0. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение: $\dfrac{du}{v}=-\dfrac{b(x)}{a(x)}dx \Rightarrow$ $\ln|v|=-\int\dfrac{b(x)}{a(x)}dx,$ получаем: $v=e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, приходим к ДУ с разделяющимися переменными:

$$a(x)u'e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}+c(x)=0,$$

откуда $du=-\dfrac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}dx \Rightarrow u=C-\int\dfrac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}dx \Rightarrow$

$$y=uv=\left(C-\int\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}dx\right)e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx} \text{ – общее решение.}$$

Помнить эту формулу для общего решения не обязательно, достаточно уметь применять метод u на v.

Пример. Найти общее решение ДУ $xy'+y=1$.

Решение 1. Это ДУ линейное. Применяем метод u на v: $y=uv$, тогда

$$x(u'v+uv')+uv=1 \Rightarrow xu'v+u\underbrace{\left(xv'+v\right)}_{=0}=1 \Rightarrow \begin{cases} xv'+v=0, \\ xu'v=1, \end{cases}$$

откуда $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \Rightarrow v=\dfrac{1}{x}.$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем:

$$u'=1 \Rightarrow du=dx \Rightarrow u=x+C.$$

Тогда $y = uv = (x + C)\dfrac{1}{x} = \dfrac{C}{x} + 1$ – общее решение (в области $x \neq 0$).

Решение 2. Это ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$x\frac{dy}{dx} = 1 - y \Rightarrow \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y - 1 = \frac{C}{x},$$

откуда $y = \dfrac{C}{x} + 1$ – общее решение.

Решение 3. Заметим, что $xy' + y = (xy)' = 1$, откуда $xy = x + C$ и $y = 1 + \dfrac{C}{x}$ – общее решение.

Рассмотренный пример показывает, что одно и то же ДУ может относиться к различным типам и, стало быть, интегрироваться различными стандартными (и даже нестандартными) методами.

Уравнение Бернулли

Так называют ДУ следующего вида:

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)\,y^n = 0.$$

Это уравнение также можно проинтегрировать, используя $y = uv$ и повторяя схему интегрирования ЛДУ. Действительно, приходим к системе

$$\begin{cases} a(x)v' + b(x)v = 0, \\ a(x)u'v + c(x)u^n v^n = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения (ДУ с разделяющимися переменными) системы находим вспомогательную функцию v, после подстановки которой во второе уравнение вновь получаем ДУ с разделяющимися переменными и т. д.

При $n = 0$ уравнение Бернулли превращается в ЛДУ, при $n = 1$ – и в ЛДУ, и в ДУ с разделяющимися переменными.

Пример. Проинтегрировать ДУ $xy' - y + 4x^3y^2 = 0$.

Решение 1. Это ДУ Бернулли: $a(x) = x$, $b(x) = -1$, $c(x) = 4x^3$, $m = 2$. Применяем метод u на v: $y = uv$.

Тогда

$$x(u'v+uv')-uv+4x^3u^2v^2=0 \Rightarrow$$

$$xu'v+u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}=-4x^3u^2v^2 \Rightarrow \begin{cases} xv'-v=0, \\ xu'v=-4x^3u^2v^2, \end{cases}$$

откуда $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=\ln|x| \Rightarrow v=x.$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем:

$$u'=-4x^3u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2}=-4x^3dx \Rightarrow -\frac{1}{u}=-x^4-C.$$

Тогда $y=uv=\dfrac{1}{x^4+C}x=\dfrac{x}{x^4+C}$ – общее решение (в некоторой области).

Решение 2. Заметим, что

$$xy'-y=-4x^3y^2 \Rightarrow \frac{y-xy'}{y^2}=4x^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)'=4x^3.$$

Интегрируя, получаем: $\dfrac{x}{y}=x^4+C \Rightarrow y=\dfrac{x}{x^4+C}$ – общее решение.

При определении типов ДУ первого порядка $y'=f(x,y)$ по виду правой части удобно пользоваться следующей таблицей.

Типы ДУ первого порядка

$f(x,y)=$	Тип (вид) ДУ	Метод интегрирования
$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$	ДУ с разделяющимися переменными	Разделяем переменные и интегрируем
$f(x,y)=f(tx,ty)$	Однородное ДУ	Подстановка $y=ux$
$f(x,y)=\rho(x)y+q(x)$	ЛДУ	Подстановка $y=uv$
$f(x,y)=\rho(x)y+q(x)y^n$	Уравнение Бернулли	Подстановка $y=uv$

Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка

Из геометрического смысла производной и ДУ (4.6) получаем $y'=f(x,y)=\operatorname{tg}\alpha$ – тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику интегральной кривой $y=y(x)$ в точке (x,y) для любой точки (x,y), в которой правая часть ДУ (4.6) определена.

Таким образом, ДУ (4.6) задает на плоскости (в области $X \times D \subset \mathbb{R}^2$) ***поле направлений*** – *поле касательных* к интегральным кривым, кроме направления параллельно оси Oy. Если же ДУ записать в более общем виде (ДУ в дифференциалах): $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, что равносильно совокупности двух ДУ: $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ (здесь $y = y(x)$) или $\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ (здесь $x = x(y)$), то можно рассматривать и направление параллельно оси Oy и, таким образом, вместо этих двух ДУ первого порядка можно задать одно ДУ в дифференциалах, что геометрически означает поле направлений в некоторой области $X \times D \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости.

Пример. Найти интегральные кривые ДУ $ydx + xdy = 0$.

Решение. Это ДУ в дифференциалах равносильно двум ДУ с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$. Интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$y = \frac{C}{x} \text{ или } x = \frac{C}{y}.$$

Таким образом, семейство интегральных кривых состоит из гипербол $y = \frac{C}{x}$ и прямых $x = 0$ (ось Oy) и $y = 0$ (ось Ox).

В этом геометрическом подходе представляется важным понятие ***изоклин***, т. е. кривых, на которых направление одинаково. Уравнение таких кривых имеет следующий вид: $t\text{g}\alpha = f(x, y) = k = \text{const}$.

Пример. Найти уравнение изоклин ДУ $xdx + ydy = 0$.

Решение. Полагая $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = k$, получаем уравнение изоклин: $y = -\frac{1}{k}x$ – семейство прямых, проходящих через начало координат, в каждой точке которых направление поля $t\text{g}\alpha = k$. Интегральные же кривые должны касаться этих направлений. Можно убедиться, что эти кривые – окружности $x^2 + y^2 = \text{const}$.

4.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение ДУ первого порядка.

2. Перечислите разрешимые типы ДУ первого порядка и приведите пример каждого из них.

3. Запишите общий вид ДУ с разделяющимися переменными и приведите пример.

4. Напишите общий вид однородного ДУ и продемонстрируйте метод его решения.

5. Запишите общий вид линейного ДУ и приведите метод его решения.

6. Дайте определение уравнения Бернулли. Продемонстрируйте метод его решения.

7. Что такое общее решение ДУ первого порядка?

8. Сформулируйте задачу Коши.

9. Что называется интегральными кривыми?

10. Как получить уравнение изоклин?

11. Может ли множество всех решений ДУ с разделяющимися переменными иметь вид $y = C_1 x + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные?

12. Может ли решение уравнения $y' = y$, не обращающееся в нуль ни для каких значений аргумента, иметь точки экстремума?

13. Какой знак имеет коэффициент k, если решение уравнения $y' = ky$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$: а) возрастает; б) убывает?

4.2.3. Практический минимум

Решить уравнения:

1. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0,\ \ y\left(\sqrt{3}\right) = 0.$

2. $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0,\ \ y\left(\sqrt{8}\right) = 1.$

3. $y' = 5\sqrt{y},\ \ y(0) = 25.$

4. $\operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e.$

5. $(y - 4)dx - (x + 1)dy = 0,\ y(1) = 10.$

6. $xy' - y = 0,\ y(-2) = 4.$

7. $y' + \dfrac{x \sin x}{y \cos y} = 0.$

8. $y\sqrt{1 + x^2}\, y' - \sqrt{1 - y^2} = 0.$

9. $y' \sin x - y \ln y = 0.$

10. $xyy' = 1 - x^2.$

11. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$

12. $y\ln y dx + xdy = 0,\ y(1) = e.$

13. $ye^{2x}dx + (1 + e^{2x})dy = 0.$

14. $(1 + y^2)dx - xydy = 0,\ y(1) = \sqrt{3}.$

15. $(x + 2y)dx - xdy = 0.$

16. $xy' = y\ln\frac{y}{x}.$

17. $(y - x)dx - (y + x)dy = 0.$

18. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0.$

19. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}.$

20. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$

21. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0,\ y(4) = 0.$

22. $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = x,\ y(1) = 0.$

23. $(x + 3y)y' = x - y,\ y(0) = 1.$

24. $(x + y)x^2\,dx - y^2(x + y)dy = 0.$

25. $(2x + y)dy - (x + 2y)dx = 0.$

26. $ydx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$

27. $(4xy + x^2)dy - 2y^2dx = 0.$

28. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$

29. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

30. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}.$

31. $\left(\sqrt{xy} - x\right)dy + ydx = 0,\ y(1) = 1.$

32. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 1.$

33. $y' - y = e^x.$

34. $xy' - 2y = x^3 + x.$

35. $y'\sin x - y\cos x = \sin x - x\cos x.$

36. $2xy' - y = 3x^2,\ y(1) = -1.$

37. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x,\ y\left(\sqrt{2}\right) = 1.$

38. $(x + 1)dy - \left(2y + (x + 1)^4\right)dx = 0,\ y(0) = \frac{1}{2}.$

39. $y' - y\,\mathrm{ctg}x = \sin x.$

40. $xy' + y = e^x,\ y(1) = e.$

41. $y' + y = x.$

42. $xy' - 4y = 2x^2 - 3x.$

43. $xy' + 2y = 2\sin x + x\cos x.$

44. $y' - 2y = e^{-x},\ y(0) = -1.$

45. $y'\cos x - y\sin x = -x\sin x + \cos x,\ y(0) = 2.$

46. $xy + y'(a^2 - x^2) = a^2,\ y(0) = a.$

47. $y - xy' = \frac{x}{\cos\frac{y}{x}}.$

48. $y^2dx + x^2dy = xy(xdy - ydx).$

49. $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}.$ 50. $2y' + y = \frac{x}{y}.$

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 5; 8; 9; 11; 13; 15; 16; 17; 19; 20; 21; 23; 29; 33; 36; 39; 40; 47; 49.

4.2.4. Ответы

1. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3.$ **2.** $2\sqrt{1+x^2}+\ln y^2+y^2=7.$ **3.** $y=\frac{25}{4}(x+2)^2.$ **4.** $x=e^{\sin y}.$ **5.** $y=3x+7.$ **6.** $y=-2x.$ **7.** $y\sin y+\cos y=$ $=x\cos x-\sin x+C.$ **8.** $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\sqrt{1-y^2}=C.$ **9.** $\ln y = C\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$ **10.** $y=\pm\sqrt{2\ln Cx - x^2}.$ **11.** $e^s-1=Ce^{t+s}.$ **12.** $\ln y=\frac{1}{x}.$ **13.** $y=\frac{C}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$ **14.** $2x=\sqrt{1+y^2}.$ **15.** $y=Cx^2-x.$ **16.** $y=xe^{Cx+1}.$ **17.** $\ln\left|\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=$ $=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$ **18.** $\ln|x|=C-\sqrt{\frac{y}{x}}.$ **19.** $\sin\frac{y}{x}=Cx.$ **20.** $y^2=2x^2\ln Cx.$ **21.** $y^2=x^2-4x.$ **22.** $\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$ **23.** $3y^2+2yx-x^2=3.$ **24.** $x^3-y^3=C.$ **25.** $x+y=C(x-y)^3.$ **26.** $\frac{y^2\left(\sqrt{y^2+x^2}-x\right)}{\sqrt{y^2+x^2}+x}=C.$ **27.** $2y^2+yx=Cx.$ **28.** $\sin\frac{y}{x}=\ln\frac{C}{x}.$ **29.** $e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx.$ **30.** $y=x(e^{Cx}-1).$ **31.** $\ln y+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2.$ **32.** $y^2=x^2-\frac{3}{8}x^3.$ **33.** $y=(x+C)e^x.$ **34.** $y=x^2-x+Cx^2.$ **35.** $y=x+C\sin x.$ **36.** $y=x^2-2\sqrt{x}.$ **37.** $y=x^2-1.$ **38.** $y=\frac{(x+1)^4}{2}.$ **39.** $y=(x+C)\sin x.$ **40.** $y=\frac{e^x}{x}.$ **41.** $y=x-1+Ce^{-x}.$ **42.** $y=Cx^4+x-x^2.$ **43.** $y=\sin x+\frac{C}{x^2}.$ **44.** $y=-\frac{e^{2x}}{3}(e^{-3x}+2).$

45. $y=\dfrac{x\cos x+2}{\cos x}$. **46.** $y=\sqrt{a^2-x^2}\left(\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)+1\right)$.

47. $\sin\dfrac{y}{x}=\ln\left(\dfrac{C}{x}\right)$. **48.** $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\ln\left(\dfrac{Cx}{y}\right)$. **49.** $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{4}\right|=C-2\sin\dfrac{x}{2}$.

50. $y=\pm e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{xe^x-e^x+C}$.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ЕГО ПОНИЖЕНИЕ

4.3.1. Теоретический минимум

1. Общие понятия.
2. ДУ второго порядка, в котором отсутствует неизвестная функция.
3. ДУ второго порядка, в котором отсутствует независимая переменная.

Общие понятия

$F(x,\,y,\,y',\,y'')=0$ – общий вид ДУ второго порядка.

$y''=f(x,\,y,\,y')$ – общий вид ДУ второго порядка, разрешенного относительно старшей производной.

$\begin{array}{l} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_0^1 \end{array}$ – начальные условия Коши.

$y=\varphi(x,\,C_1,C_2)$ – вид общего решения.

Существует два принципиально различных случая понижения порядка ДУ второго порядка – это, когда 1) отсутствует неизвестная функция y и 2) отсутствует независимая переменная x. Рассмотрим эти случаи.

ДУ второго порядка, в котором отсутствует неизвестная функция

Рассмотрим ДУ вида $F(x,\,y',y'')=0,$ в котором отсутствует неизвестная функция y. Выполним замену неизвестной функции:

$$y'=z=z(x),\;\; y''=z'=z'_x=\frac{dz}{dx}.$$

Тогда ДУ второго порядка сводится к ДУ первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

Интегрируя полученное ДУ первого порядка, находим его общее решение $z = \varphi(x, C_1)$ или в исходных обозначениях:

$$z = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные: $dy = \varphi(x, C_1)dx$ и интегрируем:

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx = \psi(x, C_1, C_2).$$

В результате получаем общее решение $y = \psi(x, C_1, C_2)$ исходного ДУ второго порядка.

Аналогичные идеи понижения порядка можно применять и для ДУ более высокого порядка, чем второй.

Пример. Найти общее решение ДУ $x y'' + y' = 1$.

Решение. ДУ второго порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует неизвестная функция. Выполняем замену неизвестной функции: $y' = z = z(x)$. Тогда $y'' = z'_x = z'$ и исходное ДУ второго порядка сводятся к ДУ первого порядка $x z' + z = 1$, интегрируя $(x z)' = 1 \Rightarrow x z = x + C_1 \Rightarrow z = \dfrac{C_1}{x} + 1$ которое, получаем его общее решение. Возвращаемся к исходным обозначениям: $z = y' = \dfrac{C_1}{x} + 1$. Интегрируя полученное ДУ первого порядка, получаем: $y = C_1 \ln|x| + x + C_2$ – общее решение исходного ДУ второго порядка.

Пример. Получить общее решение ДУ $y''' - y'' = 0$.

Решение. ДУ третьего порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует неизвестная функция и ее производная. Выполняем замену неизвестной функции: $y'' = z$. Тогда $y'''_{xxx} = \left(y''\right)'_x = z'_x = z'$ и исходное ДУ третьего порядка сводится к ДУ первого порядка $z' - z = 0$, интегрируя $\dfrac{dz}{z} = dx \Rightarrow \ln|z| = x + \ln|C_1| \Rightarrow$ $z = e^x C_1$ которое, получаем его общее решение. Возвращаемся к исходным обозначениям: $z = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = y'' = C_1 e^x$. Дважды интегрируя полученное ДУ второго порядка, получаем: $y' = C_1 e^x + C_2 \Rightarrow$ $y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$ – общее решение исходного ДУ третьего порядка.

ДУ второго порядка, в котором отсутствует независимая переменная

Рассмотрим ДУ вида $F(y, y', y'') = 0$, в котором отсутствует независимая переменная *x*. Выполним замену неизвестной функции:

$$y' = z = z(y),$$

$$y'' = z'z = z'_y z = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Тогда ДУ второго порядка сводится к ДУ первого порядка $F(y, z, z'z) = 0$.

Интегрируя полученное ДУ первого порядка, находим его общее решение $z = \varphi(y, C_1)$ или в исходных обозначениях:

$$z = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные: $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$ и интегрируем:

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \psi(y, C_1, C_2).$$

В результате получаем общий интеграл $\psi(y, C_1, C_2) - x = 0$ исходного ДУ второго порядка. Если же в этом ДУ считать независимой переменной *y*, а *x* – ее функцией, то для такого уравнения функция $x = \psi(y, C_1, C_2)$ будет его общим решением.

Пример. Найти общее решение ДУ $y\,y'' - \left(y'\right)^2 = 0$.

Решение. ДУ второго порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует независимая переменная. Выполняем замену неизвестной функции: $y' = z = z(y)$. Тогда $y'' = z'_y z = z'z$ и исходное ДУ сводится к ДУ первого порядка $yzz' - z^2 = z(yz' - z) = 0$, что в свою очередь приводит к совокупности ДУ: либо $z = \frac{dy}{dx} = 0$, либо $yz' - z = 0$ (ДУ с разделяющимися переменными).

Интегрируем эту совокупность: либо $y = C = \text{const}$, либо $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow z = C_1 y.$ Возвращаемся в последнем уравнении к исходным обозначениям: $z = y' = \frac{dy}{dx} = C_1 y$ и интегрируем: $\frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \Rightarrow |y| = e^{\ln|C_2|}\, e^{C_1 x} \Rightarrow$ $|y| = |C_2|\, e^{C_1 x}$, откуда с учетом произвольности (знака) C_2 получаем $y = C_2\, e^{C_1 x}.$ Учитывая, что из этого решения при $C_2 = C,\ C_1 = 0$ получается ранее найденное решение $y = C = \text{const}$ в качестве частного случая, то объединяя эти решения, запишем общее решение (в некоторой области) исходного ДУ второго порядка в виде $y = C_2\, e^{C_1 x}$.

Рассмотренный подход к понижению порядка ДУ можно распространить и на ДУ более высокого порядка, чем второй.

Сравнивая два рассмотренных случая понижения порядка ДУ второго порядка, отметим, что в обоих случаях используется переход к новой неизвестной функции: $z = y'$, но в первом случае независимая переменная остается прежней – переменной x, а во втором случае независимой переменной становится переменная y. В результате общее решение в первом случае получается в виде $y = \psi(x, C_1, C_2)$, а во втором случае – в виде $x = \psi(y, C_1, C_2)$.

Отметим также, что среди рассматриваемых ДУ часто бывают ДУ, неразрешенные относительно старшей производной, и случается, что общие решения не всегда описывают *полные* решения (все множество интегральных кривых) таких ДУ. Поэтому при интегрировании этих ДУ следует более внимательно отслеживать возможную потерю их решений.

Для удобства ниже параллельно излагаются оба случая понижения порядка ДУ второго порядка.

Отсутствует *y*	**Отсутствует *x***
Рассмотрим ДУ вида:	
$F(x, y', y'') = 0$	$F(y, y', y'') = 0$

Выполняем замену неизвестной функции (переменной):

$y' = z = z(x),\ \ y'' = z' = \frac{dz}{dx}$	$y' = z = z(y),\ \ y'' = z'z = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$

Тогда ДУ второго порядка сводится к ДУ первого порядка:

$F(x, z, z') = 0$ $\qquad$ $F(y, z, z'z) = 0$

Интегрируя полученное ДУ первого порядка, находим его общее решение:

$z = \varphi(x, C_1)$ $\qquad$ $z = \varphi(y, C_1)$

Возвращаемся к исходным обозначениям:

$z = \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$ $\qquad$ $z = \dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$

Получили ДУ с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные:

$dy = \varphi(x, C_1)dx$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$

и интегрируем:

$y = \int \varphi(x, C_1)dx = \psi(x, C_1, C_2)$ $\qquad$ $\psi(y, C_1, C_2) = \int \dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x$

В результате получаем:

общее решение $\qquad$ общий интеграл

$y = \psi(x, C_1, C_2)$ $\qquad$ $\psi(y, C_1, C_2) - x = 0$

или общее решение

$x = \psi(y, C_1, C_2)$

исходного ДУ второго порядка.

4.3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение ДУ второго порядка.
2. Перечислите виды ДУ второго порядка.
3. Может ли ДУ второго порядка содержать: а) вторую производную функции; б) первую производную; в) искомую функцию; г) независимую переменную в явном виде?
4. Запишите общий вид Д У второго порядка, в котором отсутствует искомая функция, и приведите метод его решения.
5. Напишите общий вид ДУ второго порядка, в котором отсутствует независимая переменная, и продемонстрируйте метод его решения.

6. Могут ли интегральные кривые ДУ $y'' = f(x)$: а) пересекаться; б) касаться, т. е. иметь общую касательную в точке пересечения?

7. Чем отличается общий интеграл от общего решения ДУ?

8. Метод решения ДУ второго порядка, в котором отсутствуют и независимая переменная и искомая функция. Приведите пример.

4.3.3. Практический минимум

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$.
2. $y''' = x + \cos x$.
3. $y''' = \sin x + \cos x$.
4. $y''' = \dfrac{x}{(x+2)^5}$, $y(-1) = y'(-1) = y''(-1) = 0$.
5. $y''' = xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.
6. $y'' = x\ln x$, $y(1) = y'(1) = 0$.
7. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.
8. $y\,y'' + \left(y'\right)^2 = 0$.
9. $y''\mathrm{ctg}x + y' = 2$.
10. $(1+x)y'' + y' = 0$.
11. $y'' + y'\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$.
12. $xy'' + y' = \ln x$.
13. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.
14. $x = \left(y''\right)^2 + 1$.
15. $y''(x^2+1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
16. $2yy'' - \left(y'\right)^2 = 0, y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
17. $y''(1+y) = (y')^2 + y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
18. $x(y''+1) + y' = 0$.
19. $y'' - 2y'\,\mathrm{tg}\,x = \sin x$.
20. $3y'' = \left(1 + \left(y'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$.
21. $xy'' = y' + x^2$.
22. $xy'' = y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.
23. $yy'' - (y')^2 = y^2\ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
24. $y'' = y' + (y')^2$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
25. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)\left(y'\right)^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
26. $y''x\ln x = 2y'$.
27. $2(y')^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

28. $2xy''y' = (y')^2 - 4.$

29. $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

30. $y''\mathrm{tg}x = y' + 1.$

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 7; 9; 13; 15; 17; 22; 24; 27; 29.

4.3.4. Ответы

1. $y=\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2.$ **2.** $y=\frac{1}{24}x^4-\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$

3. $y = \cos x - \sin x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$ **4.** $y = -\frac{1}{6(x+2)} + \frac{1}{12(x+2)^2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6}.$ **5.** $y = xe^x - 3e^x + \frac{x^2}{2} + 2x + 3.$ **6.** $y = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} - \frac{1}{9}.$

7. $y = \frac{2\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{5}.$ **8.** $\frac{y^2}{2} = C_1x + C_2.$ **9.** $y = 2x + C_1\sin x + C_2.$

10. $y = C_1\ln|1+x| + C_2.$ **11.** $y = C_1\sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2.$

12. $y = (x + C_1)\ln x - 2x + C_2.$ **13.** $y = \arcsin^2 x + C_1\arcsin x + C_2.$

14. $y = \pm\frac{4}{15}\sqrt{(x-1)^5} + C_1x + C_2.$ **15.** $y = x^3 + 3x + 1.$ **16.** $y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2.$

17. $y = 2e^x.$ **18.** $y = \frac{C_1}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_2.$ **19.** $y = -\frac{1}{3}\sin x + C_1\,\mathrm{tg}\,x + C_2.$

20. $x + \sqrt{9 - (C_1 + y)^2} = C_2.$ **21.** $y = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2.$

22. $y = \frac{(C_1x-1)}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2.$ **23.** $x = \ln\left|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1}\right|.$ **24.** $x = \ln\left|\frac{2e^y - 1}{e^y}\right|.$

25. $x = \frac{1}{1 - \ln y} - 1.$ **26.** $y = C_1(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + C_2.$

27. $y = 1 + \frac{1}{1-2x}.$ **28.** $y = \frac{2(C_1x+4)^{\frac{3}{2}}}{3C_1} + C_2.$ **29.** $y = e^{\mathrm{tg}\,x}.$

30. $y = -C_1\cos x - x + C_2.$

4.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА

1. Общие понятия.
2. Свойства решений линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ).
3. Структура общего решения однородного ЛДУ.
4. Структура общего решения неоднородного ЛДУ.
5. ЛДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Общие понятия

Теория ДУ n-го порядка общего вида достаточно сложна для ее рассмотрения в данном пособии, представляющем обязательное поле знаний по предмету. Например, для ДУ (4.3) n-го порядка имеются аналогичные случаю ДУ первого порядка теоремы существования и единственности решения задачи Коши, но их формулировка в n-мерном случае усложняется. Существует, однако, важный частный случай ДУ n-го порядка – ЛДУ, где не только существование решений, но и многие другие вопросы теории ДУ разрешаются сравнительно просто.

Рассмотрим ЛДУ (4.4) n-го порядка и введем обозначение:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x)$$

– линейный дифференциальный оператор (ЛДО). Тогда в соответствии с (4.4) $L(y) = 0$ – общий вид *однородного* ЛДУ n-го порядка; $L(y) = f(x)$ – общий вид *неоднородного* ЛДУ n-го порядка.

Имеет место следующая ***теорема существования и единственности решения задачи Коши***: если коэффициенты $a_1(x), \ldots, a_n(x),$ а также правая часть $f(x)$ неоднородного ЛДУ (4.4) непрерывны на некотором интервале X, то решение задачи Коши для этого ДУ в области $X \times \mathbb{R}^n$ существует и единственно.

Свойства решений линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ)

Рассмотрим более подробно однородное ЛДУ $L(y) = 0.$ Свойства его решений определяются свойствами ЛДО. Основываясь на его виде (линейная комбинация функции и ее производных), можем установить ***основное свойство ЛДО***: ЛДО является линейным, т. е. значение ЛДО на линейной комбинации достаточное число раз дифференцируемых функций равно соответствующей линейной комбинации значений оператора на этих функциях:

$$L(\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k) = \alpha_1 L(y_1) + ... + \alpha_k L(y_k),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – действительные числа. Отсюда вытекает ***свойство решений однородного ЛДУ***: произвольная линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k$ решений $y_1, ..., y_n$ однородного ЛДУ также является решением этого ЛДУ.

Аналогично имеет место следующее важное ***свойство решений неоднородного ЛДУ***: разность любых двух решений неоднородного ЛДУ является решением однородного ЛДУ.

Действительно, $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f(x) - f(x) = 0.$

Решения $y_1 = y_1(x), ..., y_k = y_k(x), \quad x \in X$, ЛДУ называются ***линейно независимыми*** на *X*, если никакая их нетривиальная линейная комбинация не является тождественно равной нулю на *X*, иными словами

$$\alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_k y_k(x) \equiv 0, x \in X \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0,$$

и ***линейно зависимыми*** в противном случае, т. е. когда существуют такие числа $\alpha_1, ..., \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что их линейная комбинация $\alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_k y_k(x) \equiv 0$. В частности, ***две функции*** $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут ***линейно независимыми*** на *X* тогда и только тогда, когда $\dfrac{y_2}{y_1} \neq \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \text{const}$, т. е. их отношение не сводится к тождественной постоянной на *X*.

Говорят, что решения $y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$ образуют ***фундаментальную систему решений*** однородного ЛДУ, если 1) это линейно независимые (на *X*) решения; 2) их число совпадает с порядком ЛДУ.

Пример. Проверить, образуют ли функции $y_1 = e^{-x} \sin x$, $y_2 = e^{-x} \cos x$ фундаментальную систему решений однородного ЛДУ $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Поскольку $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{e^{-x} \cos x}{e^{-x} \sin x} = \text{ctg} x \neq \text{const}$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы. Проверим, является ли функция $y_1(x)$ решением данного ДУ. Учитывая выражение для производных:

$$y_1' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(-\sin x + \cos x),$$

$$y_1'' = -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(-\cos x - \sin x) = -2e^{-x}\cos x,$$

имеем:

$$-2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(-\sin x + \cos x) + 2e^{-x}\sin x \equiv 0.$$

Иными словами, функция $y_1(x) = e^{-x}\sin x$ удовлетворяет данному ДУ. Аналогично проверяется, что и $y_2(x) = e^{-x}\cos x$ – решение этого ДУ. Таким образом, $y_1 = e^{-x}\sin x, y_2 = e^{-x}\cos x$ – два линейно независимых решения рассматриваемого ЛДУ второго порядка, и, следовательно, образуют его фундаментальную систему решений.

Оказывается: для того чтобы *система решений* $y_1(x), ..., y_n(x)$ однородного ЛДУ $L(y) = 0$ *образовывала фундаментальную систему решений* этого ЛДУ, необходимо и достаточно, чтобы их ***вронскиан***:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$ – определитель n-го порядка –

был не равен тождественно нулю на множестве X, т. е. $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке x_0 множества X. При этом если $W(x_0) \neq 0$ в какой-то точке множества X, то он отличен от нуля и во всех точках этого множества (на котором функции являются решениями ЛДУ).

Структура общего решения однородного ЛДУ

Предположим, что функции $y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$ образуют (на X) фундаментальную систему решений однородного ЛДУ $L(y) = 0$ (n-го порядка). Тогда его ***общее решение*** $y = y_{\text{о.о}}(x)$ (общее однородного) выражается следующей формулой:

$$y = y_{\text{о.о}}(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x).$$

Действительно, то, что $y = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x)$ является решением, вытекает из свойств однородного ЛДУ. Проверим теперь, что эта функция решает любую задачу Коши. По условию:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y(x_0) = y_0^0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0) = y_0^1, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_1 y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Определитель для этой системы есть вронскиан фундаментальной системы решений и отличен от нуля. Таким образом, эта система является системой Крамера и для любого $x_0 \in X$ и для любых $y_0^0, \ldots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение относительно $C_1, \ldots, C_n$, и, стало быть, функция $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является общим решением нашего ЛДУ.

Таким образом, для того чтобы успешно интегрировать однородное ЛДУ, достаточно научиться находить фундаментальную систему его решений.

Пример. Показать, что функции $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = \sin x$, $y_4 = \cos x$ образуют фундаментальную систему решений однородного ЛДУ $y^{(4)} - y = 0$ и записать вид общего решения.

Решение. Во-первых, легко проверить, что функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \sin x, y_4 = \cos x$ удовлетворяют данному ДУ на всей числовой оси $(\forall x \in \mathbb{R})$. Во-вторых, их вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \\ e^x & -e^{-x} & \cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & -\sin x & -\cos x \\ e^x & -e^{-x} & -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, например, при $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

и, следовательно, эти функции образуют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение рассматриваемого ДУ имеет вид:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$ Нетрудно проверить, что функции $y_1 = \mathrm{sh}x,\ y_2 = \mathrm{ch}x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = \cos x$ также образуют фундаментальную систему решений, поэтому общее решение можно записать и в таком виде: $y = C_1 \mathrm{sh}x + C_2 \mathrm{ch}x + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$

Структура общего решения неоднородного ЛДУ

Вернемся к неоднородному ЛДУ $L(x) = f(x).$ Учитывая структуру решений однородного ЛДУ и свойства решений неоднородного ЛДУ, убеждаемся в том, что его ***общее решение*** $y = y_{\text{о.н}}(x)$ (общее неоднородного) выражается следующей формулой:

$$y = y_{\text{о.н}}(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x) + y_{\text{н}}(x),$$

где $y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$ – произвольная фундаментальная система решений однородного ЛДУ $L(y) = 0,$ а $y_{\text{н}}(x)$ – произвольно выбранное частное решение неоднородного ЛДУ $L(y) = f(x).$

Таким образом, для того чтобы успешно интегрировать неоднородное ЛДУ, достаточно уметь находить фундаментальную систему решений однородного ЛДУ и частное решение неоднородного ЛДУ.

Пример. Показать, что функция $y = x^3$ является частным решением ЛДУ $y''' = 6,$ а функции $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного ЛДУ. Используя этот факт, записать вид общего решения.

Решение. Имеем: $y''' = (x^3)''' = 6,\ y_1''' = y_2''' = y_3''' = 0,$ и, таким образом, $y = x^3$ является частным решением неоднородного ЛДУ $y''' = 6,$ а функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного ЛДУ. Найдем вронскиан $W(x)$ функций $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ линейно независимые и образуют фундаментальную систему решений однородного ЛДУ. Тогда общее решение неоднородного ЛДУ $y''' = 6$ запишется в следующем виде:

$$y = y_{\text{о.н}} + y_{\text{н}} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3.$$

ЛДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим однородное ЛДУ $L(y) = 0$ с постоянными коэффициентами, т. е. $a_1(x) \equiv a_1, \ldots, a_n(x) \equiv a_n$ – действительные числа.

Следуя идее Эйлера, ищем решение этого ЛДУ в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где λ – некоторое (в общем случае комплексное) число. Тогда $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Подставляя выражения для искомой функции и ее производных в ЛДУ $L(y) = 0$, получаем: $e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0$, откуда, сокращая на $e^{\lambda x}$, приходим к ***характеристическому уравнению*** $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ для нахождения искомых чисел λ.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет n различных действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В этом случае решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$ *образуют фундаментальную систему решений* однородного ЛДУ, так как их вронскиан отличен от нуля, и поэтому общее решение однородного ЛДУ $L(y) = 0$ в случае различных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{о.о}}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.

Решение. Данное ДУ – однородное ЛДУ с постоянными коэффициентами. Следуя методу Эйлера, составляем характеристическое уравнение $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ (биквадратное уравнение) и решаем его: $\lambda^4 - 5\lambda + 4 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$, откуда корни $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2,\ \lambda_4 = 2$ этого уравнения являются действительными и различными. Тогда общее решение этого ЛДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{2x}.$$

В общем случае кратных и комплексных корней характеристического уравнения общее решение имеет более сложную структуру. Рассмотрим эту ситуацию подробно на примере ДУ второго порядка.

4.5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.5.1. Теоретический минимум

1. Однородные ЛДУ.
2. Неоднородные ЛДУ со специальной правой частью.
3. Метод вариации произвольных постоянных.

Однородные ЛДУ

Рассмотрим ЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – действительные числа.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Общее решение однородного ЛДУ записывается так:

$$y = y_{\text{о.о}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного ЛДУ.

Возможны следующие три ситуации:

1. Корни λ_1 и λ_2 ***различные и действительные***: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ образуют фундаментальную систему решений этого ЛДУ, и его общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ (действительные и различные). Тогда $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-2x}$ – фундаментальная система решений и $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ – общее решение рассматриваемого ЛДУ.

2. Корни ***действительные и равные*** (совпадают): $\lambda_1 = \lambda_2$, т. е. $\lambda_1 = \lambda$ – корень кратности 2 характеристического уравнения. Ясно, что $y_1(x) = e^{\lambda x}$ является решением ЛДУ. Надо найти еще одно

линейно независимое с ним решение (чтобы получить фундаментальную систему решений). Второе решение можно взять в виде: $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. Убедимся, что эта функция является решением. Имеем:

$$y_2' = (1 + \lambda x)e^{\lambda x}, \ y_2'' = \left((1+\lambda x)e^{\lambda x}\right)' = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}.$$

Поэтому

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x} + p(1+\lambda x)e^{\lambda x} + qxe^{\lambda x} =$$
$$= xe^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) + e^{\lambda_1 x}(2\lambda + p) = 0,$$

так как λ – корень характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и по теореме Виета $\lambda + \lambda = -p$, т. е. $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ также является решением.

Поскольку $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$, то решения y_1, y_2 линейно независимы и, стало быть, образуют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение ЛДУ в рассматриваемом случае можно записать в виде: $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$.

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (действительные и совпадают). Тогда $y_1(x) \equiv e^x$, $y_2(x) = x e^x$ – фундаментальная система решений и $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ – общее решение рассматриваемого ЛДУ.

3. Корни характеристического уравнения ***комплексные***: $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, a и b – действительные числа, $b \neq 0$; i – мнимая единица: $i^2 = -1$. В этом случае фундаментальную систему решений образуют функции $y_1(x) = e^{ax}\cos bx$ и $y_2(x) = e^{ax}\sin bx$, и поэтому общее решение рассматриваемого ЛДУ имеет вид

$$y = y_{\text{о.о}} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + y' + y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ и находим его корни: $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (комплексные). Тогда

$y_1(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ и $y_2(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ – фундаментальная система решений и $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ – общее решение данного ЛДУ.

Неоднородные ЛДУ со специальной правой частью

Рассмотрим неоднородное ЛДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью:

$$y''+py'+qy=f(x),$$

где $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$ – ***специальная правая часть***. Здесь $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены соответственно степени n и m; α и β – действительные числа; число $\alpha+\beta i$ будем называть ***контрольной постоянной***.

Оказывается, частное решение неоднородного ЛДУ с постоянным коэффициентом и специальной правой частью *по методу неопределенных коэффициентов* можно искать в виде

$$y=y_{\text{н}}(x)=x^k e^{\alpha x}(\tilde{P}_\nu(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x),$$

где k– кратность числа $\alpha+\beta i$ как корня характеристического уравнения ($k=0$, если $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения), $\nu=\max\{m,n\}$, $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ – многочлены степени ν с неопределенными (пока неизвестными) коэффициентами, т. е.

1) $y_{\text{н}}(x)=e^{\alpha x}(\tilde{P}_\nu(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x)$, если $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения: $\alpha+\beta i\neq\lambda_1$ и $\alpha+\beta i\neq\lambda_2$;

2) $y_{\text{н}}(x)=xe^{\alpha x}(\tilde{P}_\nu(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x)$, если $\alpha+\beta i$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения: $\alpha+\beta i=\lambda_1$ и $\alpha+\beta i\neq\lambda_2$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов подставляем выражения для решения $y_{\text{н}}(x)$ и его производных в исходное ЛДУ и приравниваем коэффициенты при одинаковых (линейно независимых) функциях.

Рассмотрим частные случаи специальной правой части.

Правая часть – ***многочлен***: $f(x)=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$.

Тогда

1) $y = y_{н}(x) = \tilde{P}_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$, если $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения (здесь $\tilde{P}_n(x)$ – многочлен n-й степени общего вида; $A_0, A_1, ..., A_n$ – коэффициенты, подлежащие определению);

2) $y = y_{н}(x) = x\tilde{P}_n(x) = x(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n)$, если $\alpha + \beta i = 0$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения;

3) $y = y_{н}(x) = x^2\tilde{P}_n(x) = x^2(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n)$, если $\alpha + \beta i = 0$ совпадает с обоими корнями характеристического уравнения.

Пример. Найти общее решение ЛДУ: а) $y'' = 6x$; б) $y'' + 2y' = 4x$; в) $y'' + 5y' + 6y = 18x^2 - 1$.

Решение. а) составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Общее решение однородного ЛДУ имеет вид $y_{о.о} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1 + C_2x$. Поскольку многочлен в правой части ЛДУ имеет степень 1 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде многочлена первой степени общего вида (умножить на x^2): $y = x^2(Ax + B)$. Тогда $y' = 3Ax^2 + 2Bx$, $y'' = 6Ax + 2B$. Подставляя в исходное ЛДУ, имеем: $y'' = 6Ax = 6x + 2B \equiv 6x \Rightarrow$ $A = 1$, $B = 0$ и $y_{н} = x^3$. Общее решение $y = y_{о.н} = y_{о.о} + y_{н}$ неоднородного ЛДУ имеет вид $y = C_1 + C_2x + x^3$;

б) составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Поскольку многочлен в правой части ЛДУ имеет степень 1 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде многочлена первой степени общего вида (умножить на x): $y = x(Ax + B)$. Тогда $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$. Подставляя в исходное ЛДУ, имеем: $y'' + 2y' = 2A + 2(2Ax + B) = 4Ax + 2A + 2B \equiv 4x$. Приравнивая коэффициенты при различных степенях x, для нахождения коэффициентов A и B получаем систему $\begin{cases} 4A = 4, \\ 2A + 2B = 0, \end{cases}$ решая которую, находим $A = 1$, $B = -1$ и $y_{н} = x^2 - x$. Общее решение $y = y_{о.н} = y_{о.о} + y_{н}$ неоднородного ЛДУ имеет вид $y = C_1 + C_2e^{-2x} + x^2 - x$;

в) составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2+5\lambda+6=0$ и находим его корни: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$. Поскольку многочлен в правой части ЛДУ имеет степень 2 и контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+0i=0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде многочлена второй степени общего вида (умножать не надо): $y=Ax^2+Bx+C$. Подставляя в исходное ЛДУ, имеем: $y''+5y'+6y=$ $=2A+5(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx+C)=18x^2-1$. Приравнивая коэффициенты при различных степенях x, для нахождения коэффициентов A, B и C получаем систему $\begin{cases} 6A=18, \\ 10A+6B=0, \\ 2A+5B+6C=-1, \end{cases}$ решая которую, находим $A=3,\ B=-5,\ C=3$ и $y_{\text{н}}=3x^2-5x+3$. Общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+3x^2-5x+3$.

Правая часть – ***многочлен с экспонентой***: $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$. Тогда контрольная постоянная $\alpha+\beta i=\alpha+0i=\alpha$ и частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде: $y=y_{\text{н}}(x)=e^{\alpha x}\tilde{P}_n(x)x^k=$ $=e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)x^k$, если $\alpha+\beta i=\alpha$ является корнем кратности k ($k=0$, если $\alpha+\beta i=\alpha$ не является корнем) характеристического уравнения.

Правая часть – ***многочлен с тригонометрическими функциями***: $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$. Тогда контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+\beta i=\beta i$, $\nu=\max\{m,\ n\}$, и частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде: $y=y_{\text{н}}(x)=x^k[(A_0x^\nu+A_1x^{\nu-1}+\ldots+A_\nu)\cos\beta x+$ $+(B_0x^\nu+B_1x^{\nu-1}+\ldots+B_\nu)\sin\beta x]$, если $\alpha+\beta i=\beta i$ является корнем кратности k ($k=0$, если $\alpha+\beta i$ не является корнем) характеристического уравнения.

В некоторых случаях, когда правая часть не является специальной, ее удается представить в виде суммы специальных правых частей. Тогда и частное решение неоднородного ЛДУ можно искать в виде суммы частных решений, соответствующих этим специальным правым частям.

Пример. Указать общий вид (с неопределенными коэффициентами) частного решения ЛДУ $y''+y=f(x)$, если а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=\dfrac{x}{e^{2x}}$; в) $f(x)=(x+1)\cos x+x^2\sin x$; г) $f(x)=x\,\mathrm{sh}\,x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ однородного ЛДУ и находим его корни: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Тогда

а) поскольку контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;

б) поскольку контрольная постоянная $\alpha + \beta i = -2 + 0i = -2$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y = e^{-2x}(Ax + B)$;

в) поскольку $\nu = \max\{m, n\} = \max\{1, 2\} = 2$ и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 1i = i$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y = x[(A_1x^2 + A_2x + A_3)\cos x + (B_1x^2 + B_2x + B_3)\sin x]$;

г) поскольку $f(x) = x\operatorname{sh} x = x\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = f_1(x) + f_2(x)$ не является специальной правой частью, но является суммой специальных правых частей $f_1(x) = \dfrac{x}{2}e^x$ и $f_2(x) = -\dfrac{x}{2}e^{-x}$ с контрольными постоянными $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1 \neq \pm i$ и $\alpha + \beta i = -1 + 0i = -1 \neq \pm i$, то частное решение $y_{\text{н}} = y_{\text{н}_1} + y_{\text{н}_2}$ неоднородного ЛДУ ищем в виде суммы частных решений $y_{\text{н}_1} = e^x(Ax + B)$ и $y_{\text{н}_2} = e^{-x}(Cx + D)$ для ЛДУ $y'' + y = f_1(x)$ и $y'' + y = f_2(x)$ соответственно.

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + y' - 2y = -20\sin 2x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Поскольку многочлен при $\sin 2x$ в правой части ЛДУ имеет степень 0 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y = A\cos 2x + B\sin 2x$. Подставляя в исходное ЛДУ, имеем:

$$y'' + y' - 2y = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x +$$
$$+ 2B\cos 2x - 2(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv -20\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, для нахождения коэффициентов A и B получаем систему $\begin{cases} -4A + 2B - 2A = 0, \\ -4B - 2A - 2B = -20, \end{cases}$

решая которую, находим $A=1$, $B=3$ и $y_{\text{н}} = \cos 2x + 3\sin 2x$. Общее решение неоднородного ЛДУ имеет следующий вид: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \cos 2x + 3\sin 2x$.

Метод вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных нахождения частного решения неоднородного ЛДУ был предложен Лагранжем и годится для любой правой части. Рассмотрим его на примере ЛДУ второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

при условии, что известна фундаментальная система решений однородного ЛДУ ($y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$). Тогда частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде $y = y_{\text{н}}(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)$, где $C_1(x)$, $C_2(x)$ – некоторые вспомогательные функции, подлежащие определению.

Вид частного решения используем при подстановке в ДУ, учитывая, что функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ можно выбирать:

$$y' = \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}_{\text{полагаем } = 0} + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$

$$= C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x),$$

где $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$, $y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + C_1(x)\,y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x)$, тогда, подставляя выражение для частного решения в ЛДУ и вынося функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ за скобки, получаем:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = C_1(x)\big(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\big) + C_2(x)\big(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\big) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \equiv f(x),$$

где функции $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ являются решениями однородного ЛДУ, и поэтому выражения в скобках обращаются в нуль. В результате для нахождения неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ получаем систему $\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases}$ линейных алгебраических уравнений, решая которую, определяем $C_1'(x) = a(x)$ и $C_2'(x) = b(x)$ и интегрируем.

Тогда $y_{н}(x) = y_1(x)\int a(x)dx + y_2(x)\int b(x)dx$ и общее решение $y = y_{о.о}(x) + y_{н}(x)$ неоднородного ЛДУ имеет вид

$$y = Cy_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x)\int a(x)dx + y_2(x)\int b(x)dx.$$

Метод вариации произвольных постоянных особенно эффективен для ЛДУ с постоянными коэффициентами, так как в этом случае фундаментальная система решений однородного ЛДУ легко определяется по корням соответствующего характеристического уравнения.

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2 + 1 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Определяем фундаментальную систему $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$ и общее решение $y_{о.о}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ однородного ЛДУ. Ищем частное решение неоднородного ЛДУ в виде $y_{н}(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$, где

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cos x + C_2'(x)(-\sin x) = \operatorname{tg} x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1'(x) = \sin x, \\ C_2'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда $C_1(x) = -\cos x$, $C_2(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$. Тогда

$$y_{н}(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x =$$

$$= (-\cos x)\sin x + \left(\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\right)\cos x = \frac{1}{2}\cos x \cdot \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$$

и общее решение исходного ЛДУ имеет следующий вид:

$$y = y_{о.о}(x) + y_{н}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}\cos x \cdot \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|.$$

4.5.2. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите общий вид линейного однородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Как составляется характеристическое уравнение?
3. Как влияют корни характеристического уравнения на вид общего решения ДУ?

4. При каких значениях a все решения ДУ $y'' + ay' + 4y = 0$:

а) стремятся к нулю, если x неограниченно возрастает;

б) являются периодическими функциями?

5. Как различить, какой метод решения ДУ применить: метод вариации произвольных постоянных или метод подбора частных решений?

6. В чем сущность метода подбора частных решений ДУ? Приведите примеры.

7. Объясните суть метода вариации произвольных постоянных. Приведите примеры.

8. Известно, что $y = e^x$ и $y = 2e^x$ являются решениями уравнения $y'' - py' + y = 0$. Можно ли утверждать, что $y = C_1 e^x + 2C_2 e^x$ – множество всех решений данного уравнения?

9. Каким дифференциальным уравнением описывается движение тел по закону: $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$, $x = A\cos(\omega t + \alpha)$?

10. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения.

4.5.3. Практический минимум

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y'' - 4y' = 0$.
2. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.
3. $y'' + 5y' + 6y = 0$.
4. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y\big|_{x=0} = 6$, $y'\big|_{x=0} = 10$.
5. $9y'' + 6y' + y = 0$.
6. $y'' - 10y' + 25y = 0$.
7. $2y'' - 2y' + 5y = 0$.
8. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
9. $4y'' + y = 0$.
10. $y'' + 7y = 0$.
11. $y'' - y = 0$.
12. $2y'' - 3y' + y = 0$.
13. $y'' + 8y' + 7y = 0$.
14. $y'' + 3y' = 0$, $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 2$.
15. $y'' + 2y' + y = 0$.
16. $4y'' - 4y' + y = 0$.
17. $y'' - 6y' + 13y = 0$.
18. $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
19. $16y'' + y = 0$.
20. $y'' + 8y = 0$.
21. $y''' - 8y = 0$.
22. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.
23. $y''' - 3y' - 2y = 0$.
24. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 8$.
25. $y^{IV} = y$.

26. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 12.$
27. $2y''' - 3y'' + y' = 0.$
28. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 4,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = -16.$
29. $y^{IV} - y' = 0.$
30. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = -9.$
31. $y''' - 2y'' + 2y' = 0.$
32. $y''' + y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1.$
33. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$
34. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$
35. $y'' + 4y = e^{-2x}.$
36. $y'' - y = 3x^2 - 7x + 9.$
37. $y'' + 2y' + y = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1.$
38. $y'' - 4y' + 13y = \cos 3x.$
39. $y'' + 3y' - 4y = e^{-x}.$
40. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$
41. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x.$
42. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}.$
43. $y'' + 4y = \sin 2x, y(0) = y'(0) = 1.$
44. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x},\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 8.$
45. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x,\ y(\pi) = \pi e^{\pi},\ y'(\pi) = e^{\pi}.$
46. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}.$
47. $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}.$
48. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}.$
49. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}.$
50. $y'' + y = \operatorname{tg} x.$
51. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}.$
52. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 18; 21; 24; 29; 33; 36; 38; 41; 44; 47; 49; 50.

4.5.4. Ответы

1. $y = C_1 + C_2 e^{4x}.$ **2.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}.$ **3.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$ **4.** $y = -8e^{-3x} + 14e^{-x}.$ **5.** $y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{-\frac{x}{3}} x.$ **6.** $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$ **7.** $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{3}{2}x + C_2 \sin\dfrac{3}{2}x\right).$ **8.** $y = e^x \sin x.$ **9.** $y = C_1 \cos\dfrac{x}{2} +$

$+C_2\sin\frac{x}{2}$. **10.** $y = C_1\cos\sqrt{7}x + C_2\sin\sqrt{7}x$. **11.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$.
12. $y = C_1e^x + C_2e^{\frac{x}{2}}$. **13.** $y = C_1e^{-7x} + C_2e^{-x}$. **14.** $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{-3x}$.
15. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$. **16.** $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2xe^{\frac{x}{2}}$. **17.** $y = C_1e^{3x}\cos 2x +$
$+ C_2e^{3x}\sin 2x$. **18.** $y = e^x\left(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\right)$. **19.** $y = C_1\cos\frac{x}{4} +$
$+ C_2\sin\frac{x}{4}$. **20.** $y = C_1\cos 2\sqrt{2}x + C_2\sin 2\sqrt{2}x$. **21.** $y = C_1e^{2x} +$
$+ e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3x} + C_3\sin\sqrt{3x})$. **22.** $y = e^x + xe^x$. **23.** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} +$
$+ C_3e^{2x}$. **24.** $y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x} - 2e^x$. **25.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} +$
$+ C_3\cos x + C_4\sin x$. **26.** $y = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-x}$. **27.** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{\frac{x}{2}}$.
28. $y = 2\sin 2x + \cos x$. **29.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.
30. $y = \cos 3x - \sin 3x$. **31.** $y = C_1 + C_2e^x\cos x + C_2e^x\sin x$.
32. $y = 1 - \cos x + \sin x$. **33.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$. **34.** $y = C_1e^x +$
$+ C_2e^{2x} + \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$. **35.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}e^{-2x}$.
36. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 3x^2 + 7x - 15$. **37.** $y = C_1e^x + C_2e^x x + 2x^3 - 8x^2 +$
$+ 14x - 11$. **38.** $y = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x + \frac{1}{40}\cos 3x + \frac{3}{40}\sin 3x$.
39. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^x - \frac{1}{6}e^{-x}$. **40.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$.
46. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$. **47.** $y = C_1e^{-x} +$
$+ C_2e^x - 1 - e^{-x}\ln|e^x - 1| + e^x\ln|e^x - 1| - e^x x$. **48.** $y = C_1e^x + C_2xe^x -$
$- \frac{e^x}{2}\ln|x^2 + 1| + xe^x\,\mathrm{arctg}\,x$. **49.** $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x - xe^{-x}\cos x +$
$+ \ln|\sin x|e^{-x}\sin x$. **50.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.
51. $y = (\ln|\cos x| + C_1)e^{2x}\cos x + (x + C_2)e^{2x}\sin x$. **52.** $y = (-x + C_1)e^{-x} +$
$+ (\ln x + C_2)xe^{-x}$.

4.6. ПОНЯТИЕ О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.6.1. Теоретический минимум

1. Общие понятия.
2. Метод исключения при решении систем ЛДУ.
3. Система двух ЛДУ с двумя неизвестными функциями.

Общие понятия

Для простоты ограничимся системой ДУ первого порядка относительно неизвестных функций $x_1(t), ..., x_n(t),$ разрешенной относительно производных $\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t)$ этих функций:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t,\ x_1(t),\ x_2(t), ...,\ x_n(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t,\ x_1(t),\ x_2(t),\ ...,\ x_n(t)), \end{cases}$$

где $\dot{x}_i(t) = \dfrac{dx_i}{dt}(t),\ i = 1, 2, ..., n.$

Начальные условия Коши (в некоторой области $T \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$):

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10}, \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{n0}, \end{cases}$$

здесь $t_0,\ x_{10},\ ...,\ x_{n0}$ – заданные числа, $t_0 \in T,\ (x_{10},\ ...,\ x_{n0}) \in D.$

Решением системы ДУ (СДУ) на множестве $T \in (t_0,\ t_1) \subset \mathbb{R}$ понимается произвольный набор дифференцируемых функций $x_1(t), ..., x_n(t),\ \ t \in T,$ удовлетворяющих СДУ тождественно на множестве T.

Общим решением СДУ (в некоторой области $T \times D$) называется набор n дифференцируемых по переменной t функций $x_1(t) = \varphi_1(t,\ C_1,\ ..., C_n), ..., x_n(t) = \varphi_n(t, C_1,\ ..., C_n),$ которые:

1) при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_1, ..., C_n$ являются решением СДУ;

2) решают любую задачу Коши (в области $T \times D$), т. е. для любой точки $(t_0, x_{10}, ..., x_{n0}) \in T \times D$ система

$$\begin{cases} x_{10} = \varphi_1(t_0,\ C_1,\ \dots,\ C_n), \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_{n0} = \varphi_n(t_0,\ C_1,\ \dots,\ C_n) \end{cases}$$

разрешима относительно произвольных постоянных $C_1,\ \dots, C_n$.

Частное решение – решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Наиболее изученным и используемым вариантом СДУ является ***линейная СДУ*** (ЛСДУ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

В векторно-матричных обозначениях ЛСДУ можно записать в более компактной форме: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in T$, где

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix},\ A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n},\ x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

начальное условие Коши: $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Метод исключения при решении систем ЛДУ

Одним из методов решения ЛСДУ является метод исключения, т. е. метод сведения данной СДУ к одному или нескольким ЛДУ относительно одной (в каждом уравнении) неизвестной функции. Опишем схему этого метода.

Из одного какого-либо уравнения находится одна какая-либо неизвестная функция и подставляется во все другие уравнения. В результате эта функция исключается из системы, и приходим к новой системе из $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными функциями, затем исключается следующая неизвестная функция и т. д.

Пример. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 6x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t), \end{cases} \begin{cases} x_1(0) = -1, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Из третьего ДУ находим $x_1(t) = \dot{x}_3(t)$ и подставляем в первые два ДУ: $\begin{cases} \ddot{x}_3(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = 6\dot{x}_3(t) - 6x_3(t). \end{cases}$ Из первого ДУ находим $x_2(t) = \ddot{x}_3(t) - x_3(t)$ и подставляем во второе ДУ: $\dddot{x}_3(t) - \dot{x}_3(t) = \dot{x}_3(t) + x_3(t)$. Получили $x_3''' - 7x_3' + 6x_3 = 0$ – однородное ЛДУ с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$ (действительные и различные). Тогда функции e^t, e^{2t} и e^{-3t} – фундаментальная система решений и общее решение этого ЛДУ имеет вид $x_3(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t}$, откуда $x_1(t) = \dot{x}_3(t) =$ $= C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 3C_3e^{-3t}$, $x_2(t) = \ddot{x}_3(t) - x_3(t) = 3C_2e^{2t} + 8C_3e^{-3t}$. Таким образом, общее решение ЛСДУ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 3C_3e^{-3t}, \\ x_2(t) = 3C_2e^{2t} + 8C_3e^{-3t}, \\ x_3(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t}. \end{cases}$$

Находим значения произвольных постоянных, учитывая начальные условия:

$$\begin{cases} -1 = x_1(0) = C_1 + 2C_2 - 3C_3, \\ 0 = x_2(0) = 3C_2 + 8C_3, \\ 1 = x_3(0) = C_1 + C_2 + C_3, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \dfrac{3}{2}$, $C_2 = -\dfrac{4}{5}$, $C_3 = \dfrac{3}{10}$ и $\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{3}{2}e^t - \dfrac{8}{5}e^{2t} - \dfrac{9}{10}e^{-3t}, \\ x_2(t) = -\dfrac{12}{5}e^{2t} + \dfrac{12}{5}e^{-3t}, \\ x_3(t) = \dfrac{3}{2}e^t - \dfrac{4}{5}e^{2t} + \dfrac{3}{10}e^{-3t} \end{cases}$

– искомое частное решение ЛСДУ.

Система двух ЛДУ с двумя неизвестными функциями

В приложениях ДУ параметр t обычно играет роль текущего времени и часто при обозначении неизвестной функции и ее производных опускается: $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$ (подразумевается по умолчанию).

Рассмотрим ЛСДУ с неизвестными функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x + b\,y + f(t), \\ \dot{y} = c\,x + d\,y + g(t). \end{cases}$$

Применяем метод исключения. Если $b \neq 0$, то из первого ДУ выражаем y через x: $y = \dfrac{\dot{x} - a\,x - f(t)}{b}$ и подставляем во второе ДУ: $\dfrac{\ddot{x} - a\,\dot{x} - \dot{f}(t)}{b} = c\,x + d\,\dfrac{\dot{x} - a\,x - f(t)}{b} + g(t)$. Приходим к ЛДУ:

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = b\,g(t) - d\,f(t) + \dot{f}(t).$$

Интегрируя это ЛДУ, получаем неизвестную функцию $x = x(t, C_1, C_2)$. Используя выражение y через x, находим неизвестную функцию $y = y(t, C_1, C_2)$. В результате получаем общее решение исходной ЛСДУ.

Если же $b = 0$, то из первого ЛДУ, содержащего только одну неизвестную функцию, находим $x = x(t, C_1)$ и подставляем во второе ЛДУ, интегрируя которое, определяем неизвестную функцию $y = y(t, C_1, C_2)$. В результате получаем общее решение исходной ЛСДУ.

Пример. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + t, \\ \dot{y} = -x - t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Из первого ЛДУ выражаем y через x: $y = \dot{x} - t$ и подставляем во второе ЛДУ: $\ddot{x} - 1 = -x - t \Rightarrow \ddot{x} + x = 1 - t$. Общее решение соответствующего однородного ЛДУ имеет вид: $x_{\text{о.о}}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Находим частное решение неоднородного ЛДУ: $x_{\text{н}}(t) = At + B \Rightarrow x_{\text{н}}(t) = 1 - t$. Тогда $x(t) = x_{\text{о.о}}(t) + x_{\text{н}}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - t$, $y(t) = \dot{x}(t) - t = C_2 \cos t - C_1 \sin t - 1 - t$ и общее решение исходной ЛСДУ имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - t, \\ y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t - 1 - t. \end{cases}$$

Далее: $\begin{cases} 1 = x(0) = C_1 + 1, \\ 0 = y(0) = C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$

Таким образом, $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \cos t - 1 \end{cases}$ – искомое частное решение (решение задачи Коши) для искомой ЛСДУ.

4.6.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение системы ДУ.
2. Что называется общим решением системы ДУ, частным решением?
3. Сформулируйте задачу Коши для линейной системы ДУ (ЛСДУ).
4. Дайте определение системы ДУ первого порядка.
5. Запишите общий вид линейной системы однородных ДУ с постоянными коэффициентами.
6. Приведите общий вид линейной системы неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами.
7. Опишите алгоритм метода исключения при решении системы двух линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

4.6.3. Практический минимум

Решить системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 4y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y + t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y - t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y - 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y + 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y - 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y + 3t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y + e^t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \quad x\big|_{t=0} = -1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \quad y\big|_{t=0} = 1, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, \quad z\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \quad x\big|_{t=0} = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \quad y\big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \quad z\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$

Минимум для аудиторной работы
1; 3; 5; 9; 11; 13; 15.

4.6.4. Ответы

1. $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{3} C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-2t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}, \\ y = \dfrac{3}{5} C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}, \\ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\dfrac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}, \\ y = \dfrac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{4t} + \dfrac{1}{3} C_2 e^{8t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{-t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^{3t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} - \dfrac{3}{8} t^2 - \dfrac{17}{16} t - \dfrac{23}{64}, \\ y = C_1 e^{-4t} - \dfrac{1}{5} C_2 e^{2t} + \dfrac{1}{8} t^2 - \dfrac{1}{16} t + \dfrac{9}{16}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = C_1 e^{9t} + C_2 e^{-t} - \dfrac{2}{3} t - \dfrac{74}{27}, \\ y = \dfrac{1}{2} C_1 e^{9t} - \dfrac{3}{4} C_2 e^{-t} + \dfrac{2}{3} t + \dfrac{44}{27}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} - \dfrac{6}{5} t - \dfrac{51}{25}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} + \dfrac{3}{5} t + \dfrac{73}{25}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{9t} - \dfrac{1}{2} t e^{t}, \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{9t} + \dfrac{1}{2} t e^{t} - \dfrac{1}{8} e^{t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = -e^{-t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} e^{-t} + \dfrac{1}{6} e^{2t} + \dfrac{1}{2} e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{3} e^{-t} + \dfrac{1}{6} C_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2} e^{-2t}, \\ z = -\dfrac{1}{3} e^{-t} + \dfrac{1}{3} e^{2t}. \end{cases}$

Глава 5. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1.1. Теоретический минимум

1. Определение двойного интеграла.
2. Двойной интеграл в декартовых координатах и его свойства.
3. Двойной интеграл в полярных координатах.
4. Геометрические приложения двойного интеграла.
5. Физические приложения двойного интеграла.

Определение двойного интеграла

Рассмотрим в плоскости *Oxy* ***квадрируемую*** – *измеримую* (т. е. имеющую *площадь*) фигуру (область) D, на которой определена некоторая функция $f(M), M \in D$. Осуществим далее ***n-разбиение*** области D на n пересекающихся, разве лишь, по линиям квадрируемых частичных областей $D_1, ..., D_n$ так, чтобы:

1) $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$;

2) площадь $D_i \cap D_j$ равна нулю ($i \neq j$),

и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i, \tag{5.1}$$

где ΔS_i – площадь D_i; M_i – произвольная точка, принадлежащая D_i.

Сумму вида (5.1) будем называть ***интегральной суммой*** для функции f и фигуры D. Символом d_i обозначим диаметр – наибольшее расстояние между точками области D_i, наибольший из частичных диаметров – ***диаметр разбиения*** – символом λ_n: $\lambda_n = \max\limits_i d_i$.

Если теперь существует *конечный предел* интегральных сумм (5.1) при *диаметре разбиения, стремящемся к нулю*, независимо от *способа разбиения* области D на части и от *выбора точек* M_i в частичных областях, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции f по области D и обозначается $\iint\limits_D f(M)dS$.

Таким образом,

$$\iint_D f(M)dS = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i. \qquad (5.2)$$

Функция $f(M) = f(x, y)$ в этом случае называется интегрируемой в области D.

Как и в случае определенного интеграла имеют место следующие условия интегрируемости: ***необходимое***: если функция интегрируема, то она ограничена, и ***достаточное***: если функция непрерывна, то она интегрируема.

Двойной интеграл в декартовых координатах и его свойства

Пусть $f(x, y)$ интегрируема в области D. Разбивая область D на части *координатными линиями* в декартовой системе координат, т. е. прямыми, параллельными координатным осям, имеем $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ и, переходя к дифференциалам, $dS = dxdy$, откуда $\iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)\,dxdy$.

Основные свойства двойного интеграла (считаем рассматриваемые функции интегрируемыми):

1. Интеграл от единичной функции выражает *площадь* области интегрирования: $\iint_D dxdy = S_D -$ площадь фигуры D.

2. *Линейность*:

$$\iint_D C f(x, y)dxdy = C\iint_D f(x, y)dxdy, \quad C = \text{const}$$

(постоянную можно выносить за знак интеграла);

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy$$

(интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций).

3. *Аддитивность*: интеграл по области, состоящей из областей, пересекающихся только по границе, равен сумме интегралов по составляющим областям:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

4. *Монотонность*: если в области D имеет место неравенство $f(x, y) \geq 0$, то $\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0$; если $f(x, y) \geq g(x, y)$ для любых $(x, y) \in D$, то $\iint_D f(x, y)dxdy \geq \iint_D g(x, y)dxdy$. В частности, для непрерывной на D функции f имеет место *оценка*:

$$m_* S_D \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq m^* S_D,$$

где $m_* = \min\limits_{M \in D} f(M)$, $m^* = \max\limits_{M \in D} f(M)$.

5. *Теорема о среднем*. Если функция f непрерывна в области D, то в области D найдется точка (ξ, η) такая, что $\iint_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)S_D$ и $\frac{1}{S_D}\iint_D f(x, y)dxdy$ – среднее значение функции f в области D.

Двойные интегралы вычисляются *сведением* к *повторным*.

Пусть область D ограничена снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, с боков – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.1).

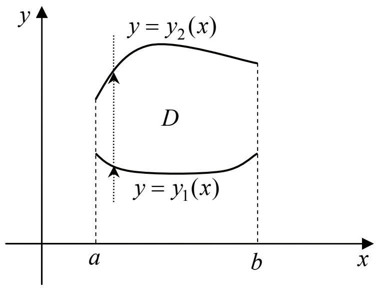


Рис. 5.1. Область интегрирования

Предположим, что каждая прямая $x = \text{const}$, $x \neq a$, $x \neq b$, пересекает границу области D не более чем в двух точках с ординатами $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$.

Тогда получим:

$$\iint_D f(M)ds = \iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \tag{5.3}$$

Правую часть (5.3) называют ***повторным интегралом*** с внешним интегрированием по x и внутренним по y.

Пусть теперь область D имеет вид, показанный на рис. 5.2.

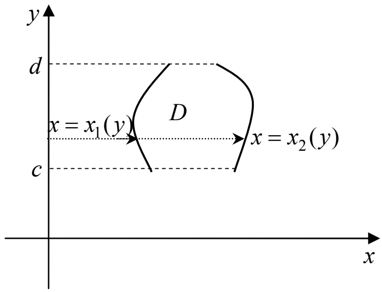


Рис. 5.2. Криволинейная трапеция

Предположим, что каждая прямая y = const пересекает границу области D не более чем в двух точках с абсциссами $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$. Тогда

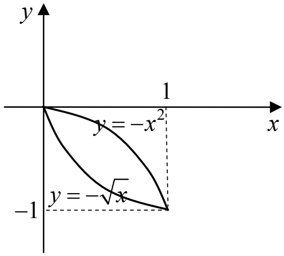
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (5.4)$$

Правая часть формулы (5.4) – ***повторный интеграл*** с внешним интегрированием по y и внутренним по x.

В формулах (5.3) и (5.4) сначала вычисляются внутренние интегралы как обычные определенные интегралы, а затем – внешние. Пределы у внешних интегралов всегда постоянны. Если внешний интеграл вычисляется по x, то пределы внутреннего интеграла могут зависеть от x или быть постоянными; если же внешний интеграл вычисляется по y, то пределы внутреннего интеграла могут зависеть от y или быть постоянными. Внутренние и внешние *пределы* в повторных интегралах (в декартовых координатах) *постоянны* тогда и только тогда, когда область D является *прямоугольником*.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = -x^2, y = -\sqrt{x}$.

Решение. Построим область интегрирования D и перейдем к повторному интегралу:



$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2}(x+2y)dy=$$

$$=\int_0^1 (xy+y^2)\Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2}dx=\int_0^1((-xx^2+x^4)-$$

$$-(-x\sqrt{x}+x))dx=\int_0^1(-x^3+x^4+x\sqrt{x}-x)dx=$$

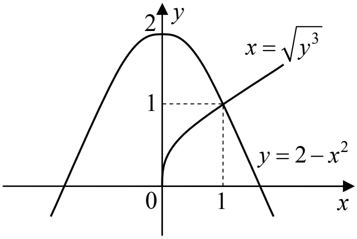
$$=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=-\frac{3}{20}.$$

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле – это значит перейти от одного повторного интеграла к другому, т. е. перейти от внешнего интегрирования по x и внутреннего по y к внешнему интегрированию по y и внутреннему по x и наоборот.

Пример. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y^3}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx.$$

Решение. Строим область D: $x=0$, $x=\sqrt{y^3}$, $x=\sqrt{2-y}$.



$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y^3}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx=$$

$$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2} f(x,y)dy.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть D – замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой (существует касательная, за исключением, быть может, конечного числа точек) границей L, $f(x,y)$ – заданная в D кусочно-непрерывная ограниченная функция.

Введем полярную систему координат на плоскости. Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где r и φ – полярный радиус и угол соответственно.

Пусть область D ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, т. е. имеет вид *криволинейного сектора* (рис. 5.3).

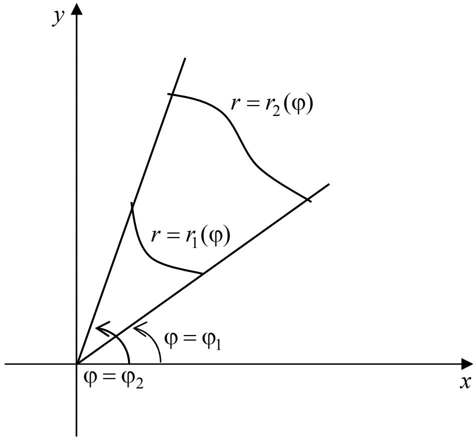


Рис. 5.3. Криволинейный сектор

Тогда, разбивая область D на частичные области координатными линиями $r = \text{const}$ (окружности) и $\varphi = \text{const}$ (лучи), имеем: $\Delta S \approx r\,\Delta r\,\Delta\varphi$ или, переходя к дифференциалам, $dS = r dr d\varphi$, откуда получаем *сведение* двойного интеграла в декартовых координатах к интегралу в *полярных*:

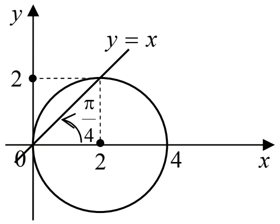
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

Выражение $dS = rdrd\varphi$ – элемент площади в полярной системе координат.

Пример. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если область D определяется неравенствами: $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq x$.

Решение. Построим границы области: $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$. Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0$,

$(x-2)^2+y^2=4$. Это уравнение окружности с центром в точке (2, 0) и радиуса 2. Строим область D.



Запишем уравнение окружности и прямой в полярной системе координат:

$$x^2+y^2=4x,$$

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi,\ r=4\cos\varphi;$$

$$y=x,\ r\sin\varphi=r\cos\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Проведя из полюса луч, пересекающий область интегрирования, видим, что он входит в область при $r=0$ и выходит при $r=4\cos\varphi$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

Геометрические приложения двойного интеграла

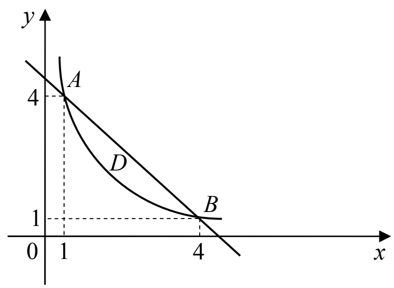
1. *Площадь* S_D плоской фигуры D выражается в зависимости от рассматриваемой системы координат следующими интегралами:

$S_D=\iint\limits_D dxdy$ – в декартовой системе координат;

$S_D=\iint\limits_D rdrd\varphi$ – в полярной системе координат.

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $xy=4,\ x+y-5=0$.

Решение. Изобразим область D и определим координаты точек пересечения кривых. Для этого решим систему уравнений:



$$\begin{cases}xy=4,\\x+y-5=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=5-x,\\x(5-x)=4;\end{cases}$$

$$-x^2+5x=4,$$

$$x^2-5x+4=0,$$

$$A(1,4),\ B(4,1).$$

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_{\frac{4}{x}}^{5-x}dy=\int\limits_1^4 dxy\Big|_{\frac{4}{x}}^{5-x}=\int\limits_1^4\left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx=$$

$$=\left(5x-\frac{x^2}{2}-4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4=20-8-4\ln 4-5+\frac{1}{2}+4\ln 1=$$

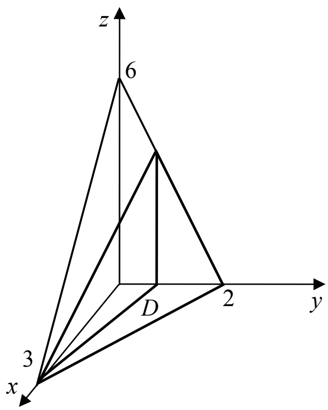
$$=12+\frac{1}{2}-4\ln 4=12{,}5-4\ln 4=$$

$$=12{,}5-8\ln 2.$$

2. *Объем* V цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)\geq 0$, снизу – замкнутой областью D в плоскости Oxy и с боков – цилиндрической поверхностью с направляющей – границей области D и образующей, параллельной оси Oz, выражается интегралом $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (*геометрический смысл* двойного интеграла).

Пример. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2x+3y+z-6=0$, $x+3y=3$, $x=0$, $z=0$.

Решение. Изобразим данное тело в системе координат Oxy. Уравнение $2x+3y+z-6=0$ определяет плоскость, которая на координатных осях Ox, Oy, Oz отсекает соответственно отрезки 3, 2, 6.

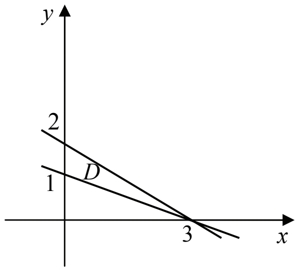


Уравнение $x+3y=3$ на плоскости Oxy определяет прямую, а в пространстве – плоскость, параллельную оси Oz.

Тело ограничено сверху плоскостью $2x+3y+z-6=0$, а снизу – плоскостью $z=0$. Проекция данного тела на плоскость Oxy изображена далее (см. на с. 132).

Для вычисления объема V воспользуемся формулой для нахождения объема цилиндрического тела:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy;$$



$$V=\iint\limits_D (6-2x-3y)dxdy=$$

$$=\int_0^3 dx \int_{\frac{3-x}{3}}^{\frac{6-2x}{3}} (6-2x-3y)dy=$$

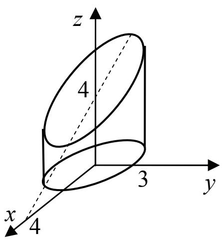
$$=\int_0^3 \left((6-2x)y-\frac{3y^2}{2} \right)\Bigg|_{\frac{3-x}{3}}^{\frac{6-2x}{3}} dx=$$

$$=\int_0^3 \left(\frac{(6-2x)^2}{3}-\frac{3(6-2x)^2}{18}-(6-2x)\frac{3-x}{3}+\frac{3}{2}\left(\frac{3-x}{3}\right)^2 \right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3 (3-x)^2 dx=-\frac{1}{6}\int_0^3 (3-x)^2 d(3-x)=-\frac{1}{6}\frac{(3-x)^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{1\cdot 3^3}{6\cdot 3}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=0,\quad x^2+y^2=9,\quad z=4-x.$

Решение. Тело изображено далее. Его проекцией на плоскость Oxy является круг радиуса 3. Переходя к полярным координатам, получим:



$$V=\iint\limits_D (4-x)dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (4-r\cos\varphi)rdr=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (4r-r^2\cos\varphi)dr=\int_0^{2\pi} \left(4\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\varphi \right)\Bigg|_0^3 d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi} \left(\frac{36}{2}-\frac{27}{3}\cos\varphi \right) d\varphi=18\varphi\Big|_0^{2\pi}=36\pi.$$

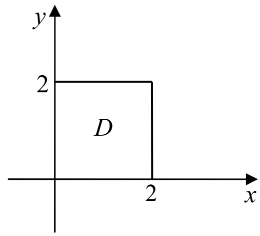
Физические приложения двойного интеграла

1. *Масса* m_D материальной пластины D с поверхностной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$ в точке $M(x,y)$ рассчитывается по формуле (*механический смысл* двойного интеграла):

$$m_D=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy.$$

Пример. Найти массу плоской пластинки D: $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$, поверхностная плотность которой $\gamma(x,y)=x+y$.

Решение.



$$m = \iint_D (x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (x+y)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dx = \int_0^2 (2x+2)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_0^2 = 4 + 4 = 8.$$

2. *Статические моменты* S_x и S_y фигуры D относительно осей Ox и Oy, а также *координаты* x_c, y_c *центра тяжести* (масс) фигуры могут быть вычислены по следующим формулам:

$$S_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy,\ S_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy,\ x_c = \frac{S_y}{m},\ y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Пример. Найти координаты центра масс плоской пластинки, масса которой найдена в предыдущем примере.

Решение.

$$S_x = \iint_D y(x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 y(x+y)dy = \int_0^2 \left(x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x + \frac{8}{3} \right)dx = \left(2\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}x \right)\Bigg|_0^2 = 4 + \frac{16}{3} = 9\frac{1}{3},$$

$$S_y = \iint_D x(x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 x(x+y)dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{8}{3} + 2x \right)dx = \left(\frac{8}{3}x + 2\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} + 4 = 9\frac{1}{3},$$

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{9\frac{1}{3}}{8} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6},$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{9\frac{1}{3}}{8} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6}.$$

5.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Как строится интегральная сумма для функции $f(x, y)$ по области D? Дайте определение двойного интеграла.

2. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x, y)$ по области D.

3. Перечислите основные свойства двойного интеграла.

4. Каким образом вычисляется двойной интеграл в декартовых координатах?

5. В каких случаях для определения двойного интеграла удобно использовать полярные координаты? Запишите формулу перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным.

6. Каковы геометрические и физические приложения двойного интеграла?

5.1.3. Практический минимум

1. Найти интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + y)dy$; б) $\int\limits_{-1}^1 xdx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} dy$; в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2 + y^2}, x \neq 0$;

г) $\int\limits_3^5 dx \int\limits_0^2 (x + y)dy$; д) $\int\limits_D^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y)dx$; е) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}dy, x \neq 0, y \neq 0$;

ж) $\iint\limits_D ydxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 1)$;

з) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, где D ограничена кривыми: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$.

2. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D (x - 2)dxdy$; D: $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$;

б) $\iint\limits_D e^x dxdy$; D: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$;

в) $\iint\limits_D dxdy$; D: $x = 0$, $x = 2$, $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$;

г) $\iint\limits_D (x^3 + y)dxdy$; D: $y + x = 4$, $y + x = 2$, $x \geq 0$, $x \leq 1$;

д) $\iint\limits_D dxdy;\ D\colon x=1,\ x=5,\ y=2\sqrt{x-1},\ y=\dfrac{(x-1)^2}{4};$

е) $\iint\limits_D xydxdy;\ D\colon y=x^3,\ y=0,\ x\le 2.$

3. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} f(x,y)dx;$ б) $\int\limits_{1}^{7} dx \int\limits_{\frac{(x-1)^2}{6}}^{x-1} f(x,y)dy;$

в) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx;$ г) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\frac{4x^2}{9}}^{4\sqrt{\frac{x}{3}}} f(x,y)dy;$

д) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx;$

е) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx;$

ж) $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy;$ з) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx.$

4. Расставить пределы интегрирования для интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по заданным областям в различных порядках:

а) D: прямоугольник с вершинами $A(1,\ 2),\ B(5,\ 2),\ C(5,\ 4),\ D(1,\ 4);$

б) $D\colon\ y^2=8x,\ y\le 2x,\ y+4x-24\le 0;$

в) $D\colon\ y=2x-x^2,\ x+y=0;$

г) D: параллелограмм, ограниченный прямыми: $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$;

д) D: треугольник с вершинами $A(-2,\ -2),\ B(-1,\ 2),\ C(6,\ 2);$

е) $D\colon\ xy=1,\ xy=2,\ x-y+1=0,\ x-y-1=0\ (x>0,\ y>0).$

5. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:

а) $D\colon\ x^2+y^2=4,\ y\ge -x,\ y\le\sqrt{3}x;$ б) $D\colon\ x^2+y^2\le 3x;$

в) $D\colon\ x^2+y^2\ge a^2,\ x^2+y^2\le 2ax;$ г) $D\colon\ x^2+y^2\le 2y;$

д) D: $x^2 + y^2 \le x,\ \ x^2 + y^2 \le -y$; е) D: $x^2 + y^2 \le 4,\ \ x + y \le 2$;

ж) D: $x^2 + y^2 \le -y$.

6. Перейти к полярным координатам и вычислить:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \dfrac{dy}{1+x^2+y^2}$;

б) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, D: $x \ge 0,\, y \ge 0,\, x^2 + y^2 \le a^2$;

в) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$;

г) $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, D: $x = \sqrt{2},\ \ y \le x,\ \ x^2 + y^2 = 8$, $x \ge 0,\ \ y \ge 0$;

д) $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx$;

е) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9}\, dxdy$, D: $x^2 + y^2 \ge 9,\ \ x^2 + y^2 \le 25$.

7. Определить площадь области D:

а) D: $xy = 1,\ \ y = x^2$, $y = 2,\ \ x = 0$;

б) D: $y = \ln x,\, y = x - 1$, $y = -1$;

в) D: $y = \dfrac{(x-1)^2}{4},\, y = 2\sqrt{x-1}$, $x = 1,\ \ x = 5$;

г) D: $x^2 + y^2 \ge 2x$, $x^2 + y^2 \le 4x$;

д) D: $x = 0,\, x = 5,\, y = \dfrac{2x^2}{5} - 4$, $y = 2x - 4$.

8. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $x = 0,\, y = 0,\, z = 0,\, 2x + 3y - 12 = 0,\, z = \dfrac{y^2}{2}$;

б) $2x + 3y + 4z = 12,\, x = 0,\, y = 0,\, z = 0$;

в) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 3,\, x = 0,\, y = 0,\, z = 0$;

г) $z - 2x = 0,\, z - 4x = 0,\ \ x^2 + y^2 = 2x$;

д) $y = x^2,\ z = y,\ z + y = 2$;

е) $z = 6 - y,\, y = x^2,\, y = 4,\, z = 0\ (y \le 4)$;

ж) $2z = 2 + x^2 + y^2,\ \ z = 4 - x^2 - y^2$.

9. Вычислить массу однородной пластинки $(\gamma = \text{const})$, ограниченной кривыми: $y = x^2,\ x + y = 2$.

10. Найти массу неоднородной пластины D, ограниченной линиями: $x=0,\ x+2y+2=0,\ x+y=1$, с поверхностной плотностью $\gamma = x^2$.

Минимум для аудиторной работы

1. а), б), в), ж); 2. а), в), г); 3. а), б), в); 4. а), б); 5. а), б); 6. а), б), в); 7. а), б), г); 8. а), б), г); 9.

5.1.4. Ответы

1. а) $\frac{8}{3}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{6}$; г) 20; д) 0; е) 2,25; ж) $\frac{1}{3}$; з) e. **2.** а) $-\frac{2}{3}$; б) 0,5; в) $\frac{8}{3}$; г) $\frac{11}{2}$; д) $\frac{16}{3}$; е) 16. **3.** а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^9 dx \int\limits_{-\sqrt{4x}}^{3-x} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{y+1}^{1+\sqrt{6y}} f(x,y)dx$; в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$; г) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3y^2}{16}}^{\frac{3}{2}\sqrt{y}} f(x,y)dx$;

д) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy$; е) $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$;

ж) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)dx$; з) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

4. а) $\int\limits_1^5 dx \int\limits_2^4 f(x,y)dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^5 f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{-8}^0 dy \int\limits_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{24-y}{4}} f(x,y)dx +$

$+\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{24-y}{4}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{24-y}{4}} f(x,y)dx = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{8x}}^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_2^{4,5} dx \int\limits_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy +$

$+\int\limits_{4,5}^8 dx \int\limits_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} f(x,y)dy$; в) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{2x}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy = \int\limits_{-3}^0 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx +$

$+\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$; г) $\int\limits_2^4 dy \int\limits_y^{y+3} f(x,y)dx = \int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(x,y)dy +$

$$+\int_4^5 dx\int_2^4 f(x,y)dy+\int_5^7 dx\int_{x-3}^7 f(x,y)dy;$$ д) $$\int_{-2}^2 dy\int_{\frac{y-6}{4}}^{2y+2} f(x,y)dx=\int_{-2}^{-1} dx\int_{\frac{x-2}{2}}^{4x+6} f(x,y)dy+$$

$$+\int_{-1}^6 dx\int_{\frac{x-2}{2}}^2 f(x,y)dy;$$ е) $$\int_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}^1 dx\int_{\frac1x}^{x+1} f(x,\ y)dy+\int_1^{\frac{1+\sqrt5}{2}} dx\int_{\frac1x}^{\frac2x} f(x,\ y)dy+$$

$$+\int_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}^2 dx\int_{x-1}^{\frac2x} f(x,y)dy=\int_{\frac{2}{1+\sqrt5}}^{\frac12} dy\int_{\frac1y}^{y+1} f(x,y)dx+\int_{\frac12}^{\frac{2}{\sqrt5-1}} dy\int_{\frac1y}^{\frac2y} f(x,y)dx+$$

$$+\int_{\frac{2}{\sqrt5-1}}^2 dy\int_{y-1}^{\frac2y} f(x,\ y)dx.$$

5. а) $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0 f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr;$$

б) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{3\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr;$$ в) $$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr+$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi\int_a^{2a\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_a^{2a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho;$$

г) $$\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr;$$ д) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr+$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\varphi\int_{-\sin\varphi}^0 f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr;$$ е) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi\int_0^2 f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr;$$ ж) $$\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi\int_0^{-\sin\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

6. а) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1\frac{rdr}{1+r^2}=\frac{\pi}{4}\ln 2;$$ б) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\frac{\pi a}{2};$$

в) $$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 e^{r^2}rdr=\pi(e-1);$$ г) $4\pi-\dfrac43;$ д) $$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2\sqrt{1+r^2}\,rdr=\frac{10\pi}{3}\sqrt5;$$

е) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_3^5 \sqrt{r^2-9}\, rdr = \frac{128}{3}\pi$. **7.** а) $\frac{2}{3}+\ln 2$; б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$; в) $\frac{16}{3}$; г) 3π; д) $\frac{25}{3}$. **8.** а) 16; б) 12; в) 13,5; г) $\frac{64}{9}$; д) $\frac{16}{5}$; е) 64; ж) 3π. **9.** $\frac{9}{2}$. **10.** $\frac{32}{3}$.

5.2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.2.1. Теоретический минимум

1. Определение тройного интеграла.
2. Тройной интеграл в декартовых координатах и его свойства.
3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
4. Некоторые приложения тройного интеграла.

Определение тройного интеграла

Рассмотрим в пространстве $Oxyz$ ***кубируемое*** – *измеримое* (т. е. имеющее *объем*) тело (область) G, на котором определена некоторая функция $f(M)$, $M \in G$. Осуществим далее ***n-разбиение*** области G на n пересекающихся, разве лишь, по границам кубируемых частичных областей $G_1, ..., G_n$ так, чтобы:

1) $G = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n$;

2) объем $G_i \cap G_j$ равен нулю ($i \neq j$),

и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i,$$

где ΔV_i – объем G_i; M_i – произвольная точка, принадлежащая G_i.

Символом d_i обозначим диаметр G_i – наибольшее расстояние между точками области G_i, наибольший из частичных диаметров – ***диаметр разбиения*** – символом λ_n: $\lambda_n = \max\limits_i d_i$.

Если теперь существует *конечный предел* интегральных сумм σ_n при *диаметре разбиения, стремящемся к нулю*, независимо от *способа разбиения* области G на части и от *выбора точек* M_i в частичных областях, то этот предел называется ***тройным интегралом*** от функции f по области G и обозначается $\iiint\limits_G f(M)dV$.

Таким образом,

$$\iiint\limits_G f(M)dV = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i. \qquad (5.5)$$

Функция $f(M) = f(x, y, z)$ в этом случае называется интегрируемой в области G.

Как и в случае определенного интеграла имеют место следующие условия интегрируемости: ***необходимое***: если функция интегрируема, то она ограничена, и ***достаточное***: если функция непрерывна, то она интегрируема.

Тройной интеграл в декартовых координатах и его свойства

Пусть $f(x, y, z)$ интегрируема в области G. Разбивая область G на части *координатными поверхностями* в декартовой системе координат, т. е. плоскостями, параллельными координатным плоскостям, имеем $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ и, переходя к дифференциалам, $dV = dxdydz,$ откуда $\iiint\limits_G f(x, y, z)dV = \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz.$

Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам (см. на с. 125–126) двойного интеграла.

Тройные интегралы вычисляются *сведением* к *повторным* путем определения трех однократных интегралов для каждого из шести повторных интегралов.

В частности, если область интегрирования G ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x, y),$ сверху – поверхностью $z = \varphi_2(x, y),$ $\varphi_1(x, y) \le \varphi_2(x, y), (x, y) \in D,$ где D – проекция области G на плоскость $Oxy,$ с боков – цилиндрической поверхностью с направляющей – границей области D и образующей, параллельной оси Oz, причем каждая прямая, параллельная оси Oz, не лежащая на боковой поверхности тела G, пересекает границу этого тела не более чем в двух точках с аппликатами $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y),$ то тройной интеграл *сводится* к *двойному*, а затем в зависимости от вида области D к одному или двум *повторным интегралам* (рис. 5.4):

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

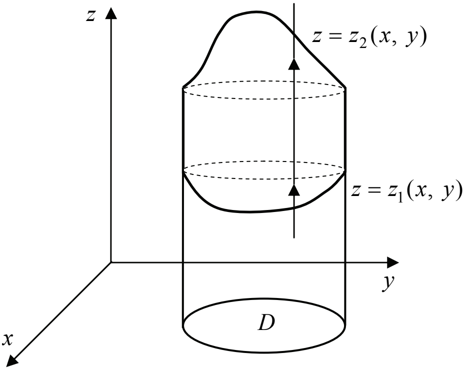


Рис. 5.4. Повторное интегрирование

Аналогично, проектируя область G на координатные плоскости Oxz и Oyz, можно получить (если существуют) оставшиеся четыре повторных интеграла.

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V (x+3y-z)dxdydz$.

Область интегрирования V ограничена поверхностями: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=3$.

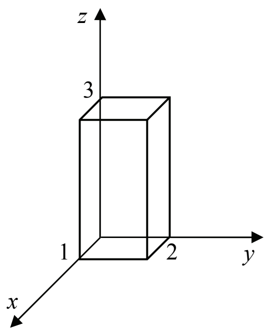
Решение.

$$\iiint\limits_V (x+3y-z)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 (x+3y-z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^2 \left(xz+3yz-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dy = \int_0^1 dx\int_0^2 \left(3x+9y-\frac{9}{2}\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(3xy+9\frac{y^2}{2}-\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (6x+18-9)dx = \left(6\frac{x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_0^1 = 12.$$



Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Рассмотрим теперь цилиндрические координаты r, φ, z в пространстве: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$. Суть цилиндрических координат точки M показана на рис. 5.5.

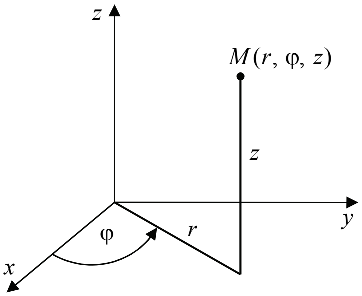


Рис. 5.5. Цилиндрические координаты

Тогда следующая формула выражает *переход* от *декартовых координат* в тройном интеграле к *цилиндрическим*:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_G f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi,\ z)dz$$

в случае, когда область G проектируется на плоскость Oxy в криволинейный сектор D, ограниченный лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и кривыми $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Некоторые приложения тройного интеграла

Объем V пространственного тела G с помощью тройного интеграла находится по формуле

$$V = \iiint\limits_G dxdydz$$

в декартовой системе координат и по формуле

$$V = \iiint\limits_G rdrd\varphi dz$$

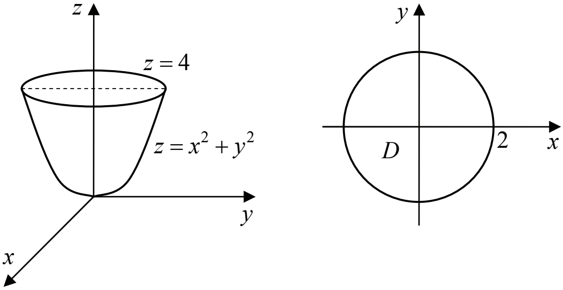
в цилиндрических координатах.

Пример. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 4$, а снизу – параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$:

$$V=\iiint\limits_G dxdydz = \iiint\limits_G rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_{r^2}^4 dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r(4-r^2)dr =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(4\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}(8-4)d\varphi = 4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$



Масса m_G пространственного тела G выражается следующей формулой:

$$m_G=\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz,$$

где $\gamma(x,y,z)$ – объемная плотность в точке $M(x,y,z)$ (*механический смысл* тройного интеграла).

Пример. Найти массу тела, рассмотренного в предыдущем примере, если объемная плотность тела $\gamma(x,y,z)=z$.

Решение.

$$m=\iiint\limits_G zdxdydz=\iiint\limits_G zrdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_{r^2}^4 zdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\left(\frac{16}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(8\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(16-5\frac{1}{3}\right)d\varphi = 10\frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{32}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64\pi}{3}.$$

5.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение тройного интеграла от функции $f(x,y,z)$ по области G.

2. Запишите формулы для вычисления тройного интеграла в декартовых и цилиндрических координатах.

3. Перечислите геометрические приложения тройного интеграла, которые Вы знаете.

4. Назовите, каковы физические приложения тройного интеграла.

5.2.3. Практический минимум

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$; б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^4 (x+y+z)dz$;

в) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^2 (z+4)dz$; г) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} zdz$.

2. Найти интегралы:

а) $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V – область, ограниченная поверхностями: $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$;

б) $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V – область, которая ограничена поверхностями: $x=0, x=2, y=0, y=1, z=0, z=1-y$;

в) $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, где V – тетраэдр, ограниченный плоскостями: $x+y+z=2, x=0, y=0, z=0$;

г) $\iiint\limits_V (2x+3y+z)dxdydz$, где V – область, которая ограничена поверхностями: $x=0, y=0, y+x=3, z=0, z=4$.

3. С помощью тройного интеграла определить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=2x+y, y=\sqrt{4-x^2}, x=0, y=0, z=0$;

б) $z=2x, y=\dfrac{x^2}{2}, x=2, y=0, z=0$;

в) $z=x^2+y^2, \ y=x, y=2x, x=2, z=0$;

г) $z=9-y^2, \ y=x, \ y=3, x=0, \ z=0$ (перейти к цилиндрической системе координат);

д) $z=x^2+y^2, \ x^2+y^2=2y, \ z=0$ (перейти к цилиндрической системе координат);

е) $x^2+y^2=R^2, \ z=0, z=1, y \ge x, y \le x\sqrt{3}$.

4. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

Минимум для аудиторной работы

1. а), б); 2. а), б); 3. а), б), г); 4.

5.2.4. Ответы

1. а) $\frac{1}{6}$; б) 108; в) $\frac{40}{3}$; г) $\frac{81}{4}$. **2.** а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 2; г) 126. **3.** а) 8; б) 4; в) $\frac{40}{3}$; г) $\frac{81}{4}$; д) $\frac{3}{2}\pi$; е) $\frac{3}{8}\pi$. **4.** $\frac{3}{35}$.

Глава 6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1.1. Теоретический минимум

1. Общие понятия. Криволинейные интегралы первого (КРИ-1) и второго (КРИ-2) родов.
2. Сравнительный анализ понятий КРИ-1 и КРИ-2.
3. Свойства криволинейных интегралов.
4. Вычисление криволинейных интегралов.
5. Приложения криволинейных интегралов.

Общие понятия. Криволинейные интегралы первого (КРИ-1) и второго (КРИ-2) родов

Предположим, что на плоскости Oxy задана гладкая кривая L, т. е. кривая, в каждой точке $M(x, y)$ которой определена касательная к этой кривой. Тогда для любой ее дуги $L^* \subset L$ определено понятие ℓ_{L^*} – длины дуги L^*.

Произвольным образом осуществим ***n-разбиение*** кривой L на n частей (дуг): $L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$, где частичные дуги могут соприкасаться, разве лишь, своими концами, т. е. длина общей части $L_i \cap L_j$, $i \neq j$, равна нулю. Пусть далее на кривой L задана некоторая скалярная функция $f(x, y)$, $(x, y) \in L$. На каждой из полученных дуг L_i длиной $\Delta\ell_i$ произвольно выберем точку $M_i^*(\xi_i,\ \eta_i)$ и составим ***интегральную сумму***:

$$\sigma_n^1 = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\ell_i.$$

Обозначим через d_n наибольшую из длин частичных дуг L_i – ***диаметр разбиения***: $d_n = \max\Delta\ell_i = \max\ell_{L_i}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Если при $n \to +\infty$ и $d_n \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ_n^1 и этот предел не зависит как от способа разбиения кривой L на части L_i, так и от выбора точек M_i^*, то такой предел называется КРИ-1 – ***криволинейным интегралом первого рода*** –

интегралом по длине дуги от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается следующим образом:

$$\int_L f(x,y)d\ell.$$

Предположим теперь, что кривая $L=\overset{\frown}{AB}$ является ***ориентированной***, т. е. на ней задано направление (здесь A – начало, B – конец кривой L), и на кривой L задана векторная функция $\overline{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$. Осуществим ***n-разбиение*** кривой L точками $A=M_0$, $M_1,...,M_n=B$; $M_i(x_i,y_i)$, $i=1,...,n$, на n частей: $L=L_1\cup L_2\cup...\cup L_n$, где частичные дуги $L_i=\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ могут соприкасаться, разве лишь, своими концами (началом M_{i-1} или концом M_i). На каждой из полученных частичных дуг L_i произвольно выберем точку $M_i^*(\xi_i,\ \eta_i)$ и составим ***интегральную сумму***:

$$\sigma_n^2=\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i\right),$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, $i=1,2,...,n$ (рис. 6.1).

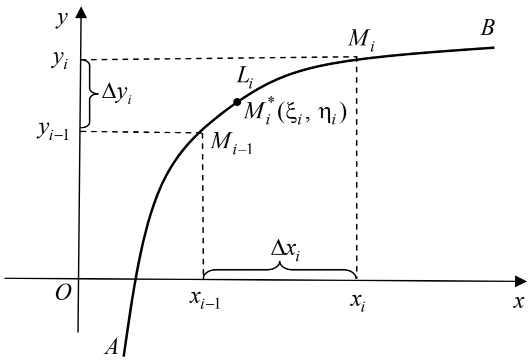


Рис. 6.1. Компоненты интегральной суммы

Если теперь при $n\to+\infty$ и $d_n\to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ_n^2 и этот предел не зависит как от способа разбиения кривой L на частичные дуги L_i, так и от выбора точек M_i^* на этих дугах, то такой предел называется КРИ-2 – ***криволинейным***

интегралом второго рода – интегралом по координатам от функции $\vec{F}(x,y)$ по кривой L и обозначается следующим образом:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

В дальнейшем считаем, что кривая L является гладкой. Для таких кривых имеет место

$$\boxed{(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2}$$

– *теорема Пифагора для дифференциалов*: квадрат дифференциала длины дуги равен сумме квадратов дифференциалов координат. Будем также предполагать, что интегрируемые функции $f(x,y)$, $\vec{F}(x,y)$ в КРИ-1 и КРИ-2 являются непрерывными. В этом случае *криволинейные интегралы существуют*.

Аналогично определяются КРИ-1 и КРИ-2 в пространстве:

$$\int\limits_L f(x,y,z)d\ell \text{ и } \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Рассмотрим в пространстве заданную параметрически гладкую кривую L:

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in T = [t_0, t_1], \\ z = z(t), \end{cases}$$

где функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют непрерывные на T производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, которые одновременно в нуль не обращаются. Тогда дифференциал дуги $d\ell$ можно вычислить по формуле

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2 + (z'(t)dt)^2},$$

откуда

$$d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt,$$

где $t_0 < t_1$ (dt выносится из-под корня).

Сравнительный анализ понятий КРИ-1 и КРИ-2

Рассмотрим КРИ-1 и КРИ-2 в сравнении между собой и с теми задачами, которые приводят к понятию криволинейных интегралов.

КРИ-1	КРИ-2
В области D задана ***неориентированная*** измеримая кривая L (на которой нет направления и определена мера – длина). В данной области задано некоторое ***скалярное поле*** $u = u(x, y, z)$, например ***поле масс*** $u = u(M) = u(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ – линейная плотность дуги L в точке $M(x, y, z)$, $M(x, y, z) \in L$. Рассматривается ***задача нахождения массы*** m_L материальной дуги L.	В области D задана ***ориентированная*** измеримая кривая $L = \overset{\frown}{AB}$ (здесь A – начало, B – конец кривой L). В данной области задано некоторое ***векторное поле*** $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big)$, $M(x, y, z) \in$ $\in L = \overset{\frown}{AB}$, например ***силовое поле***. Рассматривается ***задача нахождения работы*** силового поля по перемещению по дуге L материальной точки из положения A в конец B.
Будем рассматривать только те кривые, для которых длина бесконечно малой дуги (по длине) эквивалентна длине стягивающей дугу хорды при условии, что дуга стягивается в точку: $\Delta\ell \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, что, в частности, имеет место для гладких кривых, откуда, переходя к дифференциалам, получаем точное равенство: $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$.	
Для решения поставленной задачи вводится ***скалярный элемент*** дуги: $$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$	Вводится ***векторный элемент*** дуги: $$d\vec{\ell} = d\ell \cdot \vec{e}_\tau = d\vec{r} = (dx, dy, dz),$$ где $\vec{e}_\tau = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор касательной.
Здесь $\cos\alpha = \dfrac{dx}{d\ell}$, $\cos\beta = \dfrac{dy}{d\ell}$, $\cos\gamma = \dfrac{dz}{d\ell}$, $\vec{e}_\tau = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный вектор касательной.	
Выберем теперь элементарный участок (бесконечно малую дугу) кривой длиной $d\ell$. Тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка	
элементарная масса – масса элементарного участка кривой – ***дифференциал массы*** выражается	работа поля на элементарном участке кривой – ***дифференциал работы*** выражается с помощью

на основании следующего уравнения: $$dm = \rho(x, y, z)d\ell.$$	нижеприведенной следующей формулы: $$dA = \vec{F}(M)\cdot d\vec{\ell} = \\ = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + \\ + R(x, y, z)dz.$$
Интегрируя по всей кривой L, получаем	
массу $m_L = \int\limits_L \rho(x, y, z)d\ell$ всей кривой L или в общем случае скалярного поля $\int\limits_L u(x, y, z)d\ell$ – ***криволинейный интеграл первого рода*** (КРИ по длине дуги).	***работу*** силового поля на кривой (по контуру) L: $$A_L = \int\limits_L \vec{F}(M)\cdot d\vec{\ell} = \\ = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + \\ + R(x, y, z)dz -$$ ***криволинейный интеграл второго рода*** (КРИ по координатам)

Свойства криволинейных интегралов

Прежде всего, отметим физический смысл КРИ. Как вытекает из предыдущего:

1) $\int\limits_L \rho(x, y, z)d\ell$ выражает *массу* m_L материальной дуги L с линейной плотностью $\rho(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z) \in L$ (*физический смысл* КРИ-1);

2) $\int\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int\limits_L \vec{F}(x, y, z)\cdot d\vec{\ell}$ выражает *работу* силового поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ при перемещении материальной точки $M = M(x, y, z)$ вдоль кривой $L = \overset{\frown}{AB}$ от точки A до точки B (*физический смысл* КРИ-2).

Криволинейные интегралы обладают многими свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла, но есть и различия.

В частности, для КРИ-1 и КРИ-2 остаются в силе такие важные свойства, как:

1) *линейность*: интеграл от линейной комбинации интегрируемых функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов от этих функций:

$$\int_L (\alpha_1 u_1(x,y,z) + \ldots + \alpha_k u_k(x,y,z))d\ell =$$
$$= \alpha_1 \int_L u_1(x,y,z)d\ell + \ldots + \alpha_k \int_L u_k(x,y,z)d\ell,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ (аналогичное свойство имеет место и для КРИ-2);

2) *аддитивность*: интеграл по кривой $L = L_1 \cup L_2$, состоящей из кривых L_1 и L_2, соприкасающихся только концами (пересечение $L_1 \cap L_2$ имеет нулевую меру), равен сумме интегралов по L_1 и L_2.

При $A = B$ кривая (контур) L замкнута, что отражается кружком в обозначении соответствующего КРИ (по замкнутому контуру): $\oint\limits_L \ldots$

Особенность рассматриваемого случая для КРИ-2 заключается в том, что нужно указывать направление обхода контура.

Направление обхода контура L называется *положительным* (обычно против часовой стрелки), если при движении по контуру область, ограниченная контуром, остается *слева* (рис. 6.2, *а*). Направление обхода, обратное положительному, называется *отрицательным* (рис. 6.2, *б*).

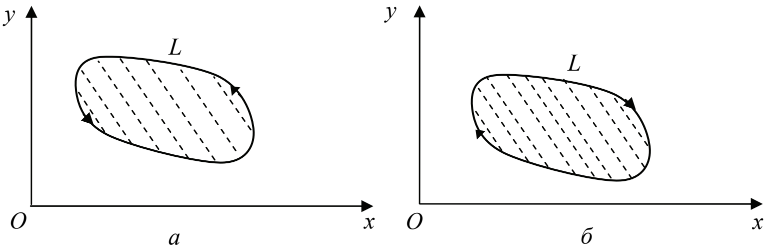


Рис. 6.2. Различные пути обхода контура

Направление обхода часто поясняется стрелкой на кружке, расположенном на знаке интеграла:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Отметим также некоторые свойства, различающие КРИ-1 и КРИ-2:

1) $\int\limits_L 1 \cdot d\ell = \ell_L$ – КРИ-1 от единичной функции дает длину (меру) кривой;

2) если на кривой $L = \overset{\frown}{AB}$ изменить направление на $-L = \overset{\frown}{BA}$, то КРИ-2 изменит знак:

$$\int_L \ldots = -\int_{-L} \ldots,$$

в то время как КРИ-1 не зависит от направления.

Последние свойства КРИ-2 больше «роднят» с определенными, а КРИ-1 – с кратными интегралами.

Вычисление криволинейных интегралов

Рассмотрим в пространстве гладкую параметризованную кривую L: $L = \{(x, y, z): x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in T = [t_0, t_1]\}$.

Тогда вычисление криволинейных интегралов сводится к нахождению определенных интегралов:

в случае КРИ-1:

$$\boxed{\int_L f(x, y, z)d\ell = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t),\ z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt,}$$

где $t_0 < t_1$;

в случае КРИ-2:

$$\boxed{\begin{gathered}\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt,\end{gathered}}$$

где t_0 соответствует началу $A(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, а t_1 – концу $B(x(t_1), y(t_1), z(t_0))$ дуги L.

Пример. Вычислить КРИ-1 $\int_L (x + y + z)\, d\ell$ вдоль кривой

$$L: \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = t, \end{cases}$$

Решение. Найдем дифференциал дуги $d\ell$. Имеем:

$$x'(t) = -2\sin 2t,\ y'(t) = 2\cos 2t,\ z'(t) = 1,$$

$$d\ell = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1}\,dt = \sqrt{5}\,dt,$$

$$\int\limits_L (x+y+z)\,d\ell = \int\limits_0^{2\pi} (\cos 2t + \sin 2t + t)\sqrt{5}\,dt =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{5}.$$

Пример. Вычислить КРИ-2 $\int\limits_L xdx + ydy + zdz$ вдоль кривой

$$L : \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \ t \in [0, \pi]. \\ z = 1 + t^2, \end{cases}$$

Решение. Поскольку $dx = (1-\cos t)dt$, $dy = \sin t dt$, $dz = 2tdt$, то имеем:

$$\int\limits_L xdx + ydy + zdz = \int\limits_0^{\pi} (t - \sin t)(1-\cos t)\,dt + (1-\cos t)\sin t dt + (1+t^2)2tdt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (3t + 2t^3)\,dt - \int\limits_0^{\pi} t\cos t dt = \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{2t^4}{4} - t\sin t - \cos t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{2} + 2.$$

Здесь второй интеграл вычисляли методом интегрирования по частям.

В случае КРИ-1 на плоскости, когда кривая L задается с помощью непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x), x \in [a, b]$, получаем:

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx, \ a < b}$$

(здесь x играет роль параметра t).

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{x}{y}d\ell$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками $A(2, 2)$ и $B(8, 4)$.

Решение. Это КРИ-1. Найдем дифференциал дуги $d\ell$ для кривой $y = \sqrt{2x}$. Имеем:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \ d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_L \frac{x}{y}\,d\ell = \int_2^8 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx = \int \frac{x\sqrt{1+2x}}{2x}\,dx = \frac{1}{4}\int_2^8 (1+2x)^{\frac{1}{2}}\,d(1+2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{2}{3}(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^8 = \frac{1}{6}\Big(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\Big).$$

Если плоская кривая L задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, в полярной системе координат, то, учитывая связь $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (здесь φ играет роль параметра t), получаем:

$$d\ell = \sqrt{((r\cos\varphi)')^2 + ((r\sin\varphi)')^2}\,d\varphi = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi,$$

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,d\ell = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi, \text{ где } \alpha < \beta.}$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x^2\,d\ell$ вдоль кривой $r = 2\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Решение. Это КРИ-1. Определим $d\ell$, так как $r' = 2\cos\varphi$, то

$$d\ell = \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi = \sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (2\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{4(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}\,d\varphi = 2d\varphi.$$

Используя формулы связи декартовых и полярных координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, имеем:

$$x^2 = (r\cos\varphi)^2 = (2\sin\varphi\cos\varphi)^2 = \sin^2 2\varphi,$$

$$\int_L x^2\,d\ell = 2\int_0^\pi \sin^2 2\varphi\,d\varphi = 2\int_0^\pi \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi = 2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^\pi = \pi.$$

В случае КРИ-2 на плоскости, когда кривая $L = \overset{\frown}{AB}$ задается с помощью непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, где $A(a, y(a))-$ начало, $B(b, y(b))-$ конец кривой L, получаем:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)]dx.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xy\,dx + (x-y)dy$ вдоль линии $y = x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

Решение. Это КРИ-2. Имеем:

$$dy = 2x dx,$$

$$\int_L xy\, dx + (y-x)dy = \int_0^1 xx^2 dx + (x^2 - x)2x dx = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L ydx + xdy$, где $L = \overset{\frown}{AB}$ – а) дуга параболы $y^2 = x$; б) отрезок прямой; в) ломаная $\overset{\frown}{ACB}$ с началом $A(0,0)$ и концом $B(1,1)$ (здесь $C(0,\ 1)$).

Решение. а) кривая задана уравнением $y = \sqrt{x},\ x \in [0,1]$. В итоге получаем:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx,\ \int_L ydx + xdy = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = 1;$$

б) уравнение прямой, проходящей через точки A и B, $y = x$. Имеем:

$$dy = dx,\ \int_L ydx + xdy = \int_0^1 (x + x)\, dx = 2\int_0^1 x\, dx = x^2\Big|_0^1 = 1;$$

в) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ydx + xdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} ydx + xdy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} ydx + xdy = 0 + 1 = 1$.

Уравнение прямой AC: $x = 0,\ y \in \left[0,1\right]$, тогда $dx = 0$:

$$\int_{\overset{\frown}{AC}} ydx + xdy = 0.$$

Уравнение прямой CB: $y = 1,\ x \in \left[0,1\right]$, тогда $dy = 0$:

$$\int_{\overset{\frown}{CB}} ydx + xdy = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1.$$

Мы видим, что в последнем примере КРИ-2 не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точек (работа в потенциальном поле).

Приложения криволинейных интегралов
Некоторые приложения КРИ-1.

1. Вычисление *длины* ℓ_L дуги L кривой:

$$\ell_L = \int_L d\ell.$$

Пример. Определить длину дуги кривой $y^2 = x^3$, заключенной между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$.

Решение. Найдем дифференциал дуги $d\ell$ для кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \quad d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;dx.$$

Следовательно,

$$\ell_L = \int_L d\ell = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;dx = \int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{9} d\left(1+\frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

Пример. Вычислить длину астроиды (рис. 6.3):

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

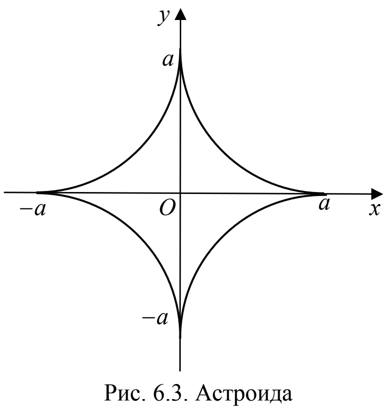


Рис. 6.3. Астроида

Решение. Найдем дифференциал дуги $d\ell$. Имеем:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\;\; y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$d\ell = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\;dt = 3a\sin t\cos t dt.$$

Длина четвертой части астроиды, расположенной в первой четверти:

$$\frac{1}{4}\ell_L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\,dt = \left.\frac{3a\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Следовательно, длина всей астроиды равна $6a$.

2. Вычисление *массы* m_L материальной кривой L с линейной плотностью $\rho(x, y, z), (x, y, z) \in L$:

$$m_L = \int_L \rho(x, y, z)d\ell.$$

Пример. Найти массу m_L участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами x_1 и x_2, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Решение. В нашем случае плотность $\rho = x^2$. Определим дифференциал дуги $d\ell$ для кривой $y = \ln x$. Получаем:

$$y' = \frac{1}{x},\; d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}dx} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx.$$

Следовательно,

$$m_L = \int_{x_1}^{x_2} x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) =$$

$$= \left.\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{3}\left(\left(1+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+x_1^2\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

3. Для простоты ограничимся рассмотрением кривой L в плоскости Oxy. Вычисление с*татических моментов* M_x, M_y материальной кривой L относительно координатных осей Ox и Oy соответственно:

$$M_x = \int_L y\rho(x, y)d\ell,\;\; M_y = \int_L x\rho(x, y)\,d\ell,$$

координат центра тяжести (центра масс) кривой L:

$$x_c = \frac{M_y}{m},\ y_c = \frac{M_x}{m},$$

а также *моментов инерции* кривой L относительно осей Ox и Oy и начала координат соответственно:

$$J_x = \int_L y^2 \rho(x,y) d\ell,\ J_y = \int_L x^2 \rho(x,y) d\ell,\ J_0 = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x,y) d\ell,$$

где $\rho(x,y)$ – линейная плотность распределения массы на кривой L.

Пример. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды (рис. 6.4):

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

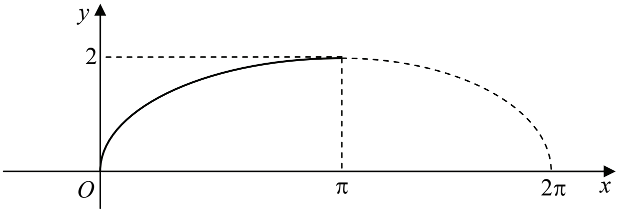


Рис. 6.4. Дуга циклоиды

Решение. Поскольку дуга однородна, то плотность $\rho(x,y)$ постоянна. Не ограничивая общности, будем считать $\rho = 1$. Тогда масса дуги равна:

$$m_L = \ell_L = \int_L d\ell = \int_0^\pi \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ dt = \int_0^\pi \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt =$$

$$= 2\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\, dt = -4\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^\pi = 4,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m_L} = \frac{\int_L x d\ell}{m_L} = \frac{1}{4}\int_0^\pi (t - \sin t)\cdot 2\sin\frac{t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t\sin\frac{t}{2} - \sin t \sin\frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2} \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3},$$

$$y_c = \frac{M_y}{m_L} = \frac{\int_L y d\ell}{m_L} = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1 - \cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} dt =$$

$$= -2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} = -2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

Некоторые приложения КРИ-2.

1. Вычисление *работы*

$$A_L = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

силового поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ при перемещении материальной точки $M = M(x,y,z)$ вдоль кривой $L = \overset{\frown}{AB}$ от точки *A* до точки *B*.

Пример. Найти работу силового поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ при перемещении материальной точки $M = M(x,y,z)$ вдоль четверти окружности $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, пробегаемой в направлении, соответствующем возрастанию параметра *t*.

Решение.

$$A_L = \int_L xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t(-\sin t)\,dt + \sin t\cos t\,dt + 0\sin t\,dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ d(\sin t) + \sin t\,d\sin t = \left(-\frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

2. Вычисление *площади* плоской фигуры на основе теоремы Грина.

Предположим, что в плоскости Oxy имеется односвязная область D (это значит, что в ней нет «дыр»), ограниченная кривой L.

Формула Грина. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в односвязной области *D*, то имеет место формула

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy,}$$

где L – граница области D и интегрирование ведется в положительном направлении, т. е. при таком обходе границы область *D* остается слева. Формула Грина позволяет свести вычисление криволинейного интеграла по замкнутому контуру к двойному интегралу. Из формулы Грина вытекает, что площадь $S = S(D)$ области D может быть рассчитана при помощи криволинейного интеграла второго рода:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\oint_L x dy - y dx.}$$

Пример. Вычислить площадь, которая ограничена астроидой (см. рис. 6.3 на с. 156):

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решение. Площадь выразится интегралом $S = \frac{1}{2}\oint_L x dy - y dx,$ где $dy = 3a\sin^2 t\cos t\, dt,\ \ dx = -3a\cos^2 t\sin t\, dt,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$ Отсюда имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\cos^2 t\sin^4 t)\, dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\, dt = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

6.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите интегральную сумму для КРИ-1.
2. Напишите интегральную сумму для КРИ-2.
3. Дайте определение КРИ-1.
4. Приведите определение КРИ-2.
5. Что такое скалярный элемент дуги?
6. Поясните, что такое векторный элемент дуги.
7. Запишите свойства аддитивности и линейности для КРИ-1.
8. Назовите свойства аддитивности и линейности для КРИ-2.
9. Какое направление обхода контура L называется положительным, какое отрицательным?
10. Зависит или не зависит КРИ-1 от направления интегрирования?
11. Поясните, зависит или не зависит КРИ-2 от направления интегрирования.
12. Запишите формулы для вычисления КРИ-1 в декартовой системе координат, если кривая L задана в явном виде.

13. Приведите формулы для вычисления КРИ-1, если кривая записана в параметрическом виде.

14. Запишите формулу для вычисления КРИ-1 в полярной системе координат.

15. Приведите формулы для вычисления КРИ-2 в декартовой системе координат, если кривая L задана в явном виде.

16. Напишите формулы для вычисления КРИ-2 в декартовой системе координат, если кривая L записана в параметрическом виде.

17. В чем состоит физический смысл КРИ-1?

18. Назовите приложения КРИ-1, которые Вы знаете?

19. В чем состоит физический смысл КРИ-2?

20. Каковы приложения КРИ-2?

21. Запишите формулу Грина.

6.1.3. Практический минимум для КРИ-1

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\ell$, где L – отрезок прямой от точки $A(1, 2)$ до точки $B(2, 4)$.

2. Рассчитать криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2+y^2)d\ell$, где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x d\ell$, где L – дуга параболы $y=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$, лежащая между точками $O(0, 0)$ и $B(2, 2\sqrt{2})$.

4. Определить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}d\ell$, где L – отрезок прямой от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.

5. Найти криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{d\ell}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, который заключен между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy\, d\ell$, где L – контур прямоугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$.

7. Рассчитать криволинейный интеграл $\int\limits_L y d\ell,$ где L – дуга параболы $y^2 = 2px,$ отсеченная параболой $x^2 = 2py.$

8. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \sqrt{2y}\, d\ell,$ где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t).$

9. Найти криволинейный интеграл $\int\limits_L y^2 d\ell,$ где L – часть окружности $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

10. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \dfrac{z^2}{x^2 + y^2} d\ell,$ где L – первый виток винтовой линии, который задан параметрически $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi. \\ z = at, \end{cases}$

11. Найти массу участка линии $y = \dfrac{3}{4}x$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 4,$ если плотность линии в каждой точке $\rho = x - y.$

12. Определить массу участка линии $y = 1 - \dfrac{x^2}{2},\ x \in \left[0, \sqrt{2}\right],$ если плотность линии в каждой точке $\rho = \sqrt{1 - y}.$

13. Найти массу участка линии $x = \dfrac{y^2}{2},\ y \in [0, 1],$ если плотность линии в каждой точке $\rho = y.$

14. Определить массу участка линии $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],$ если плотность линии в каждой точке $\rho = xy.$

15. Найти массу участка линии $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0, 2\pi],$ если плотность линии в каждой точке $\rho = y^2.$

16. Вычислить массу четверти эллипса $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,$ расположенной в первом квадранте, если плотность в каждой точке равна ординате этой точки.

Минимум для аудиторной работы

1; 3; 8; 12; 14.

6.1.4. Ответы

1. $\ln 2$. **2.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$. **3.** $\frac{13}{3}$. **4.** $\ln\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$. **5.** $\sqrt{5}\ln 2$. **6.** 24. **7.** $\frac{p^2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$. **8.** $4\pi a\sqrt{a}$. **9.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **10.** $\frac{8\sqrt{2}\pi^3 a}{3}$. **11.** 2,5. **12.** $\frac{3\sqrt{3}-1}{3\sqrt{2}}$. **13.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **14.** 4. **15.** $136\frac{8}{15}$. **16.** $\frac{b^2}{2}+\frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

6.1.5. Практический минимум для КРИ-2

1. Даны функции $P(x,y)=8x+4y+2,\ Q(x,y)=8y+2$ и точки $O(0,\ 0)$, $A(3,\ 6)$, $B(3,\ 0)$, $C(0,\ 6)$. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (8x+4y+2)dx+(8y+2)dy,$ где:

а) L – отрезок OA;

б) L – ломаная OBA;

в) L – ломаная OCA;

г) L – парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через точки O и A.

Рассчитать криволинейные интегралы по координатам:

2. $\int\limits_L xdy,$ где L – контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,$ в положительном направлении (т. е. против движения часовой стрелки).

3. $\int\limits_L xdy,$ где L – отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ от точки пересечения ее с осью абсцисс до точки пересечения ее с осью ординат.

4. $\int\limits_L (x^2-y^2)dx,$ где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(2,\ 4)$.

5. $\int\limits_L -x\cos y dx+y\sin x dy$ вдоль отрезка L, соединяющего точки $A(0,\ 0)$ и $B(\pi,\ 2\pi)$.

6. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$, где L – эллипс $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, пробегаемый в положительном направлении.

7. $\int\limits_L \dfrac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, где L – полуокружность $x = a\cos t,\ y = a\sin t$, пробегаемая от точки, соответствующей $t_1 = 0$, до точки, соответствующей $t_1 = \pi$.

8. $\int\limits_L (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy$, где L – первая (пробегаемая от начала координат) арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Криволинейные интегралы по замкнутым контурам L, взятые в положительном направлении, преобразовать в двойные интегралы по областям, ограниченным этими контурами:

9. $\int\limits_L (1 - x^2)y\,dx + x(1 + y^2)\,dy$.

10. $\int\limits_L (e^{xy} + 2x\cos y)\,dx + (e^{xy} - x^2\sin y)\,dy$.

11. В каждой точке плоскости на материальную точку действует сила $\vec{F}$, проекции которой на оси координат равны $X = xy$, $Y = x + y$. Вычислить работу, совершаемую этой силой, при перемещении этой точки из начала координат в точку $A(1,\ 1)$:

а) по прямой $y = x$;

б) параболе $y = x^2$;

в) двухзвенной ломаной, стороны которой параллельны осям координат (два случая).

Минимум для аудиторной работы

1. а), г), д); 3; 5; 7; 9; 11. а).

6.1.6. Ответы

1. а) 234; б) 198; в) 270; г) 222. **2.** 3. **3.** $\dfrac{ab}{2}$. **4.** $-\dfrac{56}{15}$. **5.** 4π. **6.** $-2\pi ab$. **7.** $-\dfrac{4a}{3}$. **8.** πa^2. **9.** $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$. **10.** $\iint\limits_D (y - x)e^{xy}dxdy$. **11.** а) $\dfrac{4}{3}$; б) $\dfrac{17}{12}$; в) $\dfrac{3}{2}$ и 1.

6.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.2.1. Теоретический минимум

1. Общие понятия. Поверхностные интегралы первого (ПОВИ-1) и второго (ПОВИ-2) родов.
2. Свойства поверхностных интегралов.
3. Вычисление поверхностных интегралов.
4. Приложения поверхностных интегралов.

Общие понятия. Поверхностные интегралы первого (ПОВИ-1) и второго (ПОВИ-2) родов

При определении поверхностных интегралов (ПОВИ) различают два типа поверхностей: ***поверхности односторонние*** и ***двухсторонние***. В односторонних поверхностях, взяв нормаль к поверхности и непрерывно передвигая ее по поверхности, можно вернуться в ту же точку с противоположным направлением нормали (например, лист Мёбиуса, рис. 6.5).

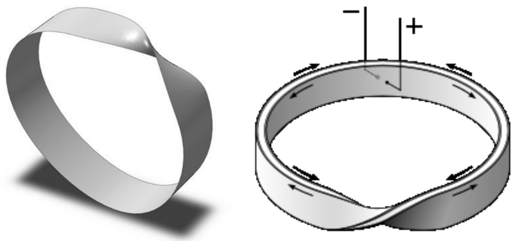


Рис. 6.5. Лист Мёбиуса

В двухсторонних поверхностях это невозможно, поэтому можно выбирать ее ***ориентацию*** – положительную сторону поверхности, отмечая ее знаком «+», и, стало быть, выбирать положительное направление нормали. Соответственно, другая сторона поверхности считается отрицательной. Будем рассматривать только такие (измеримые) поверхности, для которых определено понятие меры – площади. Рассмотрим этот случай подробнее.

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана поверхность Π, на которой заданы криволинейные координаты u и v (например, широта и долгота). Тогда поверхность можно задать векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, где $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор точки

$M(x, y, z)$ на поверхности. Придавая криволинейным координатам u и v приращения Δu и Δv и проводя координатные линии через точки с радиус-векторами $\vec{r}(u, v)$, $\vec{r}(u+\Delta u, v)$, $\vec{r}(u, v+\Delta v)$, выделим на поверхности ее часть ω, ограниченную этими линиями и опирающуюся на параллелограмм p, построенный на векторах $\Delta_u \vec{r} = \vec{r}(u, v+\Delta\vec{r}) - \vec{r}(u,v)$, $\Delta_v \vec{r} = \vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u, v)$ как на сторонах параллелограмма (рис. 6.6).

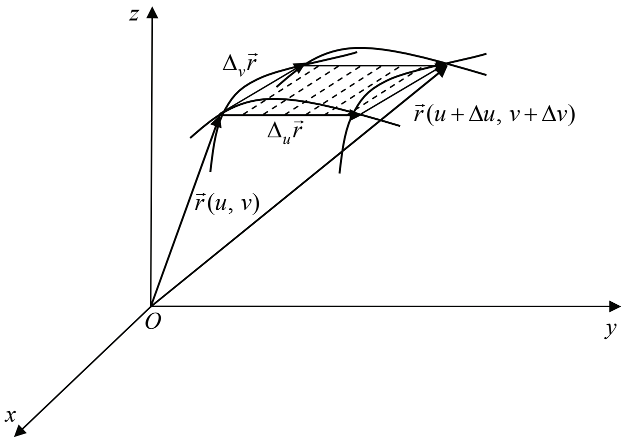


Рис. 6.6. Элемент поверхности

Будем в дальнейшем рассматривать только такие поверхности, для которых площадь S_ω части ω поверхности эквивалентна (при малых Δu и Δv) площади параллелограмма p, т. е. $S_\omega \approx \left|\Delta_u \vec{r} \times \Delta_v \vec{r}\right|$ или, используя формулу Лагранжа для приращений $\Delta_u \vec{r}$ и $\Delta_v \vec{r}$: $\Delta_u \vec{r} \approx \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u$, $\Delta_v \vec{r} \approx \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v$, получаем $S_\omega \approx \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta u \cdot \Delta v$, где считаем $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$ (u и v предполагаются возрастающими функциями). Переходя от приращений к дифференциалам, получаем точное равенство

$$\boxed{dS = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\, dv,}$$

где dS – дифференциал площади.

Предположим теперь, что поверхность Π представлена графиком непрерывно дифференцируемой функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, где D_{xy} – проекция поверхности Π на плоскость Oxy. Тогда, полагая $u = x$ и $v = y$, имеем:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, z'_x), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, z'_y),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = (-z'_x, -z'_y, 1) \text{ и, как следствие,}$$

$$\boxed{dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy,}$$

где x и y рассматриваются в порядке возрастания. Аналогично исследуются случаи, когда поверхность задается графиком функции $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, или $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$, где D_{yz} и D_{xz} – проекции поверхности Π на плоскости Oyz и Oxz соответственно. Тогда по аналогии со случаем КРИ можно рассмотреть два типа поверхностных интегралов: интегралы первого (ПОВИ-1) и второго (ПОВИ-2) родов.

ПОВИ-1	**ПОВИ-2**
Пусть в области D задана ограниченная измеримая поверхность Π, на которой определена мера – площадь. В области D задано некоторое ***скалярное поле*** $u = u(x, y, z)$, например ***поле масс*** $u = u(M) = u(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ – поверхностная плотность поверхности Π в точке $M(x, y, z)$, $M(x, y, z) \in \Pi$. Рассматривается ***задача нахождения массы*** m_Π материальной поверхности Π.	Пусть в области D задана ограниченная ***двухсторонняя*** измеримая поверхность Π_+, на которой определена мера – площадь и положительная сторона, иными словами, выбрано положительное направление нормали $\vec{n}$. В области D задано некоторое ***векторное*** поле $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, $M(x, y, z) \in D$, к примеру ***поле скоростей движущейся жидкости***.

<table>
<tr><td></td><td>Рассматривается задача нахождения потока (в единицу времени) жидкости через сторону поверхности $П_+$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рассматриваем только те поверхности, для которых справедлива формула $dS = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\, dv$ для дифференциала площади.</td></tr>
<tr><td>Для решения поставленной задачи вводится скалярный элемент поверхности:
$$dS = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\, dv.$$</td><td>Вводится векторный элемент поверхности:
$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{e}_n = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du\, dv,$$
где $\vec{e}_n = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор положительной нормали.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Здесь $\frac{1}{dS}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ – единичный вектор нормали (порядок координат выбран так, чтобы направление векторного произведения совпадало с положительным направлением нормали).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выберем теперь элементарный участок (бесконечно малую площадку) ω площадью dS. Тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка</td></tr>
<tr><td>элементарная масса – масса элементарного участка поверхности – дифференциал массы выражается следующей формулой:
$$dm = \rho(x, y, z)dS.$$</td><td>элементарный поток жидкости, протекающий через элементарный участок поверхности, – дифференциал потока выражается формулой
$$dP = \vec{F}(M) \cdot d\vec{S}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Интегрируя по поверхности, получаем</td></tr>
<tr><td>массу $m_S = \iint\limits_S \rho(x, y, z)dS$ всей поверхности или в общем случае $\iint\limits_П u(x, y, z)dS$ – ПОВИ-1.</td><td>поток $P_{П_+}(\vec{F})$ жидкости через положительную сторону $П_+$ поверхности:
$$P_{П_+}(\vec{F}) = \iint\limits_{П_+} \vec{F}(M) \cdot d\vec{S} =$$
$$= \iint\limits_{П_+} \vec{F}(M) \cdot \vec{e}_n\, dS \quad –$$
ПОВИ-2.</td></tr>
</table>

Свойства поверхностных интегралов

Прежде всего, отметим физический смысл ПОВИ. Как вытекает из предыдущего:

1) $\iint\limits_{\Pi} \rho(x, y, z)dS$ выражает *массу* m_L материальной поверхности П, ограниченной контуром L, с плотностью $\rho(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z) \in \Pi$ (*физический смысл* ПОВИ-1);

2) $\iint\limits_{\Pi_+} \vec{F}(M) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Pi_+} \vec{F}(M) \cdot \vec{e}_n \, dS = \iint\limits_{\Pi_+} \vec{F}_n \cdot dS$, где $\vec{F}_n$ означает проекцию вектора $\vec{F}$ на направление положительной нормали к поверхности, выражает *поток* векторного поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ через положительную сторону Π_+ поверхности П, ограниченной контуром L (*физический смысл* ПОВИ-2).

Поверхностные интегралы обладают теми же свойствами, что и криволинейные интегралы, в частности, такими важнейшими свойствами, как *линейность* (интеграл от линейной комбинации интегрируемых функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов от этих функций) и *аддитивность* (интеграл по поверхности, состоящей из нескольких поверхностей, пересекающихся только по линиям, равен сумме интегралов по каждой из составляющих поверхностей).

Отметим также, что ПОВИ-1 от единичной функции равен площади поверхности, по которой ведется интегрирование: $\iint\limits_{\Pi} dS = S_{\Pi}$ – площадь поверхности П, ограниченная контуром L; а ПОВИ-2 изменит знак, если изменить ориентацию поверхности:

$$\iint\limits_{\Pi_+} \ldots = -\iint\limits_{\Pi_-} \ldots$$

Нетрудно видеть, что существует *связь* между ПОВИ-2 и ПОВИ-1:

$$\iint\limits_{\Pi_+} \vec{F}(M) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Pi_+} \vec{F}(M) \cdot \vec{e}_n \, dS = \iint\limits_{\Pi_+} \vec{F}_n \cdot dS =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)dS.$$

Последний интеграл по существу является ПОВИ-1, при этом сторона поверхности учитывается при определении направляющих косинусов.

Если поверхность, по которой ведется интегрирование, является замкнутой, то это отражается в обозначении ПОВИ кружочком на знаке интеграла: $\oiint\limits_{\Pi}\ldots$, при этом положительной стороной поверхности считается ее внешняя сторона.

Если Π_+ – замкнутая поверхность, то величина $P_{\Pi_+}(\vec{F})$ дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области V, ограниченной Π_+, и количеством жидкости, втекающей в эту область. Если $P_{\Pi_+}(\vec{F}) = 0$, то в область V жидкости втекает столько же, сколько и вытекает. Если $P_{\Pi_+}(\vec{F}) > 0$, то из области V жидкости вытекает больше, чем втекает, т. е. в области V имеются ***источники***. Если же $P_{\Pi_+}(\vec{F}) < 0$, то из области V жидкости вытекает меньше, чем втекает, т. е. в области V имеются ***стоки***.

Вычисление поверхностных интегралов

Поскольку ПОВИ-2 допускает сведение к ПОВИ-1, то, в первую очередь, представляет интерес вычисление ПОВИ-1.

Если поверхность состоит из поверхностей, которые описываются графиками функций $z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$, то, используя свойство аддитивности, рассматриваем исходный ПОВИ как сумму соответствующих интегралов по составляющим поверхностям, которые являются графиками функций.

Пусть Π – одна из таких поверхностей, ограниченная контуром L. Не ограничивая общности, считаем, что она описывается соотношением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$. Если при этом функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности Π, а функция $z = z(x, y)$ непрерывно дифференцируема на D_{xy}, тогда имеет место следующее *сведение* ПОВИ-1 к двойному интегралу:

$$\boxed{\iint\limits_{\Pi} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy,}$$

где D_{xy} – проекция поверхности Π на плоскость Oxy.

Пример. Вычислить $\iint(x^2 + y^2)\,dS$, где Π – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ (рис. 6.7).

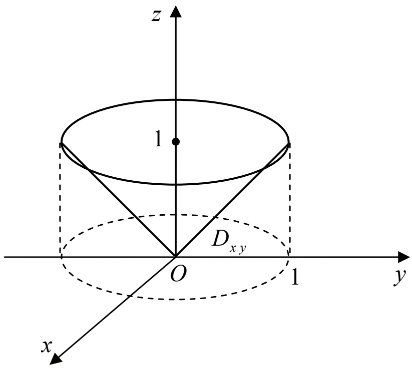


Рис. 6.7. Коническая поверхность

Решение. Имеем:

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Тогда искомый интеграл преобразуется в двойной:

$$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Областью интегрирования D_{xy} является круг $x^2+y^2\le 1$. Перейдем к полярным координатам и вычислим данный интеграл:

$$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

Как уже отмечалось выше, ПОВИ-2 можно свести к ПОВИ-1, который в свою очередь можно преобразовать в двойной интеграл и, таким образом, вычислить ПОВИ-2. Часто оказывается полезным и непосредственное определение ПОВИ-2 без использования ПОВИ-1, особенно, если ПОВИ-2 представлен в координатной форме.

Простейшим и наиболее важным примером двухсторонней поверхности является поверхность, описываемая уравнением $z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}$, где функция $z(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в области D_{xy}. В этом случае направляющие косинусы нормали к поверхности – координаты единичного вектора направления нормали имеют вид

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \tag{6.1}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}.$$

Выбрав перед радикалом определенный знак, мы тем самым устанавливаем во всех точках поверхности определенное направление нормали. Если, например, выбрать перед радикалом знак «+», то во всех точках поверхности $\cos\gamma$ будет положительным, т. е. угол, составленный нормалью с осью Oz, будет острым, и положительной стороной поверхности будет ее верхняя сторона. В этом случае можно показать, что

$$dS\cos\gamma = \frac{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = dxdy,$$

$$dS\cos\beta = dxdz, \;\; dS\cos\alpha = dydz$$

и, таким образом,

$$\iint_{\Pi_+} \vec{F}_n \cdot dS = \iint_{\Pi} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS =$$

$$= \iint_{\Pi_+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

– ПОВИ-2 по координатам.

Отсюда получаем следующее сведение ПОВИ-2 к двойному интегралу.

Поверхностный интеграл второго рода выражается так:

$$\iint_{\Pi_+} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Pi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \big(-P(x,y,z(x,y))\,z'_x - Q(x,y,z(x,y))\,z'_y + R(x,y,z(x,y))\big)\,dx\,dy,$$

где D_{xy} – проекция поверхности П: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, на плоскость Oxy.

Аналогичные формулы можно получить, если поверхность задана уравнениями $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, или $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$.

Пример. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (2x+z)\vec{i} + (3y-2z)\vec{j} + (5x+2y)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, ограниченной поверхностями: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 6.8, *а*).

Решение. Искомый поток $P_{\Pi_+}(\vec{F})$ будет равен сумме потоков через каждую из граней пирамиды. Обозначим через $P_1(\vec{F})$ поток векторного поля через внешнюю поверхность грани *ABC*. Грань *ABC* проектируется на плоскость *Oxy* в область D_{xy}, ограниченную треугольником *OAB* (рис. 6.8, *б*).

Уравнение поверхности грани *ABC* запишем в виде $z = 1 - x - y$. Тогда $z'_x = -1$, $z'_y = -1$. По формулам (6.1) найдем координаты вектора $\vec{n}$. Поскольку $\vec{n}$ образует с осью *Oz* острый угол, то в формулах (6.1) нужно брать знак «+». Получим:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k},$$

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+1+1}\,dx\,dy = \sqrt{3}\,dx\,dy.$$

Следовательно,

$$P_1(\vec{F}) = \iint_{\Pi_+} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_{\Pi} \left((2x+z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (3y-2z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (5x+2y)\frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (8x+6y-1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x+6y-1)\,dy = \int_0^1 dx\Big((8x-1)y + 3y^2\Big)\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 (-5x^2+3x+2)\,dx = \left(-\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{6}.$$

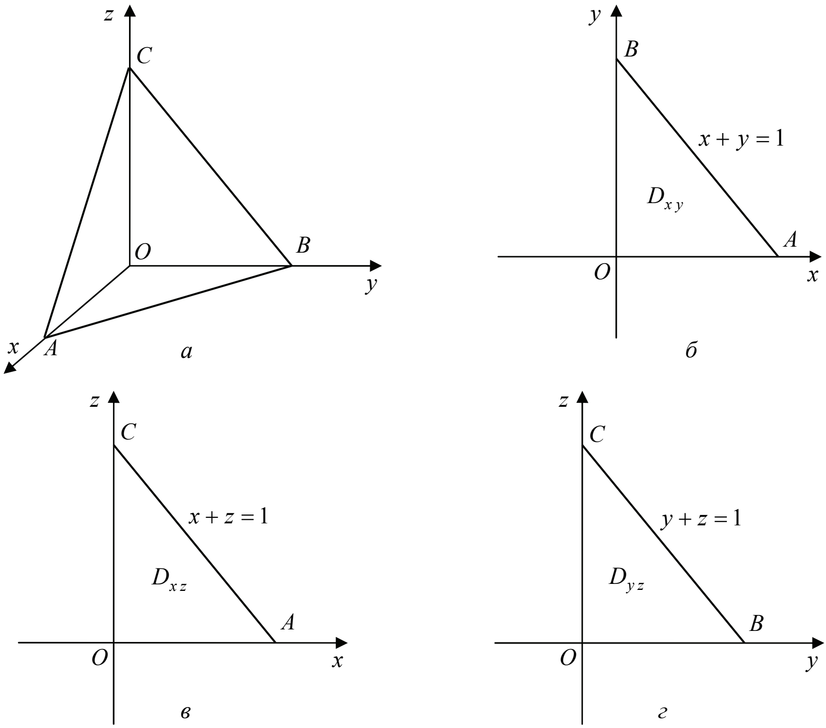


Рис. 6.8. Поверхность и ее проекции

Определим $P_2(\vec{F})$ – поток векторного поля через внешнюю поверхность грани *AOC*. Грань *AOC* находится в плоскости *Oxz* (уравнение плоскости $y = 0$) и представляет область, ограниченную треугольником *OAC* (рис. 6.8, *в*). Внешняя нормаль будет равна:

$$\vec{n} = 0 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k},\ dS = dxdz,$$

$$P_2(\vec{F}) = \iint\limits_{\Pi_+} (\vec{F} \cdot \vec{n})\, dS = \iint\limits_{\Pi} (-3y + 2z) dS = \iint\limits_{D_{xz}} 2z\, dx\, dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} 2z\ dz = \int\limits_0^1 z^2 \Big|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 (1-x)^2\, dx = -\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Определим $P_3(\vec{F})$ – поток векторного поля через внешнюю поверхность грани *OCB*. Грань *OCB* находится в плоскости *Oyz* (уравнение плоскости $x = 0$) и представляет область, которая ограничена треугольником *OCD* (рис. 6.8, *г*). Внешняя нормаль будет равна:

$$\vec{n} = -\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k},\ dS = dydz,$$

$$P_3(\vec{F}) = \iint_{\Pi_+} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_{\Pi} (-2x - z)dS = -\iint_{D_{yz}} z\,dy\,dz =$$

$$= -\int_0^1 dy \int_0^{1-y} z\ dz = -\int_0^1 z^2\Big|_0^{1-y} dy = -\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}dy = \frac{(1-x)^3}{6}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

Определим $P_4(\vec{F})$ – поток векторного поля через внешнюю поверхность грани *AOB*. Грань *AOB* находится в плоскости *Oxy* (уравнение плоскости $z = 0$) и представляет область, ограниченную треугольником *OAD* (рис. 6.8, *б*). Внешняя нормаль будет равна:

$$\vec{n} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} - 1\cdot\vec{k},\ dS = dxdy,$$

$$P_4(\vec{F}) = \iint_{\Pi_+} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = -\iint_{\Pi} (5x + 2y)dS = -\iint_{D_{xy}} (5x + 2y)\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x + 2y)dy = -\int_0^1 (5xy + y^2)\Big|_0^{1-x} dx = -\int_0^1 \left(5x(1-x) + (1-x)^2\right)dx =$$

$$= -\int_0^1 (-4x^2 + 3x + 1)\,dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{7}{6}.$$

Тогда

$$P_{\Pi_+}(\vec{F}) = P_1(\vec{F}) + P_2(\vec{F}) + P_3(\vec{F}) + P_4(\vec{F}) = \frac{11}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}.$$

Приложения поверхностных интегралов

Некоторые приложения ПОВИ-1.

1. Вычисление *площади* S_Π поверхности П:

$$S_\Pi = \iint_\Pi dS.$$

Пример. Найти площадь части параболоида $z = 9 - x^2 - y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 6.9).

Решение. Вычислим dS. Из уравнения параболоида имеем: $z'_x = -2x,\ z'_y = -2y$. Тогда

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy,$$

и искомый интеграл $S_{П} = \iint\limits_{П} dS$ преобразуется в двойной и имеет следующий вид: $\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$.

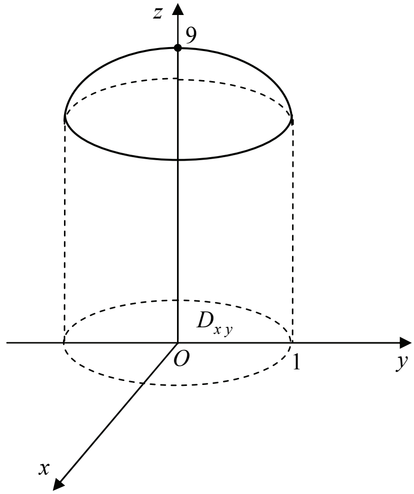


Рис. 6.9. Параболоид

Областью интегрирования D_{xy} является круг $x^2+y^2 \le 1$. Перейдем к полярным координатам и вычислим данный интеграл по нижеприведенным формулам:

$$S_{П} = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left(1+4r^2\right)^{\frac{1}{2}} d(1+4r^2) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{8}\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

2. Вычисление *массы* $m_{П}$ материальной поверхности П с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z), (x,y,z) \in П$:

$$m_{П} = \iint\limits_{П} \rho(x,y,z)dS.$$

Пример. Определить массу части поверхности параболоида $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до оси Oz (рис. 6.10).

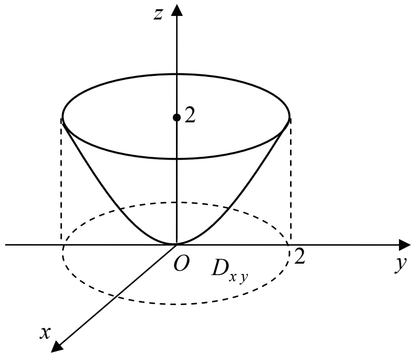


Рис. 6.10. Поверхность параболоида

Решение. Плотность $\rho(x,y)=x^2+y^2$, $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z'_x=x$, $z'_y=y$. Проекция D_{xy} на плоскость Oxy представляет собой круг радиуса $r=2$ с центром в начале координат. Тогда имеем:

$$m_{\Pi}=\iint\limits_{\Pi}\rho(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Перейдя к полярной системе координат, получим:

$$m_{\Pi}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\sqrt{1+r^2}\;r^3dr=\begin{vmatrix}r^2+1=t^2\\2rdr=2tdt\end{vmatrix}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{5}}(t^4-t^2)dt=\frac{4\pi}{15}\left(25\sqrt{5}+1\right).$$

3. Аналогично КРИ-1 с помощью ПОВИ-1 можно вычислить статические моменты и моменты инерции материальной однородной поверхности (относительно координатных осей и плоскостей), а также *координаты ее центра тяжести*:

$$\boxed{x_c=\frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi}x\,dS,\;\; y_c=\frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi}y\,dS,\;\; z_c=\frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi}z\,dS,}$$

здесь S_{Π} – площадь поверхности.

Пример. Найти координаты центра тяжести части плоскости $z = x$, ограниченной плоскостями: $x + y = 1$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 6.11).

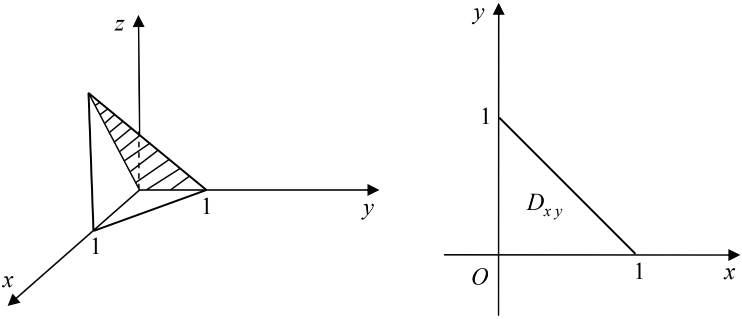


Рис. 6.11. Поверхность и ее проекция

Решение. Определим площадь S_{Π} указанной части плоскости $z = x$. Имеем:

$$z'_x = 1,\ z'_y = 0,\ dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+1}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy,$$

$$S_{\Pi} = \iint\limits_{\Pi} ds = \iint\limits_{D} \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Область D_{xy} на плоскости Oxy представляет треугольник, ограниченный прямыми: $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$. Тогда

$$y_c = \frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi} y\,dS = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{2}y\,dy = 2\int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{3}(1-x)^3\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$x_c = \frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi} x\,dS = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} \sqrt{2}dy = 2\int_0^1 x(1-x)dx = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$z_c = \frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi} z\,dS = \frac{1}{S_{\Pi}}\iint\limits_{\Pi} x\,dS = x_c = \frac{1}{3}.$$

Некоторые приложения ПОВИ-2. ПОВИ-2 имеет многочисленные приложения, которые главным образом связаны с его физическим смыслом как потоком векторного поля. В частности, поток векторного поля скоростей текущей несжимаемой жидкости через внешнюю сторону замкнутой поверхности дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области, ограниченной этой поверхностью, и количеством жидкости, втекающей в эту область. Если поток равен нулю, то в область втекает столько же жидкости, сколько и вытекает. Если поток положительный, то из области жидкости вытекает больше, чем втекает, т. е. в области имеются ***источники***. Если же поток отрицательный, то из области жидкости вытекает меньше, чем втекает, т. е. в ней имеются ***стоки***.

В этой связи представляют интерес следующие теоремы, связывающие различные типы интегралов.

Теорема Стокса. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности П и L – замкнутый контур, ограничивающий поверхность П, то справедлива формула Стокса:

$$\boxed{\begin{gathered}\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \iint_{П} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds,\end{gathered}}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности П; направление нормали определяется так, чтобы при обходе контура со стороны нормали поверхность оставалась слева.

Теорема Остроградского. Рассмотрим тело V, ограниченное заданной замкнутой поверхностью П. И пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на замкнутой поверхности П и внутри тела V. Выберем внешнюю нормаль к поверхности. Тогда справедлива формула Остроградского:

$$\boxed{\begin{gathered}\iint_{П_+} \overrightarrow{F_n} \cdot dS = \iint_{П} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma) dS = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.\end{gathered}}$$

Формула Остроградского в некоторых случаях значительно облегчает процесс вычисления векторного поля через замкнутую поверхность.

Пример. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (2x + z)\vec{i} + (3y - 2z)\vec{j} + (5x + 2y)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, ограниченной поверхностями: $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, \ z = 0$ (см. рис. 6.8, *а* на с. 174).

Решение. Раньше мы решали этот пример (см. на с. 175), вычисляя непосредственно поток векторного поля. Теперь решим этот пример с использованием формулы Остроградского:

$$P_{\Pi_+} = \iint\limits_{\Pi_+} \overrightarrow{F_n} \cdot dS = \iiint\limits_{V} (2 + 3 + 0)\, dv = 5\iiint\limits_{v} dv = 5V_{\text{объем}} = \frac{5}{6},$$

так как объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту. Очевидно, что решение данного примера с использованием формулы Остроградского намного проще.

6.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какая поверхность называется двухсторонней, а какая односторонней?
2. Поясните, какая поверхность называется ориентированной.
3. Чему равен дифференциал площади?
4. Какие физические задачи приводят к ПОВИ-1?
5. Назовите, какие физические задачи приводят к ПОВИ-2.
6. Зависит ли ПОВИ-1 от выбора стороны поверхности?
7. Объясните, зависит ли ПОВИ-2 от выбора стороны поверхности.
8. Какие свойства ПОВИ Вы знаете?
9. Запишите формулы для вычисления ПОВИ-1 в декартовой системе координат.
10. Приведите формулы для направляющих косинусов нормали к поверхности.
11. Напишите формулы для расчета ПОВИ-2.
12. Как вычисляется площадь поверхности с помощью ПОВИ-1?
13. Запишите формулы для определения координат центра тяжести поверхности.
14. Как вычисляется масса поверхности с помощью ПОВИ-1?
15. Что характеризует поток векторного поля через замкнутую поверхность?
16. Запишите формулу Стокса.
17. Приведите формулу Остроградского.
18. Как вычислить поток векторного поля?

6.2.3. Практический минимум

1. Вычислить $\iint\limits_{П} xyz\,dS$, где П – часть поверхности $z = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

2. Определить $\iint\limits_{П} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$, где П – часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

3. Вычислить $\iint\limits_{П} x\,dS$, где П – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, которая лежит в первом октанте.

4. Найти момент инерции полусферы $z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ относительно оси Oz.

5. Определить координаты центра тяжести части поверхности $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью Oxy.

6. Найти массу цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = H$, если плотность в каждой точке поверхности равна $\rho(x, y) = \frac{1}{r^2}$, где r – расстояние от точки поверхности до начала координат.

7. Вычислить $\iint\limits_{П} (x + z^2)dy\,dz + (2x^2 + y)dz\,dx$, где П – верхняя сторона части параболоида $y = x^2 + z^2$, отсеченная плоскостью $y = 2$ и расположенная над плоскостью Oxy.

8. Найти $\iint\limits_{П} (x^2 - 2y - z)\,dy\,dz + (3x - y^2 + z)\,dx\,dy$, где П – внешняя сторона боковой грани ABC пирамиды, вершины которой находятся в точках $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = xy^2\,\vec{i} + \frac{yz}{2}\,\vec{j} + x^2 z\,\vec{k}$ через часть параболоида $z = x^2 + y^2$, вырезанную цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$ через внешнюю часть параболоида $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченную плоскостью $z = 0$.

11. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(4x-3y)\vec{i}+$ $+(2y-6x)\vec{j}-y^2z^3\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2+y^2=4$, ограниченной параболоидом $z=x^2+y^2$ и расположенной в первом октанте.

12. Рассчитать поток векторного поля $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ через часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной в первом октанте.

13. Найти поток векторного поля $\vec{F}=(6x+y)\vec{i}+(3y-2x)\vec{j}+$ $+(5x-3z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, вершины которой находятся в точках $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, –2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

Минимум для аудиторной работы

1; 6; 8; 11; 13.

6.2.4. Ответы

1. $\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **2.** $4\sqrt{61}$. **3.** $\dfrac{\pi R^3}{4}$. **4.** $\dfrac{4}{3}\pi a^4$. **5.** $\overline{x}=\overline{y}=0$, $\overline{z}=\dfrac{307-15\sqrt{5}}{310}$. **6.** $2\pi\operatorname{arctg}\dfrac{H}{R}$. **7.** $-\pi$. **8.** 8. **9.** $-\dfrac{16\pi}{3}$. **10.** 2π. **11.** $24(3-\pi)$. **12.** $\dfrac{3\pi}{16}$. **13.** 16.

Глава 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

7.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

1. Скалярное и векторное поле.
2. Циркуляция векторного поля.
3. Поток векторного поля.
4. Дивергенция векторного поля.
5. Ротор векторного поля.
6. Соленоидальные, потенциальные и гармонические векторные поля.

Скалярное и векторное поле

Если каждой точке M пространственной (или плоской) области G соответствует определенное число $U = U(M)$, то говорят, что в области задано ***скалярное поле*** (скалярная функция точки). Если же каждой точке M области G соответствует вектор $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то говорят, что в этой области задано ***векторное поле*** (векторная функция точки).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры, плотности, давления и др., а примерами векторных полей – поле скоростей ветра, скоростей потока жидкости, поле тяготения.

Если G – область трехмерного пространства, где введена декартова система координат $Oxyz$, то скалярное поле задается функцией $U = U(x, y, z)$, векторное поле описывается вектор-функцией $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, где скалярные функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ являются проекциями вектор-функции $\vec{F}$ на координатные оси.

Поле называется плоским, если его можно задать посредством функции двух переменных: $U = U(x, y)$, $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$.

Для наглядного представления скалярного поля используют ***поверхности уровня***: $U = U(M) = U(x, y, z) \equiv \text{const}$, а для плоского поля – ***линии уровня***: $U = U(M) = U(x, y) \equiv \text{const}$. Характеристиками скалярного поля являются ***производная по направлению*** и ***градиент*** $\text{grad}\, U(M) = \left(\dfrac{\partial U(M)}{\partial x}, \dfrac{\partial U(M)}{\partial y}, \dfrac{\partial U(M)}{\partial z} \right)$ ***скалярного поля*** (см. главу 2). Напомним, что градиент скалярного поля (скалярной функции) *перпендикулярен поверхностям* (*линиям* в случае плоского поля) *уровня* и *направлен в сторону наискорейшего возрастания* этого поля (этой функции).

Удобной геометрической характеристикой векторного поля являются ***векторные линии*** – кривые, в каждой точке которых вектор $\vec{F}(M)$ направлен по касательной к этой кривой.

Векторные линии описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{7.1}$$

Векторные линии поля тяготения, электрического и магнитного поля часто называются силовыми линиями, а поля скоростей – линиями тока.

Точки векторного поля, в которых начинаются (заканчиваются) векторные линии, называются ***источниками*** (***стоками***).

Пример 1. Найти векторные линии плоскопараллельного векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$.

Решение. Составим систему дифференциальных уравнений (7.1): $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{0}$, где $P = x$, $Q = 2y$. Решим эту систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y}, \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln|x| = \ln|y| + \ln|C_1|, \\ z = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = C_1 y, \\ z = C. \end{cases}$$

Иными словами, векторные линии данного поля представляют собой параболы с центрами на оси *Oz*, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этой оси.

Циркуляция векторного поля

Пусть векторное поле задано вектором $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $(x,y,z) \in G$, причем функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в области G.

Пусть L – *гладкая* или кусочно-гладкая замкнутая *ориентированная кривая*, т. е. на ней выбрано определенное направление.

Циркуляцией векторного поля $\vec{F}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (7.2)$$

В силовом поле циркуляция выражает работу поля при перемещении материальной точки вдоль линии L в заданном направлении.

В произвольном векторном поле циркуляция есть некоторая характеристика вращательной способности поля: если циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то в этом поле нет вихревых точек.

Пример 2. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\vec{F} = (x^3 + y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ вдоль замкнутого контура L: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$. Направление обхода контура L выбирается так, чтобы область D, ограниченная им, оставалась слева.

Решение. Исходя из условия задачи, $P = x^3 + y$, $Q = xy^2$. Согласно формуле (7.2), циркуляция есть криволинейный интеграл второго рода: $\int_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_L (x^3 + y)dx + xy^2 dy.$ Разобьем контур интегрирования на три части так, чтобы каждая составляющая описывалась одним уравнением: $OA(y = 0\colon 0 \le x \le 1)$, $AB(x = 1\colon 0 \le y \le 1)$, $BO(y = x^2\colon 0 \le x \le 1)$, и рассчитаем интеграл вдоль каждой из этих линий (рис. 7.1).

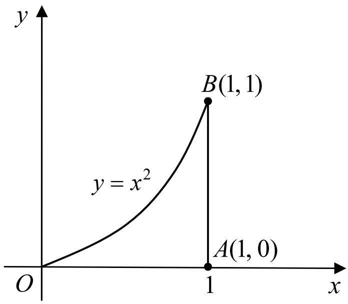


Рис. 7.1. Контур L

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к нахождению определенного интеграла по формуле

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx,$$

где $y = y(x)$ – уравнение дуги AB. Получим:

$$\int\limits_{OA} (x^3+y)dx + xy^2dy = \begin{vmatrix} OA: y=0,\ y'=0 \\ x_O=0,\ x_A=1 \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\int\limits_{AB} (x^3+y)dx + xy^2dy = \begin{vmatrix} AB: x=1,\ x'=0 \\ y_A=0,\ y_B=1 \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 y^2dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int\limits_{BO} (x^3+y)dx + xy^2dy = \begin{vmatrix} BO: y=x^2,\ y'=2x \\ x_B=1,\ x_O=0 \end{vmatrix} = \int\limits_1^0 \Big(x^3+x^2+x(x^2)^2\cdot 2x\Big)dx =$$

$$= \int\limits_1^0 (x^3+x^2+2x^6)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+2\frac{x^7}{7}\right)\right|_1^0 = -\frac{73}{84}.$$

Следовательно, $\oint\limits_L (x^3+y)dx + xy^2dy = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{73}{84} = -\frac{6}{21}.$

Поток векторного поля

Пусть задано векторное поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $(x,y,z)\in G$, причем функции $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ непрерывны в области G вместе со своими частными производными первого порядка. Пусть П – некоторая *гладкая* или кусочно-гладкая *ориентированная поверхность*, т. е. на поверхности задано положительное направление нормали к ней и тем самым определена положительная сторона поверхности.

Потоком $П_{\text{П}}(\vec{F})$ векторного поля $\vec{F}(M)$ через ориентированную поверхность П называется поверхностный интеграл второго рода:

$$П_{\text{П}}(\vec{F}) = \iint\limits_{\text{П}} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \tag{7.3}$$

Пример 3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (x^2-z)\vec{i} - y^2\vec{j} - yz\vec{k}$ через поверхность П: часть плоскости $2x+y+z=2$, лежащая в первом октанте, если нормаль $\vec{n}$ направлена в сторону, где лежит начало координат (рис. 7.2).

Решение. Согласно формуле (7.3),

$$П_{\text{П}}(\vec{F}) = \iint\limits_{\text{П}} (x^2-z)dydz - y^2dxdz - yzdxdy.$$

Данный поверхностный интеграл второго рода сведем к вычислению двойного интеграла по проекции D поверхности П на координатную плоскость Oxy, используя следующую формулу:

$$\Pi_\Pi(\vec F)=\iint\limits_{\Pi} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\pm\iint\limits_{D}\vec F\cdot \mathrm{grad}(z-z(x,y))dxdy=$$

$$=\pm\iint\limits_{D}\Big(-P(x,y,z(x,y))z'_x(x,y)-Q(x,y,z(x,y))z'_y\,(x,y)+$$

$$+R(x,y,z(x,y))\Big)dxdy,$$

где поверхность П задается уравнением $z = z(x, y)$. Знак «+» перед интегралом выбирается, если нормаль к поверхности образует с осью Oz острый угол; знак «–», если тупой угол.

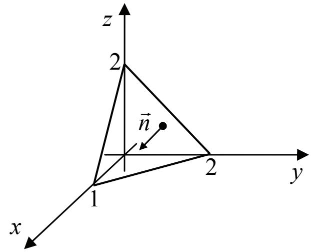


Рис. 7.2. Поверхность П

Поскольку нормаль к поверхности образует с осью Oz тупой угол, то перед интегралом ставим знак «–». Запишем уравнение поверхности в виде $z=2-2x-y$, тогда $z'_x=-2$, $z'_y=-1$. Проекция D задается системой неравенств: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2-2x$ (рис. 7.3).

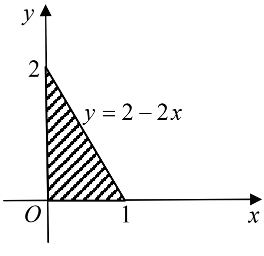


Рис. 7.3. Проекция D

Следовательно,

$$\Pi_\Pi(\vec F)=-\iint\limits_{D}(2(x^2-2+2x+y)-y^2-y(2-2x-y))dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D}(4-4x-2x^2-2xy)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x}(4-4x-2x^2-2xy)dy=$$

$$= \int_0^1 (4y - 4xy - 2x^2 y - xy^2)\Big|_0^{2-2x} dx = \int_0^1 (12x^2 - 20x + 8)dx =$$

$$= (4x^3 - 10x^2 + 8x)\Big|_0^1 = 2.$$

Обозначим через $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ единичный вектор нормали к положительной стороне поверхности П.

Используя взаимосвязь поверхностных интегралов первого и второго рода, поток можно записать как поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на вектор $\vec{n}$:

$$\mathit{\Pi}_{\Pi}(\vec{F}) = \iint_{\Pi} (\vec{F} \cdot \vec{n})dS = \iint_{\Pi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \tag{7.4}$$

Пример 4. Решить задачу примера 3, вычислив поток векторного поля как поверхностный интеграл первого рода.

Решение. Для определения потока воспользуемся формулой (7.4). Из уравнения плоскости $2x + y + z = 2$ вектор нормали имеет координаты $\pm(2, 1, 1)$.

Поскольку нормаль направлена в сторону, где лежит начало координат (см. рис. 7.2 на с. 187), то вектор нормали равен $(-2, -1, -1)$. Для нахождения единичного вектора нормали определим длину данного вектора: $\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$. Тогда единичный вектор нормали равен $\vec{n} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Найдем скалярное произведение:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x^2 - z)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + (-y^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + (-yz)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2z - 2x^2 + y^2 + yz).$$

Следовательно, $\mathit{\Pi}_{\Pi}(\vec{F}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\Pi} (2z - 2x^2 + y^2 + yz)dS$. Вычисление данного поверхностного интеграла первого рода сведем к нахождению двойного интеграла по проекции D поверхности П на плоскость Oxy (см. рис. 7.3 на с. 187), используя формулу

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z)dS = \iint_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy.$$

Поскольку уравнение плоскости $z = 2 - 2x - y$, то $z'_x = -2$, $z'_y = -1$.

Откуда

$$П_{\Pi}(\vec{F}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \iint\limits_{\Pi} (2z - 2x^2 + y^2 + yz) dS =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint\limits_{D} (2(2 - 2x - y) - 2x^2 + y^2 + y(2 - 2x - y)) \sqrt{1 + (-2)^2 + (-1)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (4 - 4x - 2x^2 - 2xy) dxdy = 2 \text{ (см. пример 3).}$$

Если $\vec{F}(M)$ – поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, то величина потока равна количеству жидкости, протекающей за единицу времени через положительную сторону поверхности. Если поверхность замкнутая, то величина потока через внешнюю ее сторону дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области, ограниченной поверхностью, и количеством жидкости, втекающей в эту область.

В произвольном векторном поле поток вектора через замкнутую поверхность характеризует также суммарную мощность источников и стоков в области, ограниченной поверхностью.

Наличие источника или стока в отдельной точке поля определяется такой характеристикой поля, как дивергенция.

Дивергенция векторного поля

Пусть векторное поле $\vec{F}(M)$ определено в пространственной области G. Выберем в области G произвольную точку M и сферическую поверхность $\Pi_r(M)$, ограничивающую шар $B_r(M)$ радиуса r с центром в точке M. Пусть далее V_r – объем шара $B_r(M)$.

Дивергенцией $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность $\Pi_r = \Pi_r(M)$, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку M:

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) = \lim_{r \to 0} \frac{П_{\Pi_r}(\vec{F})}{V_r}.$$

В случае, когда компоненты $P = P(M)$, $Q = Q(M)$, $R = R(M)$ векторного поля $\vec{F}$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными $\frac{\partial P(M)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(M)}{\partial y}$, $\frac{\partial R(M)}{\partial z}$, дивергенция векторного поля в точке M определяется соотношением

$$\mathrm{div}\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \qquad (7.5)$$

Дивергенция характеризует *мощность источника* в случае $\mathrm{div}\vec{F}(M) > 0$, или *стока* в случае $\mathrm{div}\vec{F}(M) < 0$, находящегося в точке M.

Равенство (7.5) можно записать с помощью символа ∇ (набла), называемого оператором Гамильтона:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \qquad (7.6)$$

Используя (7.6), получим $\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$, т. е. дивергенция есть скалярное произведение оператора Гамильтона на вектор $\vec{F}$.

Пример. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x-y)\vec{j} - xz^3\vec{k}$. Установить, являются ли точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(1, 2, 1)$, $M_3(0, 3, 1)$ источниками или стоками.

Решение. Имеем: $P = 2xy$, $Q = x - y$, $R = -xz^3$. Найдем дивергенцию по формуле (7.5). Поскольку $\frac{\partial P}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial R}{\partial z} = -3xz^2$, то $\mathrm{div}\vec{F} = 2y - 1 - 3xz^2$. Вычислим значение дивергенции в заданных точках: $\mathrm{div}\vec{F}(M_1) = -2$, $\mathrm{div}\vec{F}(M_2) = 0$, $\mathrm{div}\vec{F}(M_3) = 5$. Таким образом, в точке M_1 векторное поле имеет сток, в точке M_3 – источник, а в точке M_2 поле не имеет ни источника, ни стока.

Связь между потоком векторного поля и его дивергенцией устанавливает теорема Гаусса – Остроградского.

Теорема Гаусса – Остроградского. Пусть компоненты $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ векторного поля $\vec{F}$ непрерывны в области G вместе со своими частными производными первого порядка. Поток векторного поля через замкнутую поверхность П в направлении внешней нормали $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по телу G, ограниченному данной поверхностью:

$$\iiint\limits_G \mathrm{div}\vec{F}dv = \iint\limits_\Pi (\vec{F}\cdot\vec{n})dS, \tag{7.7}$$

или

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint\limits_\Pi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$

$$= \iint\limits_\Pi Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \tag{7.8}$$

Пример. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(x^2-z)\vec{i}-y^2\vec{j}-yz\vec{k}$ через замкнутую поверхность П: $2x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, в направлении внешней нормали: а) непосредственно; б) используя формулу Гаусса – Остроградского.

Решение. Область G, ограниченная данной поверхностью, является пирамидой (рис. 7.4).

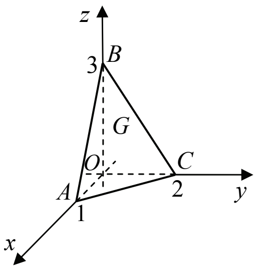


Рис. 7.4. Пирамида

а) вычислим поток через каждую грань пирамиды отдельно, тогда поток $\Pi_\Pi(\vec{F})$ через всю поверхность П пирамиды в силу свойства аддитивности ПОВИ-2 равен сумме потоков через грани пирамиды:

$$\Pi_\Pi(\vec{F}) = \Pi_{AOB}(\vec{F}) + \Pi_{BOC}(\vec{F}) + \Pi_{AOC}(\vec{F}) + \Pi_{ABC}(\vec{F}).$$

Поток через грань ABC определим, используя пример 3 (такое же векторное поле и поверхность). Поскольку в примере 3 нормаль направлена в сторону, где лежит начало координат, а в данном случае в обратную, то поменяем знак в решении примера 3. Таким образом, $\Pi_{ABC}(\vec{F})=-2.$

Найдем $\Pi_{AOB}(\vec{F})$. Из уравнения плоскости AOB: $y=0$, единичный вектор нормали $\vec{n}_{AOB}=(0,-1,0)$, так как нормаль образует с осью Oy угол $\beta=\pi$. Для нахождения потока применим формулу (7.4):

$$\varPi_{AOB}(\vec{F})=\iint\limits_{\Pi}(\vec{F}\cdot\vec{n}_{AOB})dS=\iint\limits_{\Pi}y^2dS=\left|\begin{array}{l}y=0\\ dS=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz=dxdz\end{array}\right|=0.$$

Вычислим $\varPi_{BOC}(\vec{F})$. Из уравнения плоскости BOC: $x=0$, единичный вектор нормали $\vec{n}_{BOC}=(-1,0,0)$. Тогда

$$\varPi_{BOC}(\vec{F})=\iint\limits_{\Pi}(\vec{F}\cdot\vec{n}_{BOC})dS=\iint\limits_{\Pi}(z-x^2)dS=\left|\begin{array}{l}x=0\\ dS=dydz\end{array}\right|=\iint\limits_{D_{BOC}}zdydz.$$

Область D_{BOC} задается системой неравенств: $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2-y$ (рис. 7.5).

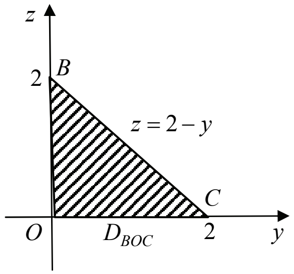


Рис. 7.5. Область D_{BOC}

Следовательно,

$$\varPi_{BOC}(\vec{F})=\iint\limits_{D_{BOC}}zdydz=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{2-y}zdz=\int\limits_0^2\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{2-y}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2(2-y)^2dy=$$

$$=\left.\frac{(y-2)^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Найдем $\varPi_{AOC}(\vec{F})$. Из уравнения плоскости AOC: $z=0$, единичный вектор нормали $\vec{n}_{AOC}=(0,0,-1)$. Тогда

$$\varPi_{AOC}(\vec{F})=\iint\limits_{\Pi}(\vec{F}\cdot\vec{n}_{AOC})dS=\iint\limits_{\Pi}yzdS=\left|\begin{array}{l}z=0\\ dS=dxdy\end{array}\right|=0.$$

Таким образом, поток через всю замкнутую поверхность составляет:

$$\Pi_{\Pi}(\vec{F}) = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3};$$

б) для нахождения потока применим формулу (7.8).

Вычислим дивергенцию по формуле (7.5). Имеем: $P = x^2 - z$, $Q = -y^2$, $R = -yz$. Следовательно, $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial R}{\partial z} = -y$ и $\operatorname{div}\vec{F} = 2x - 3y$. Тогда

$$\Pi_{\Pi}(\vec{F}) = \iint_{\Pi}((x^2 - z)dydz - y^2dxdz - yzdxdy) = \iiint_{G}(2x - 3y)dxdydz.$$

Для определения тройного интеграла рассмотрим область G. Сверху область ограничена плоскостью $z = 2 - 2x - y$, а снизу – плоскостью Oxy. Проекцией D области G на плоскость Oxy является треугольник, ограниченный прямыми: $2x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$ (см. рис. 7.3 на с. 187). Область D можно задать системой неравенств: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2 - 2x$. Тогда

$$\iiint_{G}(2x - 3y)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{2-y-2x} (2x - 3y)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x - 3y)z\Big|_0^{2-y-2x} dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x - 3y)(2 - y - 2x)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (4x - 4x^2 - 6y + 3y^2 + 4xy)dy =$$

$$= \int_0^1 (4xy - 4x^2y - 3y^2 + y^3 + 2xy^2)\Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 (16x - 20x^2 + 8x^3 - 4)dx = \left(8x^2 - \frac{20x^3}{3} + 2x^4 - 4x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

Ротор векторного поля

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, $(x, y, z) \in G$, где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их производные первого порядка по координатам непрерывны в области G, называется вектор $\operatorname{rot}\vec{F}(M)$, определяемый следующим равенством:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{7.9}$$

Используя оператор Гамильтона (7.6), формулу (7.9) можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}, \tag{7.10}$$

где $\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$ – векторное произведение оператора Гамильтона на векторную функцию $\vec{F}(M)$ и формальный определитель (7.10) можно раскрывать только по первой строке.

Пример. Вычислить ротор векторного поля $\vec{F}=(y^2-z^2)\vec{i}+$ $+(2yz)\vec{j}-x^2\vec{k}$.

Решение. Для нахождения ротора поля $\vec{F}$ воспользуемся формулой (7.10):

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2yz & -x^2\end{vmatrix}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial R}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=2y,\ \dfrac{\partial R}{\partial x}=-2x,\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=-2z,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=2y,$

то $\operatorname{rot}\vec{F}=(0-2y)\vec{i}-(-2x+2z)\vec{j}+(0-2y)\vec{k}=-2y\vec{i}+2(x-z)\vec{j}-2y\vec{k}$.

Связь между циркуляцией и ротором векторного поля устанавливает теорема Стокса.

Теорема Стокса. Пусть компоненты $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ векторного поля $\vec{F}$ непрерывны в области G вместе со своими частными производными первого порядка. Циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру L, лежащему в области G, равна потоку ротора этого поля через любую поверхность П, натянутую на контур L:

$$\oint\limits_L \vec{F}d\vec{r}=\iint\limits_{\Pi}(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})dS,$$

или в развернутой форме

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_\Pi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где направление нормали согласовано со стороной поверхности: предполагается, что вектор нормали к поверхности направлен в ту сторону, при движении по которой в положительном направлении контура поверхность остается слева.

В случае плоского поля эта формула принимает вид (здесь $D = \Pi \subset \mathbb{R}^2$):

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \text{ (\textbf{\textit{формула Грина}}).} \tag{7.11}$$

Пример. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\vec{F} = (x^3 + y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ вдоль замкнутого контура L: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$ (см. пример 2) с помощью формулы Грина. Направление обхода контура L выбирается так, чтобы область D, ограниченная им, оставалась слева.

Решение. Область D изображена на рис. 7.1 (см. на с. 185).

Поскольку $P = x^3 + y$, $Q = xy^2$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Тогда, используя формулу Грина (7.11), находим циркуляцию:

$$\oint_L (x^3 + y)dx + xy^2 dy = \iint_D (y^2 - 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (y^2 - 1)dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} - y \right)\Bigg|_0^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^6}{3} - x^2 \right) dx = \left(\frac{x^7}{21} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{21} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{21}.$$

Соленоидальные, потенциальные и гармонические векторные поля

Векторное поле $\vec{F}(M)$ называется ***соленоидальным*** (трубчатым) в области G, если в любой точке этой области $\operatorname{div}\vec{F}(M) = 0$. Соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков, а поток через любую замкнутую поверхность равен нулю. Отсюда следует, что *потоки через поперечные сечения векторных трубок соленоидального поля одинаковы*.

Примерами соленоидальных полей являются напряженность магнитного поля, создаваемого электрическим током, текущим по длинному прямолинейному проводу, или поле линейных скоростей тела, вращающегося вокруг оси.

Векторное поле $\vec{F}(M)$, $M \in G$, называется ***потенциальным***, если существует такая скалярная функция $U = U(M)$, что

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} U(M), \ M \in G,$$

где $\operatorname{grad} U(M) = \left(\frac{\partial U(M)}{\partial x}, \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \frac{\partial U(M)}{\partial z} \right)$ – градиент функции (скалярного поля) $U = U(M)$. Функция $U(M)$ называется ***потенциалом*** векторного поля.

Потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$U(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C, \tag{7.12}$$

где (x_0, y_0, z_0) – некоторая фиксированная, а (x, y, z) – произвольная точка поля.

Если область G односвязная, то достаточно гладкое векторное поле $\vec{F}(M)$, $M \in G$, является потенциальным тогда и только тогда, когда оно безвихревое, т. е. $\operatorname{rot}\vec{F}(M) = 0$, $M \in G$.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, а работа по перемещению материальной точки из точки B в точку C не зависит от пути интегрирования и равна:

$$A = U(C) - U(B), \tag{7.13}$$

где $U(M)$ – потенциал поля.

Векторное поле $\vec{F}(M)$, $M \in G$, называется ***гармоническим***, если $\operatorname{rot}\vec{F}(M) = 0$ и $\operatorname{div}\vec{F}(M) = 0$, $M \in G$.

Для односвязной области G гармоническое поле является одновременно потенциальным и соленоидальным.

Пример. Проверить, является ли соленоидальным или потенциальным векторное поле $\vec{F} = (3x^2y^2 + 2xz^2)\vec{i} + (2x^3y + z^2)\vec{j} + 2z(x^2 + y)\vec{k}$.

В случае потенциальности найти его потенциал. Вычислить работу по перемещению материальной точки из $A(1,\ -1,\ 2)$ в $B(3, 2, -2)$.

Решение. Для проверки соленоидальности векторного поля определим его дивергенцию по формуле (7.5).

Поскольку $P=3x^2y^2+2xz^2$, $Q=2x^3y+z^2$, $R=2z(x^2+y)$, то $\dfrac{\partial P}{\partial x}=6xy^2+2z^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=2x^3$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}=2(x^2+y)$. Тогда $\operatorname{div}\vec{F}=$ $=6xy^2+2(z^2+x^3+x^2+y)$. Поскольку $\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$, то векторное поле не является соленоидальным.

Для проверки потенциальности векторного поля рассчитаем ротор по формуле (7.10). Поскольку $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}=2z$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}=4xz$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=6x^2y$, то

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y^2+2xz^2 & 2x^3y+z^2 & 2z(y+x^2)\end{vmatrix}=$$

$$=(2z-2z)\vec{i}-(4xz-4xz)\vec{j}+(6x^2y-6x^2y)\vec{k}=0.$$

Поскольку $\operatorname{rot}\vec{F}=0$, следовательно, векторное поле является потенциальным.

Найдем потенциал по формуле (7.12), выбирая в качестве фиксированной точки начало координат (0, 0, 0). Поскольку $P(x,y_0,z_0)=0$, $Q(x,y,z_0)=2x^3y$, $R(x,y,z)=2z(x^2+y)$, то

$$U(x,y,z)=\int_0^x 0dx+\int_0^y 2x^3ydy+\int_0^z 2z(x^2+y)dz+C=$$

$$=0+x^3y^2\Big|_0^y+(x^2+y)z^2\Big|_0^z+C=x^3y^2+z^2(x^2+y)+C.$$

Поскольку векторное поле потенциальное, то для вычисления работы воспользуемся формулой (7.13):

$$A=U(3,2,-2)-U(1,-1,2)=151.$$

7.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определения скалярного и векторного полей. Приведите примеры.

2. Как вычисляется градиент скалярного поля? Какие его свойства?

3. Что такое поток векторного поля? В чем его гидродинамический смысл?

4. Поток через внешнюю сторону замкнутой поверхности: а) равен нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля. Что можно сказать о наличии источников (стоков)?

5. Напишите формулу для вычисления дивергенции векторного поля, поясните ее физический смысл.

6. Сформулируйте теорему Гаусса – Остроградского.

7. Приведите определение и физический смысл циркуляции векторного поля.

8. Как вычисляется ротор векторного поля?

9. Сформулируйте теорему Стокса. Запишите формулу Грина.

10. Дайте определения соленоидального и потенциального векторного поля.

11. Как находится потенциал векторного поля?

7.3. ПРАКТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Найти векторные линии плоскопараллельного векторного поля:

1. $\vec{F} = y\vec{i} + 5\vec{j}$.
2. $\vec{F} = 2y\vec{i} - 4x\vec{j}$.
3. $\vec{F} = x\vec{i} - 3y\vec{j}$.
4. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$.

Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M)$ в произвольной точке. Установить, являются ли заданные точки источниками или стоками:

5. $\vec{F} = (x+2y)^2\vec{i} - 3y^3z\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$, $M_1(-2, 1, 0)$, $M_2(1, 2, 1)$, $M_3(2, 3, -1)$.

6. $\vec{F} = xz^2\vec{i} - xy^3\vec{j} + (xz - y^4)\vec{k}$, $M_1(5, 1, -2)$, $M_2(-4, 0, 2)$, $M_3(3, -4, 0)$.

7. $\vec{F} = (y + xz^3)\vec{i} - yx\vec{j} + (x^2 - z^2)\vec{k}$, $M_1(4, 3, 1)$, $M_2(2, 0, 3)$, $M_3(4, 1, 2)$.

8. Определить поток вектора $\vec{F} = -4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ через поверхность П – часть плоскости $2x + 2y - z = 2$, лежащую в первом октанте, если

нормаль $\vec{n}$ направлена в сторону, противоположную той, где лежит начало координат.

9. Найти поток вектора $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ через поверхность П – круг $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = 0$, если нормаль $\vec{n}$ имеет то же направление, что и ось Oz.

10. Вычислить поток вектора $\vec{F} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ через поверхность П, если П – треугольник с вершинами $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 3, 2)$, $C(0, 1, 1)$, а нормаль $\vec{n}$ образует с осью Oz тупой угол.

11. Определить поток вектора $\vec{F} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ через поверхность П – часть плоскости $x + 2y + z = 4$, лежащую в первом октанте, если нормаль $\vec{n}$ направлена в сторону, где лежит начало координат.

Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\vec{F}(M)$ вдоль замкнутого контура L двумя способами: а) непосредственно, б) с помощью формулы Грина. Направление обхода контура L выбирается так, чтобы область D, ограниченная им, оставалась слева:

12. $\vec{F} = (x^2 + 3y)\vec{i} + (x - y)^2 \vec{j}$, L: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

13. $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + x^2 y\vec{j}$, L: ΔABC $A(3, 1)$, $B(3, 4)$, $C(2, 3)$.

14. $\vec{F} = (x^3 + y^3)\vec{i} + 3xy^2 \vec{j}$, L: $y = x^2$, $y = x$.

15. $\vec{F} = xy\vec{i} - y^2 \vec{j}$, L: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$.

Проверить, является ли соленоидальным или потенциальным векторное поле $\vec{F}(M)$. В случае потенциальности найти его потенциал и вычислить работу по перемещению материальной точки из B в C:

16. $\vec{F} = x^2(y + z)\vec{i} - xy^2 \vec{j} - xz^2 \vec{k}$, $B(3, 1, 0)$, $C(-2, 3, 1)$.

17. $\vec{F} = (2xy^3 + z)\vec{i} + (3x^2 y^2 + 4zy)\vec{j} + (x + 2y^2)\vec{k}$, $B(2, 0, -3)$, $C(-1, 1, 4)$.

18. $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, $B(-3, 3, 5)$, $C(0, 2, 1)$.

19. $\vec{F} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x^3 z\vec{k}$, $B(-4, 1, 2)$, $C(5, 3, -1)$.

Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через замкнутую поверхность П в направлении внешней нормали, используя формулу Гаусса – Остроградского:

20. $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + y\vec{j} - 2xyz\vec{k}$, П: $3x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

21. $\vec{F} = (2x + 3z)\vec{i} + (4x - 3y)\vec{j} + (y + 4z)\vec{k}$, П: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$.

22. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, П: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2$.

Минимум для аудиторной работы
1; 5; 9; 14; 17; 20.

7.4. ОТВЕТЫ

1. $y^2 = 10x + C_1$, $z = C_2$. **2.** $2x^2 + y^2 = C_1$, $C_1 \geq 0$, $z = C_2$. **3.** $y = \dfrac{C_1}{x^3}$, $z = C_2$ при $C_1 = 0$ – координатные оси. **4.** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = C_1$, $z = C_2$. **5.** $\operatorname{div}\vec{F} = 2(x + 2y) - 9y^2z - 2z$, M_2 – сток, M_3 – источник. **6.** $\operatorname{div}\vec{F} = z^2 - 3xy^2 + x$, M_1 – источник, M_3 – сток. **7.** $\operatorname{div}\vec{F} = z^3 - x - 2z$, M_1 – сток, M_2 – источник. **8.** $-\dfrac{11}{2}$. **9.** $4\pi a^2$. **10.** $-\dfrac{32}{3}$. **11.** 4. **12.** –1. **13.** 19,75. **14.** 0. **15.** –1. **16.** Соленоидальное. **17.** Потенциальное, $U = x^2y^3 + xz + 2y^2z + C$, $A = 11$. **18.** Потенциальное, $U = xyz + C$, $A = 45$. **19.** Произвольное. **20.** 6. **21.** 108π. **22.** 8π.

Глава 8. РЯДЫ

8.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

8.1.1. Теоретический минимум

1. Общие понятия.
2. Числовые ряды. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Общие понятия

Выражение следующего вида:

$$\boxed{u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

называется ***рядом***, где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – члены ряда; u_n – ***общий член*** ряда (предполагается, что зависимость от n определена).

Сумма n первых членов ряда $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ называется n-й ***частичной суммой*** ряда, а выражение $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ – n-м ***остатком*** ряда.

Примеры. Если члены ряда являются:

1) числами, то ряд называется ***числовым*** (действительным, если числа действительные, и комплексным, если числа комплексные);

2) функциями, то ряд называется ***функциональным***;

3) степенными функциями, то ряд называется ***степенным***;

4) матрицами, то ряд называется ***матричным*** и т. д.

Числовые ряды. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Остановимся подробнее на числовых (действительных) рядах.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется ***сходящимся***, если его n-я частичная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ имеет конечный предел при $n \to +\infty$. Число

$$\boxed{S=\lim_{n\to+\infty} S_n}$$

называется при этом ***суммой*** ряда. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не существует или не является конечным, то ряд называют ***расходящимся***.

Пример. Ряд (*геометрическая прогрессия*)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ \ (a\neq 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$ и его сумма определяется формулой $S=\dfrac{a}{1-q}$.

Решение. Действительно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q\neq 1$. Вычислим предел этой суммы:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\lim_{n\to+\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

Возможны следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q|<1$, то $q^n\to 0$ при $n\to+\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{a}{1-q}$, ряд геометрической прогрессии сходится, и его сумма равна $S=\dfrac{a}{1-q}$.

2. Если $|q|>1$, то $q^n\to\infty$ при $n\to+\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\infty$, и ряд геометрической прогрессии расходится.

3. Если $|q|=1$, то при $q=1$ рассматриваемый ряд $a+a+a+\ldots+a+\ldots$ расходится, так как n-я частичная сумма $S_n=an\to+\infty$ при $n\to+\infty$; а при $q=-1$ ряд $a-a+a-a+a-a+\ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $S_1=a$, $S_2=0$, $S_3=a$, $S_4=0$, … не имеет предела при $n\to+\infty$.

Свойства числовых рядов:

1) если к ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно;

2) если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$, где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ расходится;

3) если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) =$ $= S_1 \pm S_2$;

4) члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя их местами.

Необходимый признак сходимости числового ряда

Необходимый признак сходимости ряда. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*, то его общий член стремится к нулю, т. е.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.}$$

Если $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится (*достаточное условие расходимости*). Если $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, то ряд может сходиться (в одних случаях) или расходиться (в других).

Примеры. Выяснить, сходится или расходится ряд:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n+4} = \frac{1}{5} + \frac{3}{6} + \frac{5}{7} + \frac{7}{8} + \frac{9}{9} + \frac{11}{10} + \ldots$

Решение. Поскольку $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n+4} = 2 \neq 0$, то выполняется достаточное условие расходимости ряда и рассматриваемый ряд расходится.

2. *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

Решение. Поскольку $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ и необходимый признак сходимости выполняется, имеем:

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}\geq\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2},$$

что противоречит сходимости этого ряда, так как в случае его сходимости $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0.$

Рассмотренный пример показывает, что необходимый признак сходимости достаточным в общем случае не является.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

Решение. Получаем:

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\to 1=S \text{ при } n\to+\infty.$$

И, таким образом, ряд сходится, и его сумма равна 1.

8.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называют числовым рядом?
2. Дайте определение частичной суммы ряда.
3. Какой ряд называют сходящимся (расходящимся)?
4. Сформулируйте необходимый признак сходимости и достаточное условие расходимости числового ряда.
5. Если общий член ряда стремится к нулю, следует ли отсюда, что ряд сходится? Приведите примеры.
6. Назовите свойства числовых рядов.

8.1.3. Практический минимум

а) записать 1, 2, 3, n, $(n + 1)$-й члены числового ряда;

б) проверить сходимость рядов, пользуясь непосредственно определением. В случае сходимости найти сумму ряда:

1. $2-2+2-2+2-2+\ldots$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n-2}{2^{2n}}.$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}.$
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5^{n+2}}{4\cdot 3^{n-1}}.$
5. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$

Доказать расходимость рядов:

7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^3}{2n^2+1}$. 8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n}{2n+1}$. 9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\pi}{n^2}$.

Определить, для каких рядов выполняется необходимый признак сходимости. Являются ли указанные ряды сходящимися? Почему? Какие ряды расходятся на основании достаточного условия расходимости ряда?

10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3n+7}$. 11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-2}{n^3-n+1}$. 12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n^5+1}}$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$. 14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$. 15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{n^2+5}$.

16. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{2n^5+7n+1}$. 17. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

Минимум для аудиторной работы

2; 7–9.

8.1.4. Ответы

1. Расходится. **2.** $S_n=\frac{7}{3}-3\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3\cdot 4^n}$, $S=\frac{7}{4}$. **3.** $S_n=\frac{5}{6}-\frac{1}{n+3}$, $S=\frac{5}{6}$. **4.** Расходится. **5.** $S=\frac{3}{2}$. **6.** $S=\frac{1}{6}$.

8.2. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

8.2.1. Теоретический минимум

1. Признак Даламбера.
2. Интегральный признак Коши.
3. Признаки сравнения.

Рассмотрим ряд, члены которого знакопостоянны (неположительны или неотрицательны). Не ограничивая общности, считаем, что члены ряда положительны:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n > 0. \qquad \text{(A)}$$

Ясно, что для таких рядов остается в силе необходимый признак сходимости. Приведем некоторые достаточные признаки сходимости.

Признак Даламбера

Если

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,}$$

то при $0 \le l < 1$ ряд (A) сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Даламбера доказывается сравнением с геометрической прогрессией.

Примеры. С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$.

Решение. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{n!},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1},\ \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Поскольку $l = 0 < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{3n-1}$.

Решение. Получаем:

$$a_n = \frac{2^n}{3n-1},\ a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3(n+1)-1} = \frac{2^{n+1}}{3n+2},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3n+2}\frac{3n-1}{2^n} = \frac{2\cdot 2^n}{2^n}\frac{3n-1}{3n+2} = 2\frac{3n-1}{3n+2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{3n-1}{3n+2} = 2.$$

Поскольку $l = 2 > 1$, то по признаку Даламбера данный ряд расходится.

Замечание. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражения вида $n!$ или a^n.

Интегральный признак Коши

Пусть члены ряда (A) могут быть представлены как значения некоторой неотрицательной, непрерывной, убывающей на промежутке $\left[1,+\infty\right)$ функции $f(x)$: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ..., $a_n = f(n)$, ... Тогда ряд (A) и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся (или расходятся) одновременно.

Пример. Показать, что *обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Решение. Если $\alpha \le 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится (достаточное условие расходимости). В случае $\alpha > 0$ применим интегральный признак Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ непрерывна, положительна и убывает при $x \ge 1$. При $\alpha \ne 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A} x^{-\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty}\ln x\Big|_1^A = \lim\limits_{A\to+\infty}(\ln A - \ln 1) = +\infty.$ Значит, интеграл и данный ряд сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \le 1$.

Признаки сравнения

Наряду с рядом (A) рассмотрим ряд:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n, \quad b_n > 0. \qquad \text{(B)}$$

Непредельный признак сравнения. Пусть $a_n \le b_n$ для всех n или начиная с некоторого номера. Тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) – расходимость ряда (B).

Предельный признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0,}$$

то ряды (A) и (B) сходятся (или расходятся) одновременно.

Сходимость многих рядов можно исследовать сравнением:

1) с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$, который сходится при $|q|<1$;

2) гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, который расходится;

3) обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, который сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

Вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, где $P_k(n)$ и $Q_l(n)$ – многочлены от n степени k и l соответственно, решается сравнением с обобщенным гармоническим рядом при $\alpha=l-k$.

Примеры. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2^n}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится $\left(q=\frac{1}{2}<1\right)$. Имеем:

$$\frac{1}{n+2^n}<\frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n+1}{n^2+2n+4}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2n+4}=1\neq 0.$$

Значит, данный ряд расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n+1}}{n^2+2n+4}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{\sqrt[6]{n+1}}{n^2+2n+4}=\frac{n^{\frac{1}{6}}\sqrt[6]{1+\dfrac{1}{n}}}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}\sim\frac{1}{n^{\frac{11}{6}}}\text{ при } n\to+\infty,$$

то по предельному признаку сравнения данный ряд сходится как сравнимый с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{11}{6}}}$, который сходится $\left(\alpha=\dfrac{11}{6}>1\right)$.

8.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Для каких рядов справедлив признак Даламбера?
2. Сформулируйте признак Даламбера.
3. Назовите интегральный признак Коши.
4. В каких случаях удобно применять интегральный признак?
5. Сформулируйте признаки сравнения.
6. Что можно сказать о сходимости обобщенного гармонического ряда?

8.2.3. Практический минимум

Доказать сходимость данных рядов с помощью признака Даламбера:

1. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{120}+\ldots+\dfrac{n}{(2n+1)!}+\ldots$

2. $\dfrac{1}{1\cdot 1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 2}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^{n-1}}+\ldots$

3. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{25}+\ldots+\dfrac{n^2}{5^n}+\ldots$

4. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{4}{2}+\ldots+\dfrac{3n-2}{n!}+\ldots$

Исследовать сходимость данных рядов с помощью признака Даламбера:

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2^n}$. 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n!}$. 7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^{10}}$.

Вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью интегрального признака Коши:

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+9}$. 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2+n^2}$.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$. 12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$. 13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$.

14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$.

Исследовать сходимость рядов по признакам сравнения:

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-1}$. 16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$. 17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$.

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+13}$. 19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2+n^2}{n^3+2}\right)^2$. 20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

Исследовать сходимость рядов:

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{4^n+6}$. 22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$. 23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2n+1}$.

24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+6}$. 25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n-3^n}{12^n}$. 26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n!}$.

27. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n+1}$. 28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \frac{1}{n^2}$. 29. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\frac{3}{n}}}{n^2}$.

30. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(1+6n)^{10}}}$. 31. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n\sqrt[4]{n}}$. 32. $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{\frac{1}{n-1}}$.

Минимум для аудиторной работы

3; 4; 8; 9; 10; 15; 16; 19.

8.2.4. Ответы

5. Сходится. **6.** Сходится. **7.** Расходится. **8.** Сходится. **9.** Расходится. **10.** Расходится. **11.** Сходится. **12.** Расходится. **13.** Сходится. **14.** Сходится. **15.** Расходится. **16.** Сходится. **17.** Сходится. **18.** Расходится. **19.** Сходится. **20.** Расходится. **21.** Сходится. **22.** Сходится. **23.** Расходится. **24.** Расходится. **25.** Сходится. **26.** Сходится. **27.** Расходится. **28.** Сходится. **29.** Сходится. **30.** Сходится. **31.** Расходится. **32.** Расходится.

8.3. РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА

8.3.1. Теоретический минимум

1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Числовой ряд

$$\boxed{a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n,}$$

где $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, называется ***знакочередующимся***.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). Если для *знакочередующегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ выполнены условия:

1) *модули членов ряда монотонно убывают*: $\boxed{a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots;}$

2) *предел общего члена ряда равен нулю*: $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,}$

то ряд *сходится* и его сумма не превосходит первого члена $S \le a_1$, а остаток ряда $R_n = S - S_n$ удовлетворяет неравенству $|R_n| \le a_{n+1}$.

Ряды, для которых выполняется признак Лейбница, называются рядами Лейбница (лейбницевского типа).

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Числовой ряд, члены которого имеют произвольные знаки, называется ***знакопеременным***. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$, составленный из модулей членов знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, то сходится и знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Примеры.

1. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ абсолютно сходящийся, потому что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{3}$.

2. Ряд $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\ldots$ сходится, поскольку $S_1=1$, $S_2=0,\ S_3=\frac{1}{2},\ S_4=0,\ldots,S_{2n}=0,\ S_{2n+1}=\frac{1}{n+1}$, значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$.

Однако этот ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится. Действительно, имеем: $S_{2n}=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$. Поскольку выражение в скобках является n-й частичной суммой гармонического ряда, то $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\infty$.

3. Исследуем сходимость $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$. Составим ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$. Поскольку $\frac{n+1}{n^2+2n+4}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}\sim\frac{1}{n}$ при $n\to+\infty$, то по предельному при-

знаку сравнения данный ряд расходится как сравнимый с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Применим признак Лейбница к исходному ряду. Имеем: 1) производная модуля общего члена ряда отрицательна: $\left(\frac{n+1}{n^2+2n+4}\right)' = \frac{-n^2-2(n-1)}{(n^2+2n+4)^2} < 0,$ и, стало быть, модули членов ряда монотонно убывают; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4} = 0.$ Условия признака Лейбница выполнены, и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$ сходится условно.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают не только *всеми свойствами сходящихся рядов*, но и *дополнительно* свойствами сумм конечного числа слагаемых. Такие ряды можно:

1) *перемножать*;

2) *переставлять* местами члены ряда;

3) *подставлять* «ряд в ряд».

Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают. Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или даже расходящийся ряд (*теорема Римана*).

Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости рядов с положительными членами, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

8.3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называют знакопеременным рядом?
2. Поясните, что называют знакочередующимся рядом.
3. Сформулируйте признак сходимости знакочередующегося ряда.
4. Сформулируйте достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
5. Как можно оценить остаток ряда Лейбница?
6. Объясните, какие ряды называются абсолютно (условно) сходящимися.
7. Перечислите основные свойства абсолютно сходящихся рядов.

8.3.3. Практический минимум

Докажите, что для указанных рядов выполняется признак Лейбница. Оцените ошибку, допускаемую при замене суммы ряда суммой его первых 10 членов:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. 2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}$. 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+5}}$.

Найдите приближенную сумму ряда, ограничившись первыми тремя членами. Оцените абсолютную погрешность вычислений:

4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$. 5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}n}{3^n}$. 6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^3+4n-1}$.

Исследуйте сходимость ряда по признаку Лейбница. Для сходящихся рядов: а) оцените остаток R_n; б) вычислите сумму ряда с точностью до 0,1:

7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. 8. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{n}{4n+1}}$. 9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n}$.

Выясните, какие из данных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^n n}$. 11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n+1}$. 12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^3}$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$. 14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$. 15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{e^{n^2}}$.

16. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2n^2}$. 17. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^n}{n!}$. 18. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{(4n+1)(n+1)}$.

19. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\alpha}{3n^2}$. 20. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{n}}$. 21. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$. 23. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{n}{2n^4+1}}$.

Сколько первых членов ряда достаточно взять, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую чем 0,001?

24. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n}$. 25. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2+1}$.

Минимум для аудиторной работы

3; 4; 8; 9; 10; 15; 16; 19.

8.3.4. Ответы

1. 0,05. **2.** 0,0083. **3.** 0,25. **4.** 0,4, $\varepsilon = 0{,}06$. **5.** $-\dfrac{2}{9}$, $\varepsilon = 0{,}05$. **6.** $\dfrac{7}{30}$, $\varepsilon = 0{,}06$. **7.** Сходится, 0,2. **8.** Расходится. **9.** Расходится. **10.** Сходится абсолютно. **11.** Расходится. **12.** Сходится абсолютно. **13.** Сходится условно. **14.** Сходится абсолютно. **15.** Сходится абсолютно. **16.** Расходится. **17.** Сходится абсолютно. **18.** Расходится. **19.** Сходится абсолютно. **20.** Сходится условно. **21.** Сходится абсолютно. **22.** Сходится условно. **23.** Сходится абсолютно. **24.** 7. **25.** 18.

8.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

8.4.1. Теоретический минимум

Степенные ряды. Интервал и область сходимости

Ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, называется ***степенным***:

$$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.}$$

Действительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – ***коэффициенты*** ряда, $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.

Придавая x определенное значение x_0, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$, который может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если полученный числовой ряд сходится, то будем называть точку x_0 ***точкой сходимости*** степенного ряда. Множество всех числовых значений аргумента x, для которых степенной ряд сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда.

В области сходимости степенного ряда его *сумма* является некоторой *функцией* $S(x)$ переменной x. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ – n-я частичная сумма ряда.

Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ содержит, по крайней мере, одну точку: $x = 0$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$; если же ряд расходится при $x = x^*$, то он расходится при всех значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x^*|$.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ называют число $R > 0$ такое, что при $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ расходится. Интервал $(-R, R)$ называют ***интервалом*** (промежутком) ***сходимости*** степенного ряда. В частности, если ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд сходится во всех точках числовой оси, то считаем, что $R = +\infty$.

На концах интервала сходимости (т. е. при $x = -R$ и при $x = R$) исследуется вопрос о сходимости соответствующего числового ряда.

Таким образом, *областью сходимости* степенного ряда является интервал сходимости с возможным присоединением одного или двух его концов (тех, где соответствующий числовой ряд сходится).

Для ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ радиус сходимости можно найти по формуле: $R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Однако интервал сходимости рядов *удобно определять* с помощью признака Даламбера, непосредственно применяя его к ряду, составленному из модулей членов исходного ряда. Так поступают, если степенной ряд содержит не все степени x или записан по степеням $(x - x_0)$, где x_0 − некоторое число, т. е. если ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, и в других случаях.

Отметим, что степенные ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ с помощью замены $x - x_0 = z$ легко сводятся к рядам, рассмотренным выше. Для них *интервал сходимости* имеет вид $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Примеры. Найти область сходимости степенных рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x|^n}{n!},\ |u_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{|x|^n\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится на всей числовой оси, и областью сходимости исходного ряда является промежуток $(-\infty, +\infty)$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \cdot n!$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot(n+1)!}{|x|^n\cdot n!} = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$$

Значит, областью сходимости данного ряда является одна точка $\{0\}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n|x|^{2(n+1)}}{2^{n+1}|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{2}.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится, если $|x|^2 < 2$ или $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-\sqrt{2}$ или $x=\sqrt{2}$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1$. Таким образом, областью сходимости исходного ряда является промежуток $\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|x+3\right|^{n+1}\cdot n}{\left|x+3\right|^n\cdot(n+1)} = \left|x+3\right|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \left|x+3\right|.$$

Значит, ряд абсолютно сходится, если $\left|x+3\right|<1$ или $-4<x<-2$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-2$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится.

При $x=-4$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $\left[-4,-2\right)$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|x\right|^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot\left|x\right|^n} = \left|x\right|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \left|x\right|.$$

Ряд абсолютно сходится, если $\left|x\right|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ получаем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится абсолютно.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1,\ 1]$.

Свойства степенных рядов. Степенные ряды внутри интервалов сходимости обладают всеми свойствами абсолютно сходящихся рядов, и дополнительно их можно *дифференцировать* и *интегрировать*, при этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменятся, а область сходимости может измениться.

В частности, дифференцирование не улучшает, а интегрирование не ухудшает сходимости степенного ряда; отметим также, что сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.

Примеры. Найти область сходимости степенных рядов:

6. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n.$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x|.$$

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем расходящийся ряд.

При $x=-1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n,$ который также расходится.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $(-1, 1)$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+2}\cdot\ (n+1)}{(n+2)\cdot|x|^{n+1}} = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = |x|.$$

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$, сравнимый с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, который сходится условно по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $[-1,\,1)$.

Нетрудно видеть, что рассматриваемый ряд получается почленным интегрированием степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$. При этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменились, а область сходимости изменилась, в частности, добавилась точка $x=-1$. Таким образом, интегрирование не ухудшило сходимость степенного ряда.

8. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+3}\cdot\;(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)\cdot|x|^{n+2}}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+3}=|x|.$$

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ получаем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, сравнимый с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$, сходящийся абсолютно.

Областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1,\,1]$.

Нетрудно видеть, что рассматриваемый ряд получается почленным интегрированием степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$. При этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменились, а область сходимости расширилась, в частности, добавилась точка $x=1$.

8.4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется степенным?
2. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
3. Что такое интервал сходимости степенного ряда?
4. Чем отличается интервал сходимости степенного ряда от области сходимости?
5. Назовите свойства степенных рядов.

8.4.3. Практический минимум

Определить область сходимости степенных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^n.$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n^2+3}.$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n \sqrt{n}}.$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}.$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+\sqrt{n}}.$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{n(3n-1)}.$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{9^n}.$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{25^n n x^{2n+1}}{2n+1}.$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x+3)^n.$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{2n}.$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n.$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x+3)^n}{16n+3}.$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^n x^{3n}}{n}.$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)x^{2n-1}.$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}.$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{x+2}{5}\right)^n.$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{\sqrt[3]{n}}.$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{9^n n^2}.$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n (n^2+4)}.$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+3}.$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2-x)^n}{n^4}.$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{15^n}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}.$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^n}{\sqrt[3]{n}}.$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+3)(x-4)^n.$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{3n+1}.$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-5)^n}{\sqrt[4]{n^3}}.$
27. $\sum_{n=1}^{+\infty} n!\left(\frac{x}{4}\right)^n.$
28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+5)^{2n}}{n}.$

С помощью почленного дифференцирования и интегрирования найти сумму ряда:

29. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^{11}}{11}+\ldots+\dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots,\quad |x|<1.$

30. $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots,\quad |x|<1.$

Минимум для аудиторной работы

1; 2; 3; 10; 15; 27.

8.4.4. Ответы

1. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. **2.** $[-1,1]$. **3.** $(-2,2]$. **4.** $(-4,4)$. **5.** $(-1,1]$. **6.** $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$. **7.** $(-3,3)$. **8.** $\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$. **9.** $\{-3\}$. **10.** $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$. **11.** $[-1,5)$. **12.** $(-2,-1]$. **13.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. **14.** $(-1,\ 1)$. **15.** $(-\infty,\ +\infty)$. **16.** $(-7,\ 3)$. **17.** $(0,\ 2]$. **18.** $[-4,5]$. **19.** $[-4,4]$. **20.** $[-1,1)$. **21.** $[1,3]$. **22.** $\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$. **23.** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. **24.** $(3,\ 5)$. **25.** $(-1,\ 1)$. **26.** $[2,\ 3)$. **27.** $\{0\}$. **28.** $[-6,\ -4]$. **29.** $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,\ x\in(-1,1)$. **30.** $\frac{1}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$.

8.5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

8.5.1. Теоретический минимум

1. Ряды Тейлора и Маклорена.
2. Основные табличные разложения в ряд Маклорена.
3. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций, определенных интегралов и к решению дифференциальных уравнений.

Ряды Тейлора и Маклорена

Задача. Представить функцию $f(x)$ в виде суммы степенного ряда.

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности точки a любое число раз. ***Рядом Тейлора*** для функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$ называется ряд вида

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots}$$

В частности, при $a = 0$ получаем ***ряд Маклорена***:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.}$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. В общем случае соответствие между функцией и ее рядом Тейлора обозначается знаком $\sim$.

Функция $f(x)$ в каждой точке некоторой окрестности точки a разложима в ряд Тейлора по степеням $x - a$, если в этой точке остаток ряда $R_n(x) = f(x) - \left(f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, нужно вычислить значения данной функции и всех ее производных в точке a, т. е. найти $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a), \ldots,$ и записать формально ее ряд Тейлора по формуле. Затем найти область сходимости полученного ряда и выяснить, в каких точках из области сходимости суммой ряда будет $f(x)$.

Основные табличные разложения в ряд Маклорена

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$	$x \in (-\infty, +\infty),$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$	$x \in (-\infty, +\infty),$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$	$x \in (-\infty, +\infty),$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots, \qquad x\in(-1,1),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \qquad x\in(-1,1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots, \qquad x\in\left(-1,1\right],$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \qquad x\in\left[-1,1\right].$$

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций, определенных интегралов и к решению дифференциальных уравнений

1. Приближенное вычисление значений функций. Пусть дан степенной ряд функции $y=f(x)$. Задача вычисления значения этой функции при $x=x_0$ заключается в отыскании суммы ряда с заданной точностью $\varepsilon>0$, которую можно достичь путем оценивания остатка числового ряда, ограничиваясь определенным числом членов ряда.

Пример. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся разложением в степенной ряд функции $\sin x$, в котором примем $x=1$. Тогда получим $\sin 1=$ $=1-\frac{1}{3!}1^3+\frac{1}{5!}1^5-\ldots$ Стоящий справа ряд сходится абсолютно. Поскольку $\frac{1}{5!}\approx 0{,}008>0{,}001$, а $\frac{1}{7!}\approx 0{,}0002<0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых: $\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}=0{,}842$. Допускаемая ошибка при этом меньше, чем первый отброшенный член, т. е. меньше 0,0002.

2. Приближенное вычисление определенных интегралов. Степенные ряды применяются для приближенного вычисления определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$ в случаях, если первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции или нахождение первообразной сложно. Если подынтегральная функция $f(x)$ разложима в степенной ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R, R)$ включает в себя отрезок интегрирования $[a, b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ с точностью до 0,1.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя в соответствующей формуле x на $-x$:

$$\sqrt{x}e^{-x} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right), \; x \in (-\infty, +\infty).$$

Интегрируя обе части последнего равенства на отрезке $[0, 1]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty, +\infty)$, получим:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{6} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{6} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{27} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Поскольку $\frac{1}{7} = 0{,}14\ldots > 0{,}1$, а $\frac{1}{27} = 0{,}037\ldots < 0{,}1$, то с точностью до 0,1 имеем:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = 0{,}4.$$

3. Приближенное решение дифференциальных уравнений. В случае, когда точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (ДУ) в элементарных функциях не представляется возможным или оказывается очень сложным, это решение (если оно представимо) удобно искать в виде степенного ряда.

При решении задачи Коши $\boxed{y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0}$ используем ряд Тейлора:

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \end{gathered}}$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ находят путем последовательного дифференцирования уравнения и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Пример. Методом последовательного дифференцирования определить три, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + \dfrac{1}{y}$, $y(0) = 1$.

Решение ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Из уравнения находим, что $y'(0) = 0 + \dfrac{1}{y(0)} = 1.$ Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 1 - \frac{1}{y^2}y', \quad y''(0) = 1 - 1 = 0,$$

$$y''' = -\frac{y''y^2 - y' \cdot 2yy'}{y^4}, \quad y'''(0) = 2.$$

Подставляя полученные значения в ряд, будем иметь:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

8.5.2. Вопросы для самоконтроля

1. Напишите ряд Тейлора для функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$.

2. Приведите ряд Маклорена для функции $y = f(x)$.

3. Для каких функций можно построить ряд Тейлора?

4. При каких условиях функция $f(x)$ в каждой точке некоторой окрестности точки a разложима в ряд Тейлора по степеням $x-a$?

5. Как построить разложение функции в ряд Тейлора?

6. Запишите разложения основных функций в ряд Маклорена.

7. Опишите применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

8.5.3. Практический минимум

Разложить данные функции в ряд в окрестности $x=0,$ пользуясь основными табличными разложениями в ряд Маклорена. Указать области сходимости полученных рядов:

1. $x\ln(1+x^2).$

2. $\dfrac{\cos x}{x}.$

3. $\dfrac{x}{1-x^3}.$

4. $e^{-x^2}.$

5. $2^x.$

6. $\dfrac{x^2}{1-x^2}.$

7. $\sqrt{x}e^{3x}.$

8. $x\sin x^3.$

9. $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}.$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$

Разложить данные функции в ряд по степеням $x-a$. При каких x это разложение справедливо?

11. $e^x,\ a=-2.$

12. $\dfrac{1}{2+x},\ a=0.$

13. $\sin 3x,\ a=0.$

14. $\ln x,\ a=2.$

Рассчитать с точностью до ε указанную величину:

15. $\ln\dfrac{3}{2},\ \varepsilon=0{,}01.$

16. $\cos 1,\ \varepsilon=0{,}002.$

17. $\dfrac{1}{e},\ \varepsilon=0{,}001.$

18. $\sqrt[3]{8{,}36},\ \varepsilon=0{,}001.$

Вычислить с точностью до $0{,}001$ нижеприведенные интегралы:

19. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\ln(1+x^2)dx.$

20. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx.$

21. $\int\limits_{0}^{0{,}5} \frac{dx}{1+x^4}$. 22. $\int\limits_{0}^{0{,}8} x^{10}\sin x dx$.

Записать три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения при данных начальных условиях:

23. $y' = e^x - y^2,\quad y(0) = 0$. 24. $y' = 2\cos x - xy^2,\quad y(0) = 1$.

Найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд решения задачи Коши для уравнения:

25. $y' = 2\cos x - xy^2,\quad y(0) = 1$. 26. $y'' = xyy',\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$.

Минимум для аудиторной работы

1; 2; 3; 4; 15; 22; 23.

8.5.4. Ответы

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{n+1}$, $x \in [-1, 1]$. **2.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}$, $x \in (-1, 1)$. **4.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. **5.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$. **6.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n+2}$, $x \in (-1, 1)$. **7.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n x^{3n+\frac{1}{2}}}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
8. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{6n+4}}{(2n+1)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. **9.** $-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n+1}$, $x \in (-1, 1)$.
10. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{4n}$, $x \in (-1, 1)$. **11.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{e^2 n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. **12.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}$, $x \in (-2, 2)$. **13.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. **14.** $\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$, $x \in (-2, 2]$. **15.** 0,41. **16.** 0,542.
17. 0,368. **18.** 2,015. **19.** 0,014. **20.** 0,245. **21.** 0,494. **22.** 0,006.
23. $y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \ldots$ **24.** $y = 1 + 2x - \frac{x^2}{6} - \ldots$ **25.** $y = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + \ldots$
26. $y = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \ldots$

Глава 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

9.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

9.1.1. Теоретический минимум

1. Элементы комбинаторики.
2. Предмет теории вероятностей (ТВ). Статистическая устойчивость.
3. Дискретное вероятностное пространство (ДВП).
4. Классическое определение вероятности.
5. Аксиоматическое построение ТВ.
6. Геометрические вероятности.
7. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
8. Формула полной вероятности.
9. Повторение испытаний. Схема Бернулли.
10. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает, сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества.

Правило произведения: если объект типа X можно выбрать n способами и при каждом таком выборе объект типа Y можно выбрать m способами, то выбор пары (X, Y) в указанном порядке можно осуществить nm способами.

Правило суммы: если объект типа X можно выбрать n способами, а объект типа Y – m способами, то выбор объекта типа X или Y можно осуществить $m + n$ способами.

Пример. Из пункта M в пункт N и обратно можно добраться тремя способами: поездом, автобусом или самолетом; из пункта N в пункт L можно доехать автобусом или дойти пешком. Сколько различных по способу передвижения маршрутов можно организовать: а) из M в L через N; б) из N в M или из N в L?

Решение. а) нужные маршруты легко перечислить: 1) из M в N самолетом, далее автобусом; 2) из M в N самолетом, далее пешком; 3) поездом – автобусом; 4) поездом – пешком; 5) автобусом – автобусом; 6) автобусом – пешком.

Число маршрутов можно определить, не перечисляя их. Имеется 3 способа добраться из M в N и 2 способа из N в L. На каждый способ добраться из M в N приходится 2 способа добраться в L. По правилу произведения получаем $3 \cdot 2 = 6$ способов;

б) нужно выбрать либо один из трех вариантов добраться из N в M, либо один из двух вариантов путешествия из N в L. Применяя правило суммы, получаем всего 3 + 2 = 5 вариантов.

Пример. Сколько а) трехзначных чисел; б) трехзначных чисел, состоящих из различных цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. а) каждую цифру можно выбрать 5 способами, следовательно, по правилу произведения получаем, что всего таких чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$;

б) первую цифру можно выбрать 5 способами; на каждый способ выбора первой цифры приходится 4 способа выбора второй цифры (можно взять любую цифру, кроме той, которую выбрали в первый раз); на каждый способ выбора первых двух цифр приходится 3 способа выбора третьей цифры. По правилу произведения получаем всего $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов, что равно числу A_5^3 размещений из 5 символов по 3 местам (см. ниже).

Число P_n всех возможных способов переставить n различных элементов – число ***перестановок*** (из n различных элементов) равно:

$$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 = n!}$$

Число A_n^m ***размещений*** (упорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам (местам), различающихся либо самими элементами, либо их порядком, равно:

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1), \text{ где } m \le n.}$$

Число C_n^m ***сочетаний*** (неупорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам (порядок выбранных элементов не учитывается) равно:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},}$$

причем $0! = 1$. Отметим, что $C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Пример. Сколько существует способов распределения трех наград между 10 участниками соревнования, если: а) награды различные; б) все награды одинаковые?

Решение. Число способов распределения трех наград между 10 участниками соревнования равно числу способов выбрать трех участников из десяти и разместить их по трем местам, т. е. числу размещений $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (порядок важен) в случае а) и числу $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ (порядок не учитывается) в случае б).

Пример. Сколько существует способов выбрать: а) три цветка; б) одну розу и две гвоздики из вазы, в которой стоят шесть роз и пять гвоздик?

Решение. а) поскольку порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать три цветка из имеющихся 6 + 5 = 11 можно $C_{11}^3 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$ способами;

б) выбрать одну розу из шести можно $C_6^1 = 6$ способами. На каждый из 6 способов выбора розы приходится $C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ способов выбора двух гвоздик из пяти. По правилу произведения получаем, что выбрать одну розу и две гвоздики можно $C_6^1 C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60$ способами.

Предмет теории вероятностей (ТВ). Статистическая устойчивость

В теории вероятностей изучаются математические модели ***случайных экспериментов*** (СЭ, *испытаний*, *опытов*), т. е. экспериментов, исходы которых неоднозначны.

Примеры. СЭ являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков – от одного до шести) и т. д.

Однако в ТВ рассматриваются не любые СЭ, а те, которые обладают свойством ***статистической устойчивости***. Поясним это. Предположим, что в результате СЭ исследуется некоторый его возможный исход A, который в серии из n СЭ появился m раз (*частота* появления исхода A). Величина $\dfrac{m}{n}$ называется ***относительной частотой*** появления исхода A в данной серии из n СЭ. Если относительные частоты $\dfrac{m}{n}$ появления исхода A имеют тенденцию с ростом *объемов* n серий СЭ группироваться вокруг некоторого неотрицательного числа p, то говорят, что данный СЭ обладает свойством *статистической устойчивости*. На практике это свойство обычно проверяется путем проведения нескольких групп СЭ, и если *внутригрупповые* относительные частоты при достаточно больших объемах групп СЭ мало различаются между собой, то считается, что СЭ обладает свойством *статистической устойчивости*.

Пример. Некто бросал монету 24 000 раз, при этом герб – исход A выпал 12 012 раз. Можно полагать, что данный СЭ обладает свойством статистической устойчивости, поскольку число достаточно велико. Однако для большей убедительности следует провести несколько групп СЭ, например из 24 000 бросаний монеты, и сравнить внутригрупповые частоты.

В истории ТВ имеются попытки определить понятие вероятности исхода как предела его относительной частоты при неограниченном возрастании объема серии СЭ (*статистическое определение вероятности*), что несостоятельно с математической точки зрения, если предел понимать в обычном смысле. Позже в *законе больших чисел* мы обсудим строгое обоснование такого подхода, понимая предел в вероятностном смысле.

Одним из основных вопросов математического моделирования СЭ в ТВ является описание (случайных) событий, связанных с данным СЭ, и того, как вероятности одних событий (которые исследуются) связаны с вероятностями других (более *элементарных*) событий, вероятности которых известны. Ниже рассматриваются две такие модели: дискретное вероятностное пространство и общее (абстрактное) вероятностное пространство.

Дискретное вероятностное пространство (ДВП)

В дискретном вероятностном пространстве, связанном с данным СЭ, множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

возможных взаимоисключающих (элементарных) исходов – ***элементарных событий*** – не более чем счетно; вероятности $P(\omega_1) = p_1$, $P(\omega_2) = p_2, ...$ элементарных событий заданы, причем $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ (*условие контроля*). Множество Ω называется ***достоверным событием*** (оно всегда происходит в результате СЭ). Под (случайным) ***событием*** $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}, ...\} \subset \Omega$ понимается произвольная совокупность элементарных событий $\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}, ...,$ называемых ***элементарными исходами, благоприятствующими появлению со-***

бытия A, причем вероятность $P(A)$ события определяется как сумма вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i)=\sum_{\omega_i\in A}p_i.$$

Тогда запись $A\subset B$ (событие A влечет событие B) означает, что элементарные исходы, благоприятствующие A, являются благоприятствующими и B, т. е. всякий раз, когда в результате СЭ происходит A, происходит также и B. Ясно, что любое событие в СЭ влечет достоверное событие.

Событие $\varnothing$, не содержащее ни одного элементарного исхода, называется ***невозможным*** (оно никогда не происходит в результате СЭ).

Вводятся следующие *операции над событиями*:

1) ***суммой*** $A + B$ событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A **или** B (в результате СЭ произошло **или** событие A, **или** событие B, **или** события A и B одновременно);

2) ***произведением*** $A\cdot B=AB$ событий A и B называется событие $C=AB$, состоящее в том, что в результате СЭ произошли **и** событие A, **и** событие B.

Пример. СЭ: каждый из двух стрелков делает по выстрелу. Событие A – попадание в мишень первым стрелком, событие B – попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень хотя бы одним стрелком (**или** попал первый стрелок, **или** попал второй стрелок, **или** попали оба, т. е. мишень поражена). Произведением событий A и B будет событие $D = AB$, состоящее в попадании в мишень каждым стрелком (**и** первый стрелок попал, **и** второй стрелок попал).

События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же СЭ, т. е. они не могут произойти вместе в одном испытании: $AB=\varnothing$.

Пример. СЭ: один выстрел по мишени. Событие A – попадание в мишень, событие B – промах. События A и B несовместны, поскольку если произошло событие A (стрелок попал в мишень), то событие B (промах во время того же выстрела) уже произойти не может, появление одного события исключает появление другого.

Два события A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ и $A+\overline{A}=\Omega$, т. е. в данном СЭ они несовместны и одно из них обязательно происходит.

Пример. СЭ: однократное бросание игральной кости. Событие A – появление четырех очков, событие B – появление четного числа очков, событие C – появление нечетного числа очков. События A и B совместны, причем $A \subset B$, поскольку если произошло событие A (выпало 4 очка – число четное), то произошло и событие B (появление четного числа очков). События A и C, а также B и C несовместны, так как одновременно произойти не могут. Событие $\overline{A}$ (A не произошло – произошло $\overline{A}$ – произошло не A) состоит в том, что выпало одно очко, или 2, или 3, или 5, или 6 очков. Событие $\overline{B}$ состоит в том, что не выпало четное число очков, следовательно, выпало нечетное число очков, т. е. произошло событие C: $\overline{B} = C$. Таким образом, события B и C противоположные.

Классическое определение вероятности

Если все элементарные исходы, связанные с СЭ, равновозможны, то такое ДВП называется ***классическим*** (в нем множество элементарных исходов может быть только *конечным*).

Классическое определение вероятности. Пусть с СЭ связано конечное число n равновозможных элементарных исходов. Тогда вероятность $P(A)$ события A, связанного с данным СЭ, определяется формулой

$$\boxed{P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{\text{Число исходов, благоприятствующих появлению события } A}{\text{Число всех элементарных исходов}}.}$$

Пример поучительный 1. N лиц случайным образом (*наудачу*) рассаживаются по N стульям за круглым столом. Найти вероятность того (событие A), что два конкретных лица: И. и М. окажутся рядом.

Решение 1. Элементарным событием будем считать конкретную посадку N лиц по N стульям. Любая их «пересадка» (*перестановка*) – новое элементарное событие. Число всех таких событий: $n = N!$, а благоприятствующих появлению события A: $m_A = 2N(N-2)!$ (у И. имеется N возможностей, у М. – две (слева или справа от И.), остальные $N-2$ могут рассаживаться произвольно). Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2N(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N-1}.$$

Решение 2. Элементарным событием будем считать конкретный выбор двух стульев из N стульев (с учетом порядка – номеров). Число всех таких событий: $n = A_N^2$, а благоприятствующих появлению события A: $m_A = 2N$ (у И. имеется N возможностей, у М. – две (слева или справа), остальные не учитываются). Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2N}{N(N-1)} = \frac{2}{N-1}.$$

Решение 3. Элементарным событием будем считать конкретный выбор И. и М. двух стульев из N стульев (без учета порядка). Число всех таких событий: $n = C_N^2$, а благоприятствующих появлению события A: $m_A = N$ (И. и М. «держатся за руки», и у них только N возможностей). Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{N}{N(N-1):2} = \frac{2}{N-1}.$$

Решение 4. Элементарным событием будем считать конкретную посадку М. (И. уже «нашел место»). Число всех таких событий: $n = N-1$, а благоприятствующих появлению события A: $m_A = 2$ (слева или справа от И.). Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2}{N-1}.$$

Приведенный пример говорит о том, что с СЭ может быть связано несколько пространств (множеств) элементарных событий, начиная от более «богатых» (много элементарных событий) и заканчивая более «бедными». Важно только, чтобы рассматриваемое событие выражалось (записывалось с помощью операций) через элементарные события.

Пример поучительный 2. Наудачу берутся два натуральных числа. Найти вероятность того (событие A), что их произведение четно.

Решение 1. Имеется два элементарных исхода: произведение четно и нечетно, а благоприятствующих исходов только 1. Тогда $P(A) = \frac{1}{2}$ (неверно).

Решение 2. Имеется три элементарных исхода: числа четные, числа нечетные и одно число четное, другое нечетное, а благоприятствующих исходов 2. Тогда $P(A) = \frac{2}{3}$ (неверно).

Решение 3. Имеется четыре элементарных исхода: {четное, четное}, {четное, нечетное}, {нечетное, четное} и {нечетное, нечетное}, а благоприятствующих исходов 3. Тогда $P(A)=\dfrac{3}{4}.$

В этом примере только в последнем случае элементарные исходы равновозможны и можно применять классическое определение вероятности. Пример допускает решение и в других пространствах элементарных исходов, но уже в рамках общего ДВП.

Пример. СЭ: однократное бросание правильной игральной кости. Событие A – появление четырех очков, событие B – появление четного числа очков. Найти вероятности событий A и B.

Решение. Элементарными исходами в этом опыте являются события $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. – всего 6 элементарных исходов. Эти исходы равновозможны, так как кость предполагается правильной. Событию A благоприятствует один элементарный исход ω_4, поэтому m = 1, n = 6, $P(A)=\dfrac{1}{6}$. Событию B благоприятствуют исходы $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ (если выпало 2, 4 или 6 очков, то выпало четное число очков), для события B имеем: m = 3, n = 6, $P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Пример. Наудачу брошены три правильные монеты. Какова вероятность того, что только на одной из них выпал герб?

Решение. Обозначим событие A = {только на одной монете выпал герб}.

События A_1 – выпал один герб и две цифры, A_2 – выпало два герба и одна цифра, A_3 – выпало три герба, A_4 – выпало три цифры – не являются равновозможными. Поэтому их нельзя использовать для вычисления вероятности по классическому определению вероятности.

Рассмотрим следующее множество элементарных исходов:

$$\Omega = \{\text{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ}\}.$$

Эти исходы равновозможны, n = 8. Событию A благоприятствуют m = 3 элементарных исхода: A = {ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ}. Тогда $P(A)=\dfrac{3}{8}.$

Пример. В коробке находится 8 красных и 12 черных карандашей. Какова вероятность того, что наугад вынутый карандаш будет красным?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что вынут красный карандаш. Ясно, что $n = 8 + 12 = 20$ – число всех равновозможных элементарных исходов (можно взять любой карандаш из 20). Число исходов, благоприятствующих событию A, равно $m = 8$ (так как красных карандашей 8). Следовательно, $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Пример. Какова вероятность того, что наудачу выбранный четырехзначный цифровой код состоит из различных цифр?

Решение. Обозначим событие A = {наудачу выбранный четырехзначный цифровой код состоит из различных цифр}. Определим число элементарных исходов. Каждая из четырех цифр кода, независимо от остальных, может быть выбрана 10 способами. На каждый из 10 способов выбора первой цифры приходится 10 способов выбора второй; каждый из $10 \cdot 10 = 100$ способов выбора первых двух цифр сочетается с 10 способами выбора третьей цифры. Учитывая 10 способов выбора четвертой цифры, получаем $n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$. Эти исходы равновозможны.

Число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, равно числу способов выбрать 4 различные цифры из 10 имеющихся и разместить их по четырем местам, т. е. числу A_{10}^4 размещений: $m = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Следовательно, $P(A) = \frac{5040}{10\,000} = 0{,}504$.

Пример. В урне содержится N шаров, из них M белых, остальные – черные. Наудачу вынимают n шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых m белых?

Решение. Имеет место следующая схема:

Имеем:	M белых	$+ (N - M)$ черных	$= N$ шаров
Извлечь:	m белых	$+ (n - m)$ черных	$= n$ шаров
$P(A) =$	C_M^m	$\cdot\ C_{N-M}^{n-m}$	$/\ C_N^n$

Число элементарных исходов – это число способов извлечь (выбрать) n шаров из имеющихся N шаров, т. е. C_N^n. Число благоприятствующих исходов – это число способов выбрать m шаров из имеющихся M белых шаров и при каждом этом выборе извлечь $n - m$ шаров из имеющихся $N - M$ черных шаров; число благоприятствующих исходов равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Обозначая через A – событие, вероятность которого надо найти, получаем:

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Аксиоматическое построение ТВ

В общем случае вероятностное пространство определяется в аксиоматике Колмогорова как тройка $\{\Omega, \sum, P\}$, где Ω – множество элементарных исходов; $\sum$ – алгебра (или σ-алгебра) событий; P – ***вероятность*** (вероятностная мера), определенная на классе событий $\sum$. Поясним сказанное.

Пусть рассматривается СЭ и Ω – множество элементарных исходов, связанное с данным СЭ. Говорят, что класс $\sum$ событий образует ***алгебру событий***, если выполнены следующие ***условия*** (аксиомы):

1) $\Omega \in \sum, \varnothing \in \sum$ (достоверное и невозможное события принадлежат классу $\sum$);

2) $A \in \sum, B \in \sum \Rightarrow A+B \in \sum, AB \in \sum$ (если A и B являются событиями, то их сумма $A + B$ и произведение AB также являются событиями);

3) $A \in \sum \Rightarrow \overline{A} \in \sum$.

Отсюда вытекает, что сумма и произведение конечного числа событий в алгебре событий также является событием, чего нельзя сказать об их бесконечном числе. Если и бесконечная сумма событий является событием, то такая алгебра событий называется ***σ-алгеброй***.

Пример. Класс событий $\sum$, состоящий только из достоверного и невозможного событий, образует алгебру событий, так как $\Omega+\varnothing=\Omega \in \sum$, $\Omega\varnothing=\varnothing \in \sum$, и все аксиомы алгебры событий выполнены.

На классе событий $\sum$ задается неотрицательная (аддитивная) функция – ***вероятность*** P, удовлетворяющая следующим ***аксиомам вероятности***:

1. $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \sum$.
2. $P(\Omega)=1$.
3. $P(A+B)=P(A)+P(B)$, если события A и B несовместны.

В дальнейшем будем считать класс событий $\sum$ σ-алгеброй, и аксиомы вероятности дополняются *расширенной аксиомой сложения*:

4. $A_1, ..., A_k, ... \in \sum \Rightarrow P(A_1+...+A_k+...) = P(A_1)+...+P(A_k)+...$,

если события $A_1, ..., A_k, ...$ попарно несовместны, т. е. $A_i A_k=\varnothing$ для $i \neq k$.

В качестве следствий этих аксиом можно получить следующие ***свойства вероятности***:

1. $P(\varnothing) = 0.$
2. $0 \le P(A) \le 1$ для любого события A.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ для любого события A.

Геометрические вероятности

В приложениях ТВ широко используется понятие ***геометрической вероятности***. СЭ заключается в том, что исследуемая точка случайным образом (наудачу) появляется в любой точке заданного измеримого геометрического множества Ω. *Событие A* состоит в том, что исследуемая точка появляется в подмножестве A множества Ω: $A \subset \Omega.$ Если S – геометрическая мера (длина, площадь, объем) всей области, а S_A – геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует появлению данного события A, то вероятность этого события определяется формулой

$$\boxed{P(A) = \frac{S_A}{S}.}$$

Нетрудно видеть, что так устроенная вероятность удовлетворяет всем аксиомам вероятности, а тройка $\{\Omega, \Sigma, P\},$ где класс событий Σ порождается множеством всех подмножеств множества Ω, является примером вероятностного пространства в смысле Колмогорова, которое не укладывается в схему ДВП.

Пример. На отрезке между 30-м и 80-м километром произошел обрыв телефонного кабеля. Найти вероятность того, что разрыв произошел в наиболее труднодоступной области между 60-м и 70-м километром (предполагается, что обрыв мог произойти в любом месте и вероятность разрыва на данном участке пропорциональна длине этого участка).

Решение. Длина всего участка (отрезка) равна $l = 80 - 30 = 50$, а длина труднодоступной области равна $l_A = 70 - 60 = 10$, поэтому $P(A) = \frac{l_A}{l} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$

Задача о встрече. Два лица: И. и М. договорились встретиться в течение часа, в пределах которого они приходят случайным образом (наудачу), причем И. ждет 20, а М. – 10 мин. Найти вероятность того (событие A), что они встретятся.

Решение. Пусть x – время прихода И., а y – время прихода М. Тогда $(x,\ y)$ – точка, которая наудачу появляется во множестве $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}$ с геометрической мерой – площадью $S = 60 \cdot 60 = 3600$. Чтобы встреча состоялась, нужно, чтобы каждое лицо пришло не позже, чем ушло после ожидания другое, что равносильно геометрическому условию (рис. 9.1):

$$(x, y) \in A = \{(x, y):\ x \le y + 10,\ y \le x + 20,\ 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\},$$

причем площадь S_A благоприятствующей событию A области равна площади S квадрата Ω за вычетом площадей двух прямоугольных треугольников с катетами по 40 и 50 единиц. Тогда

$$P(A) = \frac{S_A}{S} = \frac{60 \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50}{60 \cdot 60} = \frac{31}{72} \approx 0{,}43.$$

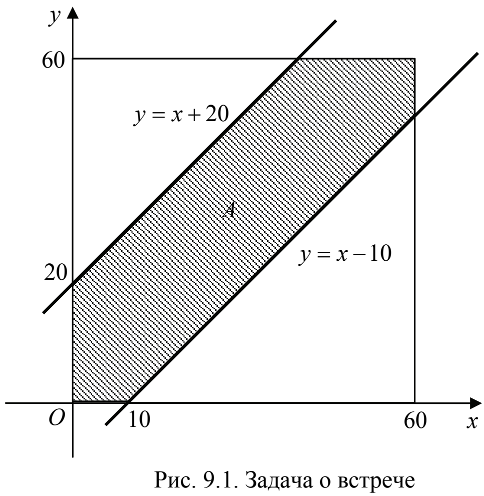


Рис. 9.1. Задача о встрече

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример (*геометрическая интерпретация операций над событиями*). СЭ: точка случайным образом появляется во множестве Ω – достоверное событие, событие A (аналогично B) состоит в том, что точка появляется во множестве A (соответственно B). Ниже приводится геометрическая интерпретация событий $\overline{A},\ A + B,\ AB$ (рис. 9.2).

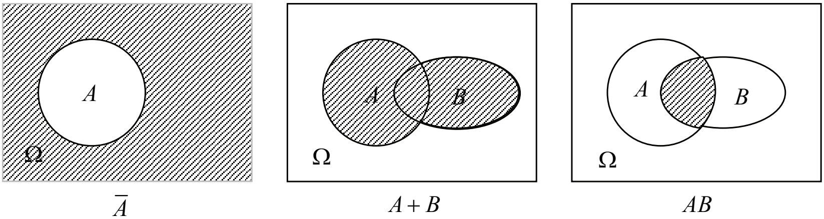


Рис. 9.2. Геометрическая интерпретация операций над событиями

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения: для любых событий A и B

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).}$$

Действительно, это вытекает из представлений событий $A + B$ и B посредством суммы несовместных событий: $A+B=A+\overline{A}B$, $B=AB+\overline{A}B$ и применением аксиомы 3 сложения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B),\text{ если } A \text{ и } B \text{ – несовместны,}$$

в частности, $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Вероятность $P(A\,|\,B)$ появления в СЭ события A, если известно, что в этом СЭ произошло событие B, – ***условная вероятность*** – определяется соотношением

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Отсюда следует ***теорема умножения вероятностей***:

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=P(B)P(A\,|\,B).}$$

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из них не зависит от появления другого, точнее, $P(A\,|\,B)=P(A), P(B\,|\,A)=P(B).$ В противном случае события A и B называются ***зависимыми***.

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(AB)=P(A)P(B),\text{ если } A \text{ и } B \text{ независимы.}$$

Пример. Из коробки, в которой 8 красных и 12 черных карандашей, трижды наугад извлекают по одному карандашу. Найти вероятность того, что все 3 раза будут извлечены черные карандаши, если выборка производится: а) без возвращения; б) с возвращением.

Решение. Обозначим события: A = {извлекли 3 раза черный карандаш}; A_1 = {первый раз извлекли черный карандаш}; A_2 = {второй раз извлекли черный карандаш}; A_3 = {третий раз извлекли черный карандаш}. Тогда $A = A_1 A_2 A_3$.

а) по теореме умножения вероятностей получаем:

$$P(A) = P(A_1A_2)\,P(A_3 \mid A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2).$$

Используя классическое определение вероятности, вычисляем: $P(A_1)=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$; $P(A_2 \mid A_1)=\dfrac{11}{19}$, так как после первого извлечения в коробке оставалось $n = 19$ карандашей, из которых (когда произошло событие A_1) $m = 11$ черных карандашей; $P(A_3 \mid A_1A_2)=\dfrac{10}{18}=\dfrac{5}{9}$, поскольку после второго извлечения оставалось $n = 18$ карандашей, из которых $m = 10$ черных (когда произошли события A_1 и A_2). Следовательно,

$$P(A)=\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}=\frac{11}{57}\approx 0{,}193;$$

б) в случае выборки с возвращением события A_1, A_2 и A_3 независимы, так как при каждом извлечении в коробке оказывается $n = 20$ карандашей, из которых $m = 12$ черных. Поэтому

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0{,}216.$$

При решении задач с применением теорем сложения и умножения вероятностей полезно выразить событие A, вероятность которого находится, и противоположное ему событие $\overline{A}$ через события, вероятности которых известны, а затем вычислить $P(A)$ непосредственно или по формуле $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ в зависимости от того, что удобнее.

Пример. Студент должен сдать за неделю три зачета (независимо друг от друга). Вероятность сдачи этим студентом зачета по первому предмету равна 0,8, по второму – 0,6, по третьему – 0,5. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) один (только один) зачет; б) хотя бы один зачет; в) по крайней мере два зачета.

Решение. Обозначим события: A = {студент сдаст один зачет}, B = {студент сдаст хотя бы один зачет}, C = {студент сдаст по крайней мере два зачета}. Известны вероятности событий A_i = {студент сдаст зачет по i-му предмету} ($i = 1, 2, 3$): $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}5$.

В результате испытания может произойти одно из четырех несовместных событий B_i = {студент сдаст ровно i зачетов} ($i = 0, 1, 2, 3$). Представим события A, B, C и/или $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ через эти события.

а) событие A означает, что студент сдаст ровно один зачет, а два не сдаст, и совпадает с событием B_1, т. е. $A = B_1$. Выразим событие A через события A_1, A_2, A_3:

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$

(либо студент сдаст только первый зачет (произойдет $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$), либо студент сдаст только второй зачет (произойдет $\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$), либо студент сдаст только третий зачет (произойдет $\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$)). Поскольку слагаемые попарно несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы и $P(\overline{A}_1) =$ $= 1 - P(A_1) = 0{,}2$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0{,}4$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 0{,}5$, то, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем:

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}46;$$

б) событие $B = B_1 + B_2 + B_3$ означает, что студент сдаст либо только один зачет, либо только два зачета, либо все три зачета. Для вычисления вероятности этого события удобнее перейти к противоположному событию $\overline{B} = B_0$ – студент не сдаст ни одного зачета. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}96;$$

в) событие C произойдет в том случае, если студент сдаст ровно два зачета (осуществится событие B_2) или все три зачета (осуществится событие B_3), т. е. $C = B_2 + B_3$. Событие $\overline{C}$ означает, что студент сдаст только один зачет (осуществится событие B_1) или не сдаст ни одного зачета (осуществится событие B_0), т. е. $\overline{C} = B_0 + B_1$. Выразим эти события через A_1, A_2, A_3:

$$C = B_2 + B_3 = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3,$$

$$\overline{C} = B_0 + B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3,$$

откуда убеждаемся в равносильности использования событий C или $\overline{C}$. Поэтому

$$P(C)=0,2\cdot 0,6\cdot 0,5+0,8\cdot 0,4\cdot 0,5+0,8\cdot 0,6\cdot 0,5+0,8\cdot 0,6\cdot 0,5=0,7.$$

Формула полной вероятности

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу*** для данного СЭ, если:

1) $A_i A_j = \varnothing$ для $i \neq j$;

2) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$, т. е. а) они попарно несовместны и б) в результате СЭ обязательно появится одно из них.

Пример. СЭ: однократное бросание игральной кости. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ – соответственно появление одного очка, двух и т. д. Эти события образуют полную группу.

Отметим, что для одного и того же СЭ можно рассматривать различные полные группы событий, например события A и $\overline{A}$, где A – любое событие, связанное с СЭ, всегда образуют полную группу событий.

Если событие A может наступить при появлении одного из n попарно несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность события A можно вычислить по ***формуле полной вероятности***:

$$\boxed{P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)+\ldots+P(H_n)P(A\,|\,H_n),}$$

причем $P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1.$

Пример. На трех автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что 30% продукции производится первым станком, 25% – вторым и 45% − третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором − 0,988 и на третьем − 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках нерассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь не соответствует стандарту.

Решение. Пусть событие A = {наудачу выбранная деталь не соответствует стандарту}. Известны вероятности события A при условии, что деталь изготовлена на первом, втором, третьем станках (*условные вероятности*). В этом случае для вычисления вероятности (*безусловной*) события A используют формулу полной вероятности.

Введем гипотезы: H_i = {выбранная деталь изготовлена на i-м станке} (i = 1, 2, 3). Из условий задачи легко находятся следующие вероятности для некоторой детали, выбранной случайно из всей дневной продукции:

$P(H_1) = 0{,}3$; $P(A \mid H_1) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$;
$P(H_2) = 0{,}25$; $P(A \mid H_2) = 1 - 0{,}988 = 0{,}012$;
$P(H_3) = 0{,}45$; $P(A \mid H_3) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$.

Контроль: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что наудачу взятая деталь не соответствует стандарту:

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}012 + 0{,}45 \cdot 0{,}02 = 0{,}015.$$

Пример. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из урны наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым, если все возможные предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны.

Решение. Обозначим событие A = {извлечен белый шар}. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: H_1 = {0 белых шаров}, H_2 = {1 белый шар}, H_3 = {2 белых шара}. Эти гипотезы образуют полную группу событий. Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице, то вероятность каждой из гипотез равна $\frac{1}{3}$, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Находим условные вероятности $P(A \mid H_i)$, используя классическое определение вероятности. Число элементарных исходов равно $n = 2 + 1 = 3$ (изначально в урне было два шара, затем добавили еще один). В случае гипотезы H_1 в урну, в которой не было белых шаров, опустили один белый шар, поэтому $m = 1$, $P(A \mid H_1) = \frac{1}{3}$. При выполнении гипотезы H_2 в урне имеется $m = 1 + 1 = 2$ белых шара, $P(A \mid H_2) = \frac{2}{3}$. При выполнении гипотезы H_3 имеется $m = 2 + 1 = 3$ белых шара, $P(A \mid H_3) = \frac{3}{3} = 1$.

Зная вероятности гипотез и условные вероятности, вычисляем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Пример. Два автомата производят одинаковые детали, которые сбрасываются на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй − 84%. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

Решение. Обозначим событие A = {наудачу взятая деталь отличного качества}. Известны условные вероятности события A при условии, что деталь изготовлена первым или вторым автоматом. Можно сделать два предположения (гипотезы): H_i = {деталь произведена i-м автоматом} (i = 1, 2). Тогда $P(A \mid H_1) = 0,6$, $P(A \mid H_2) = 0,84$.

Найдем вероятности гипотез. Пусть второй автомат производит k деталей, тогда первый производит $2k$ деталей − всего $3k$ деталей, поэтому $P(H_1) = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$, $P(H_2) = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$. Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна $P(A) = \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68.$

Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть проводится n *независимых* (в совокупности) *испытаний* (СЭ), в каждом из которых возможно только два исхода: A – *успех* и $\overline{A}$ – *неуспех*, причем вероятность наступления успеха в каждом испытании постоянна и равна p. Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

В схеме Бернулли вероятность $P_n(m)$ наступления m успехов в n независимых испытаниях – вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно m раз, вычисляется по ***формуле Бернулли***:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},}$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $n! = n(n-1)...2 \cdot 1$, $0! = 1$, $q = 1 - p = P(\overline{A})$ – вероятность неуспеха в одном испытании.

Вероятность того, что событие A в схеме Бернулли появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, равна $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum\limits_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится хотя бы один раз, равна $P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

Пример. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) ровно четыре; б) не менее четырех.

Решение. а) мы имеем схему Бернулли с $n = 5$ испытаниями (посеяно пять семян). Событие $A = \{$семя взошло$\}$. По условию задачи $p = P(A) = 0{,}9$, тогда $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомую вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}32805;$$

б) искомое событие состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P_5(m \geq 4) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое найдено. Для вычисления второго слагаемого применяем снова формулу Бернулли:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = 1 \cdot 0{,}9^5 \cdot 1 = 0{,}59049.$$

Следовательно, $P_5(m \geq 4) = 0{,}32805 + 0{,}59049 = 0{,}91854$.

Пример. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. По мишени производится шесть независимых выстрелов. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Пусть событие $B = \{$хотя бы одно попадание$\}$. Задачу удобнее решать при помощи нахождения вероятности противоположного события, т. е. события $\overline{B} = \{$ни одного попадания в мишень$\}$. В данном примере $n = 6$, $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 0{,}6$. Применяя формулу Бернулли, получаем:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) = 1 - 0{,}6^6 \approx 0{,}953.$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

При **больших** значениях n для вычисления вероятностей $P_n(m)$ используются приближенные формулы Пуассона и Муавра – Лапласа.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний **крайне мала**, а число испытаний n **достаточно велико**, то вероятность $P_n(m)$ вычисляется приближенно по ***формуле Пуассона*** (теорема Пуассона):

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \ a = np.$$

Формулу Пуассона применяют, когда событие A является *редким*, но количество испытаний n *велико* и среднее число успехов $a = np$ *незначительно* ($a \le 10$).

Пример. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что на протяжении 1 мин позвонят: а) ровно три абонента; б) менее трех абонентов; в) более трех абонентов; г) хотя бы один абонент.

Решение. По условию $n = 100$, $p = 0{,}01$. Поскольку число n велико, вероятность p мала, рассматриваемые события (звонки абонентов) независимы, то применима формула Пуассона. Найдем $a = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$.

а) определяем вероятность того, что позвонят ровно три ($m = 3$) абонента:

$$P_{100}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0{,}0613;$$

б) находим вероятность того, что позвонят менее трех абонентов, т. е. либо два, либо один, либо ни одного:

$$P_{100}(m < 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) \approx \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} =$$

$$= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2} e^{-1} \approx \frac{5}{2} \cdot 0{,}36788 = 0{,}9197;$$

в) определяем вероятность $P_{100}(m > 3)$ того, что позвонят более трех абонентов. События $\{m > 3\}$ = {позвонят более трех абонентов} и $\{m \le 3\}$ = {позвонят не более трех абонентов} – противоположные, поэтому

$$P_{100}(m > 3) = 1 - P_{100}(m \le 3) = 1 - (P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3)).$$

Пользуясь результатами пунктов а) и б), получаем:

$$P_{100}(m > 3) \approx 1 - (0{,}9197 + 0{,}0613) = 0{,}019;$$

г) находим вероятность $P_{100}(m \ge 1)$ того, что позвонит хотя бы один абонент. События $\{m \ge 1\}$ = {позвонит хотя бы один абонент} и $\{m < 1\}$ = {ни один абонент не позвонит} – противоположные, поэтому

$$P_{100}(m \geq 1) = 1 - P_{100}(m < 1) = 1 - P_{100}(0) \approx 1 - e^{-1} \approx 0,6321.$$

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A близка к 1, а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(m)$ также можно использовать формулу Пуассона (считая успехом событие $\overline{A}$).

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний **существенно отличается от 0 и 1** (близко к $\frac{1}{2}$), а число испытаний n **достаточно велико**, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ применяют приближенную ***локальную формулу Муавра – Лапласа*** (*локальная теорема Муавра – Лапласа*):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$, на практике обычно полагают $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4$.

Если в схеме Бернулли вероятность p **существенно отличается от 0 и 1**, а n **достаточно велико**, то вероятность $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее m_1 раз, но менее m_2 раз, вычисляется по ***интегральной формуле Муавра – Лапласа*** (*интегральная теорема Муавра – Лапласа*):

$$P_n(m_1 \leq m < m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, на практике обычно полагают $\Phi(x) \approx 0,5$ при $x \geq 5$.

Для функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ составлены таблицы значений (см. табл. П1 и П2). Формулы Муавра – Лапласа, как правило, используются, если $0,1 < p < 0,9$, и дают хорошие результаты, если $npq \geq 20$.

Пример. Вероятность появления события A в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие A в этих испытаниях наступит: а) ровно 330 раз; б) не менее 330 и не более 375 раз.

Решение. а) по условию задачи n = 600 – велико, p = 0,6 – не очень мало, $q = 1 - p = 0{,}4$, m = 330. Применим локальную формулу Муавра – Лапласа. Определяем значение x:

$$x = \frac{330 - 600 \cdot 0{,}6}{\sqrt{600 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{30}{12} = -2{,}5.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) \approx$ $\approx$ 0,0175 (табл. П1). С помощью локальной формулы Муавра – Лапласа вычисляем искомую вероятность:

$$P_{600}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \cdot 0{,}0175 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}0015;$$

б) в этом случае применима интегральная формула Муавра – Лапласа. По условию задачи n = 600, p = 0,6, m_1 = 330, m_2 = 375. Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{330 - 600 \cdot 0{,}6}{\sqrt{600 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -2{,}5, \quad x_2 = \frac{375 - 600 \cdot 0{,}6}{\sqrt{600 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 1{,}25.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) \approx -0{,}4938$, $\Phi(1{,}25) \approx 0{,}3944$ (табл. П2). По интегральной формуле Муавра – Лапласа искомая вероятность:

$$P_{600}(330 \le m \le 375) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}3944 - (-0{,}4938) = 0{,}8882.$$

9.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какая формула комбинаторики используется для подсчета числа способов выбрать из n различных элементов m элементов без учета порядка?
2. Запишите формулу комбинаторики, которая используется для подсчета числа способов выбрать из n различных элементов m элементов и разместить их по m местам (с учетом порядка).
3. Чему равен 0!?
4. Дайте определение достоверного события. Приведите пример.
5. Что такое невозможное событие? Приведите пример.
6. Какие события называются случайными?
7. Что называется суммой событий?
8. Приведите геометрическую интерпретацию понятия суммы двух событий.

9. Что называется произведением событий?

10. Дайте геометрическую интерпретацию понятия произведения двух событий.

11. Может ли сумма двух событий совпадать с их произведением?

12. Какие события называются противоположными?

13. Чему равна сумма противоположных событий?

14. Чему равно произведение противоположных событий?

15. Как связаны вероятности противоположных событий?

16. Какие значения могут принимать вероятности случайных событий?

17. Чему равна вероятность достоверного события?

18. Вероятность события равна 1. Следует ли из этого, что событие достоверное?

19. Чему равна вероятность невозможного события?

20. Вероятность события равна 0. Следует ли из этого, что событие невозможное?

21. Сформулируйте классическое определение вероятности.

22. В каких случаях используется геометрическая вероятность?

23. Запишите теорему сложения вероятностей двух совместных событий.

24. Напишите теорему сложения вероятностей несовместных событий.

25. Сформулируйте теорему умножения вероятностей зависимых событий.

26. Запишите теорему умножения вероятностей независимых событий.

27. Что называется полной группой событий? Приведите примеры.

28. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

29. Запишите формулу полной вероятности.

30. Дайте определение схемы Бернулли. Приведите примеры опытов, которые приводят к схеме Бернулли.

31. Вероятность чего определяется по формуле Бернулли?

32. Запишите формулу Бернулли.

33. С помощью каких формул оцениваются приближенно вероятности в схеме Бернулли при большом числе испытаний?

34. При каких условиях для оценки вероятностей в схеме Бернулли используется формула Пуассона?

35. Запишите формулу Пуассона.

36. При каких условиях для оценки вероятностей в схеме Бернулли используется локальная формула Муавра – Лапласа?

37. Приведите локальную формулу Муавра – Лапласа.

38. При каких условиях для оценки вероятностей в схеме Бернулли используется интегральная формула Муавра – Лапласа?

39. Запишите интегральную формулу Муавра – Лапласа.

40. Какими свойствами обладает функция Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$?

41. Перечислите свойства, которыми обладает функция Лапласа $\Phi(x)$?

9.1.3. Практический минимум

1. а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3? б) Сколько среди них нечетных чисел?

2. а) Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? б) Сколько среди них таких, которые состоят из различных цифр?

3. а) Сколько существует пятизначных чисел? Сколько среди них таких, которые: б) начинаются цифрой 2 и оканчиваются цифрой 4; в) не содержат цифры 5; г) кратны 5?

4. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на правую руку и одну – на левую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

5. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ТЕОРИЯ»?

6. Сколькими способами можно переставить 8 книг на полке?

7. Сколькими способами можно расставить 5 различных поездов на 8 запасных путях так, чтобы на каждом пути стояло не более одного поезда?

8. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из 3 равных горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал 5 различных цветов?

9. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на 1 сентября?

10. Сколько существует способов расстановки 10 спортсменов по 4 этапам эстафеты?

11. Сколькими способами можно выбрать 3 дежурных из группы в 25 человек?

12. Экзаменационный билет состоит из 3 вопросов. Сколько различных билетов можно составить из 20 вопросов? (Порядок вопросов в билете не учитывается.)

13. Сколько бригад по 6 человек можно составить из 12 человек?

14. а) Из спортивного клуба, насчитывающего 20 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами это можно сделать? б) Сколькими способами можно составить команду из 4 человек этого клуба для участия в эстафете 100 + 200 + 400 + 800 м?

15. Сколько существует способов выбрать 2 парня и 3 девушки из группы, в которой 6 парней и 5 девушек?

16. а) Сколькими способами можно выбрать из слова «ЛОГАРИФМ» три согласных и две гласных буквы? б) Сколько способов сделать такой выбор, если среди выбранных букв есть буква Ф?

17. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из 3 нападающих, 3 полузащитников, 4 защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

18. Сколько различных буквосочетаний можно образовать из букв слова: а) «МИСС»; б) «МИССИС»?

19. Сколько существует четырехзначных чисел, состоящих из различных цифр?

20. Сколькими способами из 10 различных цветов можно составить букет, содержащий нечетное число цветов?

21. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел забирать, обнаружил, что забыл код. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный код. Пассажир помнит только, что в коде присутствовали числа 23 и 47. Какое наибольшее число вариантов кода нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

22. Брошен правильный игральный кубик. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет: а) 6 очков; б) нечетное число очков; в) не менее 3 очков.

23. В коробке 20 жетонов с номерами от 1 до 20. Какова вероятность того, что наудачу вынутый жетон имеет номер: а) 15; б) 1 или 10 или 20; в) 35 или 10?

24. В урне 10 красных, 15 зеленых, 20 синих и 25 желтых шаров. Вынули один шар. Определить вероятность того, что этот шар: а) зеленый; б) зеленый или желтый; в) белый; г) цветной.

25. Какова вероятность, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным.)

26. Из 33 карточек с различными буквами русского алфавита наугад взяли одну. Какова вероятность того, что на ней написана гласная буква?

27. Найти вероятность угадать наудачу взятое двузначное число, если известно, что это число не делится на 5.

28. В коробке четыре одинаковые карточки с числами 3, 5, 7, 8. Из коробки последовательно, наугад вынимают две карточки, не возвращая их обратно. Рассмотрим следующие события: A = {на обеих карточках нечетные числа}, B = {число на первой карточке больше числа на второй}, C = {первой вынута карточка с числом 8}, D = = {сумма чисел – четное число}, E = {оба числа четные}. Требуется:

а) составить пространство элементарных событий Ω;

б) определить элементарные события, благоприятствующие появлению рассматриваемых событий;

в) вычислить вероятности рассматриваемых событий;

г) определить, являются ли совместными события A и B; A и C; A и D; A и E;

д) описать словами и посредством элементарных событий, в чем состоят события $\overline{B}$, $\overline{E}$.

29. Наудачу подбросили две правильные игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A = {число очков на обеих костях совпадает}, B = {число очков на первой кости больше, чем на второй}, C = {сумма очков больше двух}, D = {хотя бы на одной кости появится 5 очков}, E = {сумма очков не менее 6}. Записать $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$. Являются ли совместными события A и C; $\overline{C}$ и D?

30. Брошены наудачу две правильные игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков не более 6?

31. На одной полке наудачу расставлены 8 книг. Найти вероятность того, что книги стоят в алфавитном порядке.

32. Слово «РЕМОНТ» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешивают, затем наугад вытаскивают и раскладывают в линию в порядке вынимания. Какова вероятность получения при этом слова «РЕМОНТ»?

33. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 4 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Определить вероятность того, что набраны нужные цифры.

34. Найти вероятность угадать трехзначный код, если известно, что он состоит из различных цифр.

35. В группе из 25 студентов 10 учатся на «отлично», 8 на «хорошо» и 7 на «удовлетворительно». Найти вероятность того, что, выбирая наугад, вызвали 3 отличника.

36. В партии из 50 изделий 5 окрашенных. Из партии выбирают наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий ровно 2 изделия окажутся окрашенными.

37. В урне 5 черных и 3 белых шара. Наугад вынули 3 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 черных.

38. В стройотряде 10 юношей и 5 девушек. Для участия в реставрации замка наудачу набирается бригада из 5 человек. Какова вероятность того, что среди них будет 3 девушки и 2 юноши?

39. В коробке находятся одинаковые кубики, занумерованные от 1 до 9. Наудачу извлекают 4 кубика из коробки. Определить вероятность того, что номера извлеченных кубиков – нечетные числа.

40. Студент из 30 вопросов 15 знает хорошо и 10 удовлетворительно. Найти вероятность того, что из 3 наудачу взятых вопросов билета 2 он знает хорошо и 1 не знает.

41. В коробке из 25 изделий 15 высшего качества. Наудачу извлекаются 3 изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них высшего качества; б) все три изделия высшего качества; в) хотя бы одно изделие высшего качества.

42. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она каждому выдаст его собственную шляпу.

43. Телефонную книгу раскрыли наудачу и выбрали наугад номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из семи цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: A = {четыре последние цифры телефонного номера одинаковы}, B = {все цифры различны}, C = {номер начинается с цифры 7}, D = {номер содержит три цифры 5, две цифры 6 и две цифры 1}. Являются ли совместными события A и C; B и D?

44. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 расставлены случайно. Определить вероятность того, что цифры 2 и 5 расположены рядом в порядке возрастания.

45. Случайным образом раскладывают 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов в 3 пакета так, чтобы в каждом пакете было одинаковое количество фруктов. Найти вероятность того, что в каждом пакете будет по одному апельсину.

46. Две монеты радиуса r занимают произвольное положение, не пересекаясь, внутри круга радиуса R. В данный круг наугад бросают точку. Определить вероятность того, что эта точка попадает на одну из монет.

47. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $^1/_5$.

48. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. В диск случайным образом произведен выстрел. Установить вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов, если вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры, и пуля в диск обязательно попадет.

49. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Определить вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

50. Два лица условились встретиться в определенном месте между 17 и 18 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

51. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равно 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересекать ни одну линию.

52. В первом ящике находятся шары с номерами 1, 3, 4, а во втором – с номерами 1, 6, 8. Из каждого ящика наугад вынули по одному шару. Рассмотрим следующие события: $A = \{$сумма номеров вынутых шаров не меньше 7$\}$, $B = \{$хотя бы один из номеров вынутых шаров 1$\}$, $C = \{$произведение номеров вынутых шаров – четное число$\}$, $D = \{$вынули шары с номерами, не большими 2$\}$. Найти вероятности событий: $A + B$, $A + C$, $A + D$, BD.

53. В группе из 27 туристов 17 человек владеют английским языком, 6 – французским, а 2 – обоими языками. Определить веро-

ятность того, что случайно выбранный из группы турист владеет по крайней мере одним из этих языков.

54. В первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй – 3 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что вынуты: а) 2 белых шара; б) хотя бы один черный шар?

55. Монета случайным образом подбрасывается 2 раза. Найти вероятность того, что герб появится: а) 2 раза; б) только один раз; в) хотя бы один раз.

56. В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара, во втором – 2 белых, 6 красных и 4 синих шара. Из каждого ящика наудачу вынули по шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров нет синих?

57. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено два независимых выстрела. Какова вероятность: а) двух попаданий; б) одного промаха; в) хотя бы одного попадания?

58. В двух партиях процент доброкачественных изделий составляет соответственно 97 и 96%. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) одно доброкачественное и одно бракованное; б) два бракованных; в) хотя бы одно бракованное?

59. Студент случайным образом разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, соответственно равны 0,4; 0,5; 0,6. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) не менее чем в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

60. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5, третьим – 0,4. Каждый выстрелил по одному разу. Определить вероятность того, что хотя бы один стрелок попал в цель.

61. Охотник произвел три независимых выстрела по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,8 и после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет ровно 2 раза.

62. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,9. Определить вероятность того, что: а) откажут два станка; б) откажет хотя бы один станок.

63. Нужная сборщику деталь независимым образом может находиться в первом, втором, третьем, четвертом ящиках с вероятностями, которые соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

64. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком равна 0,62, вторым – 0,49. Первый сделал 2 независимых выстрела, а второй – 3 независимых выстрела. Определить вероятность того, что цель не поражена.

65. На предприятии брак составляет в среднем 1,5% от общего выпуска изделий. Среди годных изделий первый сорт составляет 80%. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется первого сорта, если оно взято из общей массы изготовленной продукции?

66. В урне 7 белых и 8 черных шаров. Дважды наудачу вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что оба шара черные.

67. Из 20 вопросов, входящих в программу экзамена, студент подготовил 17. Используя теорему умножения вероятностей, определить вероятность того, что студент ответил правильно на экзаменационный билет, состоящий из трех наудачу выбранных вопросов.

68. Из 6 букв разрезной азбуки составлено слово «АНАНАС». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в случайном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «АНАНАС».

69. На 11 отдельных карточках написаны цифры 0, 0, 0, 1, 1, 3, 5, 6, 6, 8, 9. Все карточки перемешивают, после чего наугад берут 7 карточек и раскладывают их в ряд. Определить вероятность того, что будет получено число 1603051.

70. Несколько раз независимым образом бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при третьем бросании?

71. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,46, из второго – 0,6. Найти вероятность поражения цели, если из каждого орудия независимо выстрелили по одному разу.

72. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, наудачу предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из тех 40, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдать коллоквиум?

73. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в четыре места.

74. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет произведено не более трех выстрелов.

75. Наудачу бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что: а) на всех костях выпадет нечетное число очков; б) на всех костях выпадет одинаковое число очков; в) хотя бы на одной из них появится 5 очков?

76. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно наудачу извлекают шары (не возвращая обратно). Выигрывает тот, кто первым извлечет белый шар. Вычислить вероятность выигрыша для каждого из участников.

77. Две фирмы поставляют в магазин ученические тетради. Поставки первой фирмы составляют 40%, а второй – 60% от общего количества. Вероятность брака среди продукции первого поставщика равна 0,01, второго – 0,02. Найти вероятность того, что взятая наугад тетрадь не содержит брака.

78. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска стандартного изделия первым предприятием равна 0,9, вторым – 0,85. Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется нестандартным.

79. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40% всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства составляет 90%, второго – 85%, третьего – 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдет.

80. Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки равна 99%, необработанных – 85%. Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдет?

81. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность второго автомата в 3 раза больше производительности первого. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, а вторым – 0,95. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

82. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в количественном отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что

телевизоры, поступающие от первого, второго и третьего поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока в 98, 88 и 92% случаев соответственно. Найти вероятность того, что приобретенный в этой фирме телевизор потребует ремонта на протяжении гарантийного срока.

83. На сборку поступило 50 деталей от первого станка, 100 от второго и 150 от третьего. Первый станок дает 2%, второй – 1% и третий – 2% брака. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь окажется небракованной.

84. Из 1000 ламп 250 принадлежат первой партии, 350 – второй, остальные – третьей. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Найти вероятность того, что она бракованная.

85. Из 5 винтовок, из которых 3 снайперские, наудачу выбирается одна и из нее производится выстрел. Определить вероятность попадания в цель, если вероятность попадания из снайперской винтовки равна 0,95, а из обычной – 0,7.

86. В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжников составляет 0,8, для велосипедистов – 0,7, для бегунов – 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

87. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 8 стандартных. Из случайно выбранного ящика наудачу взята одна деталь. Какова вероятность того, что она оказалась стандартной?

88. В первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Из наугад выбранной урны вынимают шар. Оценить вероятность того, что этот шар белый.

89. На рис. 9.3 изображена схема дорог.

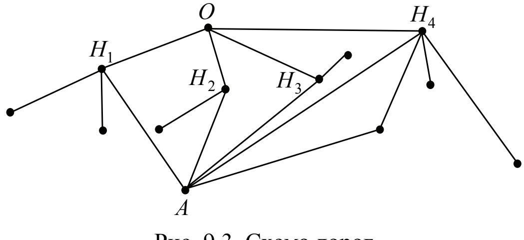


Рис. 9.3. Схема дорог

Туристы вышли из пункта O, выбирая наугад одну из дорог. Какова вероятность того, что они попадут в пункт A?

90. В магазине продается 4 прибора. Вероятности того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны 0,91; 0,9; 0,95; 0,94. Найти вероятность того, что взятый наудачу прибор выдержит гарантийный срок.

91. Мышь может выбрать наугад один из 5 лабиринтов. Известно, что вероятности ее выхода из разных лабиринтов за 3 мин равны соответственно 0,5; 0,6; 0,2; 0,1; 0,1. Какова вероятность того, что мышь выберется из лабиринта через 3 мин?

92. Из трамвайного парка в случайном порядке выходят 4 трамвая маршрута № 1 и 8 трамваев маршрута № 2. Определить вероятность того, что второй из вышедших на линию трамваев будет иметь № 1.

93. В урне 10 шаров, из них 8 белых. Наудачу вынули один шар, а затем еще один. Какова вероятность того, что второй раз вынули белый шар?

94. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белые; во второй урне – 20 шаров, из них 4 белые. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

95. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Определить вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

96. В урну, содержащую 3 шара, опустили белый шар, после чего наудачу извлекли 2 шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары окажутся белыми. (Любые предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны.)

97. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на 2 вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный вопрос из другого билета, если билеты на экзамене предлагаются случайным образом и не повторяются.

98. По цели производится 3 независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,1, при втором – 0,2, при третьем – 0,3. Для поражения цели достаточно двух попаданий.

При одном попадании цель поражается с вероятностью 0,6. Найти вероятность поражения цели.

99. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. По мишени производится 7 независимых выстрелов. Определить вероятность того, что в мишень попали: а) ровно 4 раза; б) не менее 5 раз; в) хотя бы один раз.

100. При приеме сообщений каждый символ независимо от других искажается с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что слово из 5 букв будет передано правильно?

101. Игральную кость независимым образом подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза появится четное число очков.

102. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Случайным образом вынули подряд 6 шаров, возвращая каждый раз вынутый шар в урну. Какова вероятность того, что среди 6 вынутых шаров окажется ровно 2 черных?

103. Монету независимым образом подбрасывают 5 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет менее 4 раз.

104. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Какова вероятность того, что из четырех наудачу купленных билетов выиграет: а) один билет; б) хотя бы один билет?

105. В среднем 20% пакетов акций на независимых аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 6 пакетов акций в результате торгов по первоначальной цене будет продано не более 4 пакетов.

106. Доля плодов, пораженных болезнью, составляет 25%. Случайным образом выбирается 8 плодов. Определить вероятность того, что в выборке окажется не менее двух пораженных болезнью плодов.

107. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятности отказа каждого элемента за время t одинаковы и равны 0,2. Найти вероятность отказа этого устройства за время t, если для этого достаточно, чтобы отказали не менее чем 2 элемента.

108. Что вероятнее – выиграть у равносильного противника в игре, в которой нет ничейных исходов, не менее четырех партий из пяти или не менее пяти партий из восьми?

109. Вероятность того, что стрелок попадет хотя бы один раз при трех независимых выстрелах, равна 0,992. Определить вероятность попадания в цель при одном выстреле, предполагая ее постоянной при каждом выстреле.

110. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью 0,01 может иметь дефект. При каком объеме случайной выборки вероятность того, что в выборке будет хотя бы одно дефектное изделие, превышает 0,95?

111. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий выживет: а) ровно 3 бактерии; б) не менее 3 бактерий; в) более 3 бактерий; г) хотя бы одна бактерия, если вероятность выживания равна 0,004.

112. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,002. Определить вероятность того, что среди 500 независимым образом произведенных изделий: а) не окажется бракованных; б) хотя бы одно бракованное; в) не более двух бракованных.

113. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,005. Поступило 1000 независимых вызовов. Оценить вероятность ровно пяти «сбоев».

114. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

115. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Коммутатор учреждения обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность, что на протяжении часа позвонят менее 5 абонентов?

116. Прядильщица обслуживает 1000 независимо работающих веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Определить вероятность того, что на протяжении 1 мин обрыв произойдет не менее чем на 5 веретенах.

117. Монета подброшена независимым образом 1000 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) ровно 450 раз; б) не менее 400 и не более 550 раз; в) более 520 раз.

118. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов: а) будет ровно 30 бракованных; б) число бракованных диодов будет находиться между 20 и 50; в) будет более 55 бракованных?

119. Вероятность выхода из строя за некоторое время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что из 100 независимо работающих конденсаторов в течение времени T выйдет из строя: а) ровно 10 конденсаторов; б) не менее 30, но менее 60 конденсаторов; в) не более 20 конденсаторов; г) более 20 конденсаторов.

120. Найти вероятность того, что в серии из 1000 независимых опытов число удачных опытов будет равно 450, если вероятность того, что опыт удачен, постоянна и равна 0,5.

121. При установившемся технологическом процессе 60% всех изготавливаемых заводом изделий выпускается высшим сортом. Приемщик наугад берет 200 шт. изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий высшего сорта окажется от 120 до 150 шт.?

122. Из большой партии зерна (пшеницы с рожью), в которой доля ржи 0,2, берут для пробы 900 случайных зерен. Какова вероятность, что число зерен ржи в пробе от 180 до 210?

Минимум для аудиторной работы

Элементы комбинаторики: 1; 2; 6; 10; 11; 15.

Классическое определение вероятности: 22; 24; 25; 28; 30; 32; 34; 35; 37.

Геометрические вероятности: 46; 47; 50.

Теоремы сложения и умножения вероятностей: 52; 57; 61; 65; 67; 68; 69; 71; 74.

Формула полной вероятности: 78; 81; 85; 87; 88; 89; 93; 94.

Повторение испытаний. Схема Бернулли: 99; 101; 105; 108.

Предельные теоремы в схеме Бернулли: 111; 117.

9.1.4. Ответы

1. а) $3^3 = 27$; б) $2\cdot 3^2 = 18$. **2.** а) $5_4^4 = 625$; б) $A_5^4 = 120$. **3.** а) $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 90\,000$; б) $1\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 1 = 1000$; в) $8\cdot 9^4 = 52\,488$; г) $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 2 = 18\,000$. **4.** $6\cdot 5 = 30$. **5.** $6! = 720$. **6.** $8! = 40\,320$. **7.** $A_8^5 = 6720$. **8.** $A_5^3 = 60$. **9.** $A_{12}^3 = 1320$. **10.** $A_{10}^4 = 5040$. **11.** $C_{25}^3 = 2300$. **12.** $C_{20}^3 = 1140$. **13.** $C_{12}^6 = 924$. **14.** а) $C_{20}^4 = 4845$; б) $A_{20}^4 = 116\,280$. **15.** $C_6^2 C_5^3 = 150$. **16.** а) $C_5^3 C_3^2 = 30$; б) $C_4^2 C_3^2 = 18$. **17.** $C_6^3 C_6^4 = 300$. **18.** а) $C_4^2 \cdot 2! = \frac{4!}{2!} = 12$; б) $C_6^3 C_3^2 = \frac{6!}{3!2!} = 60$. **19.** $9A_9^3 = 4536$. **20.** $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9 = 512$. **21.** $3!\cdot 10 = 60$. **22.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$. **23.** а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{3}{20}$; в) $\frac{1}{20}$. **24.** а) $\frac{15}{10+15+20+25} = \frac{3}{14}$;

б) $\dfrac{15+25}{10+15+20+25}=\dfrac{4}{7}$; в) 0; г) 1. **25.** $\dfrac{12}{365}$. **26.** $\dfrac{10}{33}$. **27.** $\dfrac{9\cdot 8}{9\cdot 10}=0{,}8$.
28. а) $\Omega=\begin{Bmatrix}(3,5);(3,7);(3,8);(5,3);(5,7);(5,8)\\(7,3);(7,5);(7,8);(8,3);(8,5);(8,7)\end{Bmatrix}$; б) $A=D=\{(3,5)$; $(3,7)$; $(5,3)$; $(5,7)$; $(7,3)$; $(7,5)\}$; $B=\{(5,3);(7,3);(7,5);(8,3);(8,5)$; $(8,7)\}$; $C=\{(8,3);\ (8,5);\ (8,7)\}$; $E=\varnothing$; в) $P(A)=P(D)=\dfrac{1}{2}$; $P(B)=\dfrac{1}{2}$; $P(C)=\dfrac{1}{4}$; $P(E)=0$; г) A и B совместны; A и C несовместны; A и D совместны; A и E несовместны; д) $\overline{B}$ = {число на первой карточке не больше, чем число на второй} = $=\{(3,5);(3,7);(3,8);(5,7);(5,8);(7,8)\}$; $\overline{E}=\Omega$ = {хотя бы одно число нечетное}. **29.** $P(A)=\dfrac{1}{6}$; $P(B)=\dfrac{5}{12}$; $P(C)=\dfrac{35}{36}$; $P(D)=\dfrac{11}{36}$; $P(E)=\dfrac{13}{18}$; $\overline{C}$ = {сумма очков не больше двух} = {на обеих костях выпало одно очко} = $\{(1,1)\}$; $\overline{D}$ = {ни на одной кости не появится 5 очков}; $\overline{E}$ = {сумма очков менее 6}; A и C совместны; $\overline{C}$ и D несовместны.
30. $\dfrac{6+3+2+1+1+1}{6\cdot 6}=\dfrac{7}{18}$. **31.** $\dfrac{1}{8!}=\dfrac{1}{40\,320}$. **32.** $\dfrac{1}{6!}=\dfrac{1}{720}$.
33. $\dfrac{1}{A_{10}^4}=\dfrac{1}{5040}$. **34.** $\dfrac{1}{A_{10}^3}=\dfrac{1}{720}$. **35.** $\dfrac{C_{10}^3}{C_{25}^3}=\dfrac{6}{115}$. **36.** $\dfrac{C_5^2\,C_{45}^1}{C_{50}^3}\approx 0{,}094$.
37. $\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$. **38.** $\dfrac{C_{10}^2C_5^3}{C_{15}^5}=\dfrac{150}{1001}$. **39.** $\dfrac{C_5^4}{C_9^4}=\dfrac{5}{126}$. **40.** $\dfrac{C_{15}^2C_5^1}{C_{30}^3}=\dfrac{15}{116}$.
41. а) $\dfrac{C_{15}^1C_{10}^2}{C_{25}^3}=\dfrac{27}{92}$; б) $\dfrac{C_{15}^3}{C_{25}^3}=\dfrac{91}{460}$; в) $1-\dfrac{C_{10}^3}{C_{25}^3}=\dfrac{109}{115}$. **42.** $\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}$.
43. $P(A)=\dfrac{10^4}{10^7}=0{,}001$; $P(B)=\dfrac{A_{10}^7}{10^7}\approx 0{,}061$; $P(C)=\dfrac{10^6}{10^7}=0{,}1$; $P(D)=\dfrac{C_7^3C_4^2C_2^2}{10^7}=2{,}1\cdot 10^{-5}$; A и C совместны; B и D несовместны.
44. $\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{1}{5}$. **45.** $\dfrac{C_3^1C_{12}^4C_2^1C_8^4C_1^1C_4^4}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\dfrac{25}{91}$. **46.** $\dfrac{2r^2}{R^2}$. **47.** 0,6.
48. $\dfrac{0{,}5\pi R^2}{\pi R^2}=0{,}5$. **49.** а) $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 4R^2}{\pi R^2}=\dfrac{2}{\pi}\approx 0{,}637$; б) $\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{\pi R^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0{,}413$.

50. Если x – момент прихода первого лица, а y – момент прихода второго лица, то $\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):\ |x-y|\le 15\}$, $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{60^2-(60-15)^2}{60^2}=\dfrac{7}{16}=0,4375.$

51. $\dfrac{8-5}{8+1,5}=\dfrac{6}{19}.$ **52.** $P(A+B)=\dfrac{6+5-2}{9}=1;$ $P(A+C)=P(C)=\dfrac{7}{9};$ $P(A+D)=\dfrac{6+1}{9}=\dfrac{7}{9};$ $P(BD)=\dfrac{1}{9}.$ **53.** $\dfrac{7}{9}.$ **54.** а) 0,28; б) 0,72.

55. а) 0,25; б) 0,5; в) 0,75. **56.** $\dfrac{1}{3}.$ **57.** а) 0,49; б) 0,42; в) 0,91.

58. а) 0,0676; б) 0,0012; в) 0,0688. **59.** а) 0,32; б) 0,56; в) 0,12. **60.** 0,91. **61.** а) 0,024; б) 0,976; в) 0,452. **62.** а) 0,092; б) 0,496. **63.** а) 0,6976; б) 0,9572. **64.** 0,019. **65.** 0,788. **66.** $\dfrac{4}{15}.$ **67.** $\dfrac{17}{20}\cdot\dfrac{16}{19}\cdot\dfrac{15}{18}=\dfrac{34}{57}.$

68. $\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{60}.$ **69.** $\dfrac{2}{11}\cdot\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{2\cdot 2\cdot 3!}{A_{11}^{7}}.$ **70.** $\dfrac{25}{216}.$

71. I способ: $1-0,54\cdot 0,4=0{,}784;$ II способ: $0,46+0,54\cdot 0,6=0{,}784.$

72. I способ: $1-\dfrac{8}{40}\cdot\dfrac{7}{39}=\dfrac{188}{195};$ II способ: $\dfrac{32}{40}+\dfrac{8}{40}\cdot\dfrac{32}{39}=\dfrac{188}{195}.$

73. I способ: $\dfrac{1}{10}+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{9}+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{1}{7}=0{,}4;$ II способ: $1-\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{6}{7}=0{,}4.$ **74.** I способ: $0,6+0,4\cdot 0,6+0,4\cdot 0,4\cdot 0,6=$ $=0{,}936;$ II способ: $1-0,4^3=0{,}936.$ **75.** а) $\dfrac{1}{8};$ б) $\dfrac{1}{36};$ в) $\dfrac{91}{216}.$

76. $\dfrac{2}{6}+\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{2}=0{,}6$ и $\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}=0{,}4.$ **77.** 0,984.

78. 0,1275. **79.** 0,11. **80.** 0,983. **81.** 0,9125. **82.** 0,09. **83.** 0,983. **84.** 0,0485. **85.** 0,85. **86.** 0,79. **87.** $\dfrac{32}{45}.$ **88.** $\dfrac{23}{36}.$ **89.** $\dfrac{11}{24}.$ **90.** 0,925.

91. 0,3. **92.** $\dfrac{1}{3}.$ **93.** 0,8. **94.** 0,5. **95.** 0,4. **96.** $\dfrac{5}{12}.$ **97.** 0,936. **98.** 0,3368.

99. а) 0,097; б) 0,029; в) 0,918. **100.** 0,951. **101.** $\dfrac{5}{16}.$ **102.** 0,329.

103. 0,8125. **104.** а) 0,2916; б) 0,3439. **105.** 0,9984. **106.** 0,633. **107.** 0,799. **108.** $P(A)=0{,}1875; P(B)=0{,}3633$. **109.** 0,8. **110.** 299.

111. а) 0,180; б) 0,323; в) 0,143; г) 0,865. **112.** а) 0,368; б) 0,632; в) 0,920. **113.** 0,175. **114.** 0,00016. **115.** 0,815. **116.** 0,371. **117.** а) 0,00017; б) 0,99931; в) 0,1038. **118.** а) 0,0165; б) 0,95216; в) 0,0062. **119.** а) 0,0044; б) 0,0062; в) 0,5; г) 0,5. **120.** 0,00017. **121.** 0,499997. **122.** 0,4938.

9.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

9.2.1. Теоретический минимум

1. Понятие случайной величины (СВ). Функция распределения.
2. Дискретные СВ.
3. Основные законы распределения дискретных СВ.
4. Непрерывные СВ.
5. Основные законы распределения непрерывных СВ.
6. Правило «трех сигм» для нормального распределения.
7. Числовые характеристики СВ.
8. Сходимость по вероятности. Понятие о законе больших чисел.

Понятие случайной величины (СВ). Функция распределения

Под ***случайной величиной*** (СВ) будем понимать величину, которая в результате СЭ принимает одно и только одно возможное значение, которое заранее неизвестно и зависит от случайных причин.

Примеры: а) число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть СВ, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

б) число успехов в n испытаниях в схеме Бернулли – СВ, принимающая значения 0, 1, …, n;

в) число бракованных изделий в данной партии – СВ, принимающая целые значения от 0 до n, где n – объем партии;

г) прирост веса домашнего животного за месяц есть СВ, которая может принять значение из некоторого промежутка.

Более строго, под СВ понимают действительно значную функцию ξ, определенную на множестве Ω элементарных событий, связанных с данным СЭ, и такую, что для любой системы B открытых интервалов, $B \subset \mathbb{R}$, существует $P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B)$ – вероятность того, что СВ ξ примет значение из множества B.

Таким образом, для любой СВ ξ определена функция:

$$F(x) = P(\xi < x), x \in \mathbb{R},$$

называемая ее ***функцией распределения*** и выражающая вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x. Под законом распределения СВ будем понимать любое правило, позволяющее найти функцию распределения этой СВ.

Основные свойства функции распределения СВ:

1. $0 \le F(x) \le 1,\ F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

2. $F(x)$ – неубывающая, непрерывная слева функция, т. е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$ и $F(x-0) = F(x),\ x \in \mathbb{R}.$

3. $P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$

4. $P(\xi = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0).$

Дискретные СВ

Случайная величина называется ***дискретной*** (ДСВ), если множество ее возможных значений *конечно* или *счетно* (т. е. если все ее значения можно занумеровать).

Примеры. Дискретными СВ являются: число выпадений герба при n подбрасываниях монеты, число выстрелов до первого попадания в цель, число бракованных изделий в данной партии и т. д.

Для того чтобы задать ДСВ ξ, достаточно перечислить все ее возможные значения $x_m,\ m = 1, 2, \ldots,$ и указать, с какими вероятностями p_m она их принимает.

Пример. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 у. е., 10 выигрышей по 100 у. е. и 100 выигрышей по 1 у. е. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша ξ для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Возможные значения СВ ξ: $x_1 = 0$ у. е., $x_2 = 1$ у. е., $x_3 =$ $= 100$ у. е., $x_4 = 1000$ у. е. СВ ξ принимает значение 1 с вероятностью:

$$p_2 = P(\xi = x_2) = \frac{100}{10\,000} = 0{,}01$$

(так как выигрыш $x_2 = 1$ у. е. приходится на 100 билетов из 10 000 лотерейных билетов). Аналогично по классическому определению вероятности находим:

$$p_3 = P(\xi = x_3) = \frac{10}{10\,000} = 0{,}001,\quad p_4 = P(\xi = x_4) = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001.$$

Поскольку число билетов, на которые выигрыши не выпадают, равно 10 000 – 100 – 10 – 1 = 9889, то

$$p_1 = P(\xi = x_1) = \frac{9889}{10\,000} = 1 - 0{,}01 - 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}9889.$$

Следовательно, закон распределения выигрыша ξ может быть задан таблицей:

ξ	0	1	100	1000
P	0,9889	0,01	0,001	0,0001

Заметим, что сумма вероятностей различных значений дискретной СВ ξ равна 0,9889 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 = 1.

Закон распределения ДСВ ξ удобно задать в виде таблицы, называемой ***рядом распределения*** этой СВ:

ξ	x_1	x_2	...	x_m	...
P	p_1	p_2	...	p_m	...

(Отметим, что $p_m \geq 0,\ \ p_1 + p_2 + ... + p_m + ... = 1$ – *условие контроля.*) Отсюда получаем ***функцию распределения*** ДСВ:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p_i,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

График функции распределения ДСВ имеет ступенчатый вид, причем функция распределения терпит разрывы в точках x_m со скачками $p_m = P(\xi = x_m),\ \ m = 1, 2, ...$

Математическое ожидание дискретной СВ ξ:

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_m p_m + ...$$

(предполагается, что ряд в правой части этого равенства абсолютно сходится) характеризует среднее значение СВ ξ.

Дисперсия СВ ξ – математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

характеризует разброс значений СВ вокруг ее математического ожидания.

Для вычисления дисперсии удобно использовать формулу

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2.$$

Для ДСВ ξ справедливо $M(\xi^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_m^2 p_m + ...$

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ – с***реднее квадратическое отклонение СВ*** от ее математического ожидания.

Из определения следует, что $D\xi \geq 0$, $\sigma_\xi \geq 0$ для любой СВ.

Пример. Задан закон распределения СВ ξ:

ξ	20	30	40	50
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Найти: а) математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, среднее квадратическое отклонение σ_ξ; б) вероятности $P(\xi = 30)$, $P(\xi = 35)$, $P(\xi < M\xi + 3)$; в) функцию распределения и построить ее график.

Решение. а) рассчитываем математическое ожидание $M\xi$:

$$M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 20 \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 0{,}6 + 40 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 2 + 18 + 4 + 10 = 34.$$

Для того чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения СВ ξ^2. Эта СВ принимает значение $20^2 = 400$ в том случае, когда ξ принимает значение 20, т. е. с вероятностью 0,1; СВ ξ^2 принимает значение $30^2 = 900$, если ξ принимает значение 30, т. е. с вероятностью 0,6, и т. д. Итак, ряд распределения СВ ξ^2 имеет следующий вид:

ξ^2	400	900	1600	2500
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Вычисляем математическое ожидание $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4 =$$
$$= 400 \cdot 0{,}1 + 900 \cdot 0{,}6 + 1600 \cdot 0{,}1 + 2500 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 40 + 540 + 160 + 500 = 1240.$$

Искомую дисперсию находим по формуле

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 1240 - 34^2 = 1240 - 1156 = 84.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{84} \approx 9{,}2$;

б) по таблице (ряду распределения) определяем, что СВ ξ принимает значение 30 с вероятностью 0,6, т. е. $P(\xi = 30) = 0{,}6$.

Поскольку среди возможных значений СВ ξ нет значения 35, то $P(\xi = 35) = 0$.

Чтобы найти вероятность $P(\xi < M\xi + 3)$, посмотрим, какие значения СВ попадают в интервал $(-\infty, M\xi + 3)$, т. е. в интервал $(-\infty, 37)$. Это значения 20 и 30.

Поэтому

$$P(\xi < M\xi + 3) = P(\xi < 37) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) = \\ = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7;$$

в) находим значение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Из ряда распределения в таблице видно, что СВ ξ может принимать значения 20, 30, 40, 50. Для вычисления вероятностей $P(\xi < x)$ нужно определить, какие значения x_m СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_m < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:

при $x \le 20$: $F(x) = 0$, так как ни одно из значений 20, 30, 40, 50 не удовлетворяет указанному неравенству;

при $20 < x \le 30$: $F(x) = P(\xi = 20) = 0{,}1$ (условию $x_m < x$ удовлетворяет только значение $x_m = 20$);

при $30 < x \le 40$: $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7$ (значения 20 и 30 удовлетворяют неравенству $x_m < x$);

при $40 < x \le 50$: $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) + P(\xi = 40) = 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}8$;

при $x > 50$: $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) + P(\xi = 40) + P(\xi = 50) = 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 20, \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 20 < x \le 30, \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 30 < x \le 40, \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 40 < x \le 50, \\ 1 & \text{при} \quad x > 50. \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 9.4.

Основные законы распределения дискретных СВ

Приведем некоторые законы распределения дискретных СВ.

1. СВ ξ имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами n и p, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n с вероятностями:

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \;\; m = 0,\ 1,\ 2, ...,\ n, \text{ где } 0 < p < 1,\;\; q = 1 - p.$$

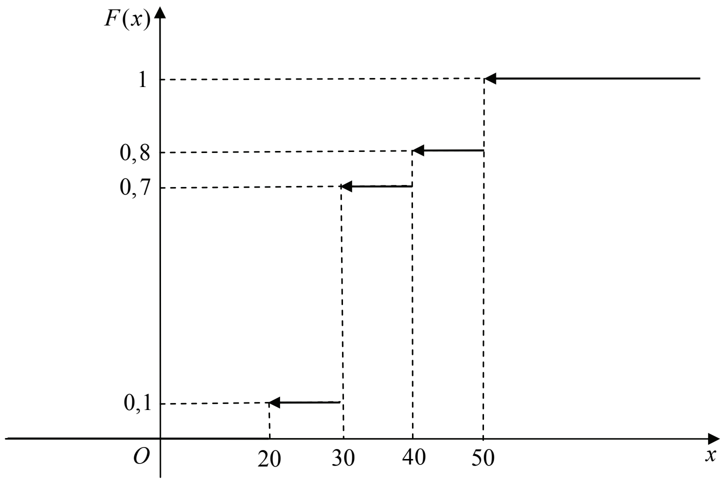


Рис. 9.4. График функции распределения

Биномиальный закон распределения имеет место в том случае, когда СВ ξ выражает число появлений события A (число успехов) при n независимых испытаниях в схеме Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия СВ ξ, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по формулам: $M\xi = np$, $D\xi = npq$.

2. Дискретная СВ ξ имеет ***распределение Пуассона*** с параметром a, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n, ... с вероятностями:

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a},\ m = 0, 1, 2, ..., n, ...$$

Математическое ожидание и дисперсия СВ ξ, распределенной по закону Пуассона, равны $M\xi = D\xi = a$.

Закон распределения Пуассона (*закон редких явлений*) является хорошим приближением для биномиального распределения при больших значениях n и малых p (или $1 - p$).

Непрерывные СВ

Случайная величина называется ***непрерывной*** (НСВ), если ее функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. НСВ принимает все значения из некоторого интервала или системы интервалов на числовой оси. Вероятность того, что НСВ примет фиксированное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = x_0) = 0.$

Примеры. Непрерывными СВ являются, например, время безотказной работы прибора, дальность полета снаряда, прибыль фирмы, расход электроэнергии на предприятии за месяц, вес новорожденного, ошибка измерения и т. п.

Особый интерес вызывают НСВ, имеющие плотность распределения. Закон распределения такой НСВ обычно задают функцией или плотностью распределения.

Функция $p(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей*** НСВ ξ с функцией распределения $F(x)$, если

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx,} \text{ откуда } \boxed{p(x) = F'(x),} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Основные свойства плотности распределения НСВ:

1. $p(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}.$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Геометрически это означает, что график плотности распределения лежит не ниже оси Ox и площадь под графиком плотности равна единице.

3. Вероятности попадания НСВ ξ в интервал, отрезок или полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы и равны:

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = P(\alpha < \xi \leq \beta) = P(\alpha < \xi < \beta) =$$
$$= P(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Геометрически вероятность $P(\alpha \leq \xi \leq \beta)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности, осью абсцисс и отрезками прямых $x = \alpha$ и $x = \beta.$

Пример. Дана плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1, \\ 0{,}2, & \text{если } \ -1 < x \leq 1, \\ 0{,}5 - 0{,}1x, & \text{если } \ 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти $P(-1 < \xi \leq 2)$, $P(\xi < 1{,}5)$, $P(\xi = 1{,}5)$.

Решение.

$$P(-1<\xi\le 2)\ =\int\limits_{-1}^{2}p(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}0,2dx+\int\limits_{1}^{2}(0,5-0,1x)dx=$$

$$=0,2x\Big|_{-1}^{1}+(0,5x-0,05x^2)\Big|_{1}^{2}=0,75,$$

$$P(\xi<\ 1,5)\ =\int\limits_{-\infty}^{1,5}p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dx+\int\limits_{-1}^{1}0,2dx+\int\limits_{1}^{1,5}(0,5-0,1x)dx=$$

$$=0+0,2x\Big|_{-1}^{1}+(0,5x-0,05x^2)\Big|_{1}^{1,5}=0,5875.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi\ = 1{,}5) = 0$.

Пример. Найти функцию распределения НСВ, если известна ее плотность распределения:

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -1,\\ 0,2, & \text{если }\ \ -1<x\le 1,\\ 0,5-0,1x, & \text{если }\ \ 1<x\le 3,\\ 0, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Решение. Вычислим функцию распределения по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx$. Для этого рассмотрим четыре случая: 1) $x\ \le\ -1$; 2) $-1 < x \le 1$; 3) $1 < x \le 3$; 4) $x > 3$.

При $x \le -1$ получаем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0;$$

при $-1 < x \le 1$ разбиваем интеграл на два:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dx+\int\limits_{-1}^{x}0,2dx=0+0,2x\Big|_{-1}^{x}=0,2x+0,2;$$

при $1 < x \le 3$ имеем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dx+\int\limits_{-1}^{1}0,2dx+\int\limits_{1}^{x}(0,5-0,1x)dx=$$

$$=0+0,2x\Big|_{-1}^{1}+(0,5x-0,05x^2)\Big|_{1}^{x}=0,5x-0,05x^2-0,05;$$

при $x > 3$ получаем:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1}0,2dx+\int_{1}^{3}(0,5-0,1x)dx+\int_{3}^{x}0dx=$$

$$=0+0,2x\Big|_{-1}^{1}+(0,5x-0,05x^2)\Big|_{1}^{3}+0=1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -1,\\ 0,2x+0,2, & \text{если } \ -1<x\le 1,\\ 0,5x-0,05x^2-0,05, & \text{если } \ 1<x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Математическое ожидание $M\xi$ ***и дисперсия*** $D\xi$ ***НСВ*** определяются по формулам

$$\boxed{M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx,\ D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2p(x)dx,}$$

где интегралы предполагаются абсолютно сходящимися.

На практике для вычисления дисперсии зачастую удобно использовать формулу $D\xi=M(\xi^2)-(M\xi)^2$, при этом

$$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx.$$

Пример. Найти a, $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $P(-1<\xi\le 2,5)$, $P(\xi=3,5)$, если дана функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ a(x^2-1), & \text{если } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Построить графики функции распределения и плотности распределения.

Решение. Для нахождения коэффициента a можно использовать различные свойства плотности и функции распределения.

<u>I способ.</u> Функция распределения непрерывной СВ непрерывна в любой точке, следовательно, $F(x_0+0)=F(x_0-0)$ в любой точке x_0,

в частности в точках, где меняется аналитическое задание функции, т. е. при $x = 1$ и $x = 3$:

$$F(1+0)=\lim_{x\to 1+0} F(x)=\lim_{x\to 1+0} a(x^2-1)=a\cdot 0=0;$$
$$F(1-0)=\lim_{x\to 1-0} F(x)=\lim_{x\to 1-0} 0=0=F(1+0) \text{ – верно;}$$
$$F(3+0)=\lim_{x\to 3+0} F(x)=\lim_{x\to 3+0} 1=1;$$
$$F(3-0)=\lim_{x\to 3-0} F(x)=\lim_{x\to 3-0} a(x^2-1)=a\cdot 8=8a.$$

Из соображений непрерывности $1 = 8a$, поэтому $a = \dfrac{1}{8}$.

<u>II способ.</u> Используем свойство плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1.$ Находим плотность вероятности $p(x)$ как производную от функции распределения $F(x)$:

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 2ax, & \text{если } \ 1<x\le 3,\\ 0, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Вычислим:

$$\int\limits_{-\infty}^{1} 0dx+\int\limits_{1}^{3} 2axdx\int\limits_{3}^{+\infty} 0dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int\limits_{1}^{3} 2axdx=ax^2\Big|_1^3=8a,$$

т. е. $8a = 1$. Следовательно, $a = \dfrac{1}{8}$.

Подставляя найденное a, получаем следующие выражения для функции распределения и плотности распределения данной СВ:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ \dfrac{1}{8}(x^2-1), & \text{если } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3;\end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ \dfrac{x}{4}, & \text{если } \ 1<x\le 3,\\ 0, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Для того чтобы найти числовые характеристики $M\xi$ и $D\xi$, необходимо знать плотность распределения $p(x) = F'(x)$. Вычисляем:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_1^3 x\frac{x}{4}dx = \int_1^3 \frac{x^2}{4}dx = \frac{x^3}{12}\bigg|_1^3 = \frac{27-1}{12} = \frac{13}{6};$$

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_1^3 x^2\frac{x}{4}dx = \int_1^3 \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{16}\bigg|_1^3 = \frac{81-1}{16} = 5;$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 5 - \frac{169}{36} = \frac{11}{36};$$

среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Определяем вероятность с помощью функции распределения:

$$P(-1 < \xi \le 2{,}5) = F(2{,}5) - F(-1) = \frac{1}{8}\cdot((2{,}5)^2 - 1) - 0 = \frac{21}{32}.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 3{,}5) = 0$.

Графики функции распределения и плотности распределения представлены на рис. 9.5.

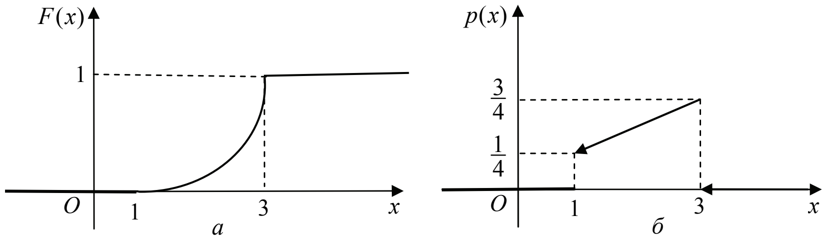


Рис. 9.5. Графики функции распределения (*а*) и плотности распределения (*б*)

Пример. Определить, при каком значении параметра *a* функция

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ ax & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

является плотностью распределения НСВ ξ, и найти числовые характеристики этой СВ.

Решение. Для нахождения коэффициента a используем свойство плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$ Вычисляем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{0}^{3} axdx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^3 = \frac{9}{2}a,$$

т. е. $\frac{9}{2}a = 1$. Следовательно, $a = \frac{2}{9}$.

Подставляя найденное a, получаем следующее выражение плотности распределения данной СВ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \frac{2x}{9}, & \text{если } 0 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Находим математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{0}^{3} x\frac{2x}{9}dx = \int\limits_{0}^{3} \frac{2x^2}{9}dx = \left.\frac{2x^3}{27}\right|_0^3 = 2;$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int\limits_{0}^{3} x^2\frac{2x}{9}dx = \int\limits_{0}^{3} \frac{2x^3}{9}dx = \left.\frac{x^4}{18}\right|_0^3 = \frac{9}{2};$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2};$$

среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Основные законы распределения непрерывных СВ

Приведем некоторые законы распределения непрерывных СВ.

1. НСВ ξ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a, b]$, если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения равномерно распределенной на $[a,\ b]$ СВ имеет следующий вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b, \\ 1 & \text{при } x>b, \end{cases}$$

а вероятность попадания этой СВ в некоторый интервал, лежащий внутри отрезка $[a,\ b]$, зависит только от длины этого интервала и не зависит от его положения:

$$P(x_1<\xi<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx=\frac{x_2-x_1}{b-a}, \quad \text{если } a\le x_1<x_2\le\ b.$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M\xi=\frac{a+b}{2},\ D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_\xi=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Примерами равномерно распределенных СВ могут служить: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до ближайшего целого.

Пример. Цена деления шкалы амперметра равна 0,5 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете сделана ошибка, превышающая 0,1 А.

Решение. СВ ξ – разность между показанием амперметра и ближайшим целым его делением – может принимать любые значения между –0,5 и 0,5 А. Поскольку все эти значения равновозможны, СВ ξ имеет равномерное распределение на отрезке [–0,5; 0,5]. Плотность распределения СВ ξ имеет вид

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0,5-(-0,5)} & \text{при} \quad x\in[-0,5;0,5], \\ 0 & \text{при} \quad x\notin[-0,5;0,5]. \end{cases}$$

Найдем вероятность:

$$P(|\xi|>0,1)=1-P(|\xi|\le 0,1)=$$

$$=1-\int_{-0,1}^{0,1}\frac{1}{0,5+0,5}dx=1-\int_{-0,1}^{0,1}dx=0,8.$$

2. Распределение НСВ ξ называется ***показательным (экспоненциальным)*** с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функция показательного распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

Показательное распределение является одним из основных в теории массового обслуживания и теории надежности. Примером СВ, имеющей показательное распределение, является время ожидания редких явлений: время между двумя вызовами на АТС, продолжительность безотказной работы приборов и т. д.

3. Распределение НСВ ξ называется ***нормальным*** (или ***распределением Гаусса***) с параметрами a и $\sigma > 0$: $\xi \in N(a, \sigma)$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).}$$

Параметры a и σ имеют смысл математического ожидания и среднего квадратического отклонения СВ ξ: $M\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2$.

График плотности нормального распределения изображен на рис. 9.6 и называется кривой Гаусса.

Функция распределения СВ ξ, имеющая нормальное распределение с параметрами a и σ, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

а вероятность попадания СВ ξ на заданный интервал (α, β) вычисляется по формуле

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В силу непрерывности СВ эта формула справедлива как со строгими, так и с нестрогими знаками неравенств.

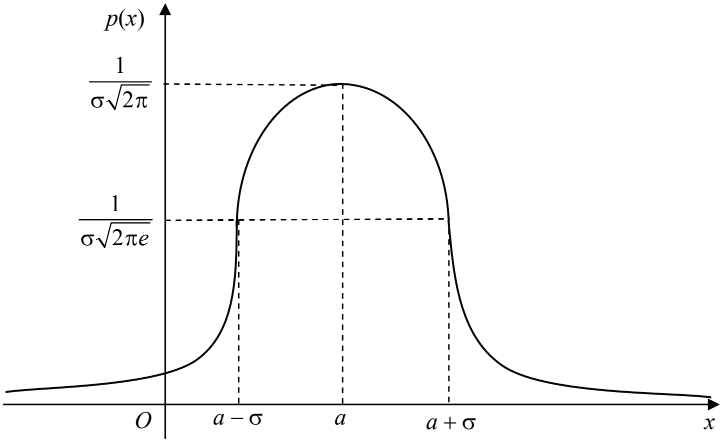


Рис. 9.6. График плотности нормального распределения

Пример. СВ ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $M\xi = 5$, дисперсия $D\xi = 0{,}64$. а) Найти вероятность попадания этой СВ в интервал (4, 7). б) Какова вероятность того, что СВ примет значение, большее чем 3? в) Определить вероятность того, что СВ примет значение, равное ее математическому ожиданию.

Решение. а) поскольку $a = M\xi = 5$, $\sigma = \sqrt{D\xi} = 0{,}8$, то

$$P(4 < \xi < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}8882;$$

б) находим:

$$P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 5}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{3-5}{0{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}5 - (-0{,}4938) = 0{,}9938;$$

в) поскольку нормальное распределение является непрерывным распределением, то вероятность того, что СВ ξ примет конкретное значение, равна 0, т. е. $P(\xi = M\xi) = P(\xi = 5) = 0$.

Вероятность того, что СВ ξ, распределенная нормально с параметрами a и σ, отклонится от своего математического ожидания менее чем на δ, определяется соотношением

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Полагая $\delta = 3\sigma$, получим:

$$P\left(|\xi - a| < 3\sigma\right) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9973 \approx 1.$$

Правило «трех сигм» для нормального распределения

Если СВ ξ распределена нормально с параметрами a и σ, то попадание ее в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ является практически достоверным событием, и, стало быть, вероятность противоположного события ничтожно мала и на практике таким событием пренебрегают.

Пример. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. а) Найти вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед. б) С помощью правила «трех сигм» определить границы, в которых будет находиться цена акции.

Решение. Пусть СВ ξ – текущая цена акции. По условию ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = M\xi = 15$ ден. ед. и $\sigma = \sigma_\xi = 0,2$ ден. ед.

а) находим вероятность:

$$P(\xi \le 15,3) = P(-\infty < \xi \le 15,3) = \Phi\left(\frac{15,3-15}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 15}{0,2}\right) =$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(-\infty) \approx 0,4332 - (-0,5) = 0,9332;$$

б) по правилу «трех сигм» СВ ξ, распределенная нормально с параметрами a и σ, с вероятностью 0,9973 попадает в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Следовательно, практически достоверно, что цена акции будет находиться в пределах от $15 - 3 \cdot 0,2 = 14,4$ ден. ед. до $15 + 3 \cdot 0,2 = 15,6$ ден. ед.

Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, считается, что погрешности измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин, распределены по нормальному закону. Кроме того, нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях, что делает нормальное распределение исключительным в ТВ и ее приложениях.

Числовые характеристики СВ

Наиболее используемыми числовыми характеристиками СВ являются:

1) математическое ожидание $M\xi$, определенное для ДСВ на с. 269 и для НСВ на с. 275, которое характеризует среднее значение (центр рассеивания) СВ ξ;

2) дисперсия $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, которая характеризует величину (меру) рассеивания значений СВ около ее математического ожидания;

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$, которое (в отличие от дисперсии) имеет размерность СВ ξ, что оказывается более удобным в приложениях ТВ, например в математической статистике.

Приведем основные свойства.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной: $Mc = c$, если $c = \text{const}$.
2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания: $M(c\xi) = cM\xi$.
3. Математическое ожидание суммы СВ равно сумме их математических ожиданий: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.
4. Математическое ожидание произведения *независимых* СВ равно произведению их математических ожиданий: $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$. (СВ ξ и η называются *независимыми*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ события $\{\xi < x\}$и $\{\eta < y\}$ независимы.)

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю: $Dc = 0$, если $c = \text{const}$.
2. Дисперсия неотрицательна: $D\xi \geq 0$.
3. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате: $D(c\xi) = c^2 D\xi$.

4. Дисперсия суммы *независимых* СВ равна сумме их дисперсий: $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

5. Дисперсия разности *независимых* СВ равна *сумме* их дисперсий: $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$.

Из других числовых характеристик СВ отметим:

$M\xi^k$ – начальные моменты k-го порядка;

$M(\xi - M\xi)^k$ – центральные моменты k-го порядка.

Таким образом, математическое ожидание является начальным моментом первого, а дисперсия – центральным моментом второго порядков.

В заключение приведем важнейшие числовые характеристики для основных законов распределения (таблица).

Числовые характеристики основных законов распределения

Распределение	$M\xi$	$D\xi$	σ_ξ
Биномиальное (с параметрами n и p)	np	npq	$\sqrt{npq}$
Пуассона (с параметром a)	a	a	a
Равномерное на $[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Показательное (с параметром λ)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Нормальное (Гаусса) с параметрами a и σ	a	σ^2	σ

Сходимость по вероятности. Понятие о законе больших чисел

Последовательность СВ $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ сходится по вероятности к числу a: $\xi_n \xrightarrow{P} a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|\xi_n - a| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к единице, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\xi_n - a| < \varepsilon\right) = 1$.

Закон больших чисел в форме Я. Бернулли. Относительная частота появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых это событие появляется с одной и той же вероятностью p, при неограниченном увеличении числа испытаний n сходится по вероятности к вероятности p этого события: $\frac{m}{n} \xrightarrow{P} p$ при $n \to \infty$.

Закон больших чисел в форме Бернулли является теоретическим обоснованием статистического метода задания вероятности, согласно которому вероятность события можно оценить относительной частотой $\frac{m}{n}$ появления этого события при достаточно большом числе n независимых испытаний.

9.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется случайной величиной (СВ)? Приведите примеры.
2. Дайте определение функции распределения СВ.
3. Какими свойствами обладает функция распределения СВ?
4. Может ли функция распределения принимать отрицательные значения?
5. Поясните, может ли функция распределения принимать значения больше 1.
6. Может ли функция распределения убывать на некоторых участках?
7. Для каких СВ существует функция распределения?
8. Всякая ли СВ имеет функцию распределения?
9. Может ли функция распределения иметь конечные разрывы? бесконечные разрывы?
10. Может ли функция распределения на некоторых участках оставаться постоянной? всюду быть постоянной?
11. Какие СВ называются дискретными? Приведите примеры.
12. Что называется рядом распределения дискретной СВ?
13. Какой вид имеет график функции распределения дискретной СВ?
14. Как рассчитывается математическое ожидание дискретной СВ?
15. Расскажите, как вычисляется дисперсия СВ.
16. Может ли дисперсия СВ быть отрицательной?
17. Что называется средним квадратическим отклонением СВ?
18. Какие значения может принимать СВ, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p?
19. Приведите примеры СВ, имеющих биномиальное распределение.
20. По какой формуле вычисляются вероятности различных значений СВ, имеющей биномиальное распределение?

21. Чему равны математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p?

22. Какие значения может принимать СВ, имеющая распределение Пуассона?

23. Приведите примеры СВ, имеющих распределение Пуассона.

24. По какой формуле вычисляются вероятности различных значений СВ, имеющей распределение Пуассона?

25. Чему равны математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей распределение Пуассона с параметром a?

26. Какие СВ называются непрерывными (НСВ)? Приведите примеры.

27. Чему равна вероятность того, что НСВ примет фиксированное, заранее заданное значение?

28. Что называется плотностью распределения НСВ?

29. Как найти плотность распределения НСВ, если известна ее функция распределения?

30. Поясните, как найти функцию распределения НСВ, если известна ее плотность распределения.

31. Какой особенностью обладает функция распределения НСВ?

32. Перечислите свойства, которыми обладает плотность распределения НСВ.

33. Как найти вероятность попадания НСВ в заданный промежуток, если известна плотность распределения этой СВ?

34. Поясните, как найти вероятность попадания НСВ в заданный промежуток, если известна функция распределения этой СВ.

35. Может ли плотность распределения принимать отрицательные значения?

36. Как Вы думаете, может ли плотность распределения принимать значения больше 1?

37. Может ли плотность распределения убывать на некоторых участках?

38. Для каких СВ существует плотность распределения?

39. Может ли плотность распределения иметь конечные разрывы?

40. Может ли плотность распределения на некоторых участках оставаться постоянной? всюду быть постоянной?

41. Как вычисляется математическое ожидание НСВ?

42. Что называется равномерным распределением НСВ?

43. Приведите примеры СВ, имеющих равномерное распределение.

44. Чему равно математическое ожидание СВ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a, b]$?

45. Какие значения может принимать СВ, имеющая показательное распределение?

46. Приведите примеры СВ, имеющих показательное распределение.

47. Запишите выражение плотности нормального закона распределения и объясните смысл входящих в него параметров.

48. Какие значения может принимать СВ, имеющая нормальное распределение?

49. Как найти вероятность попадания СВ, имеющей нормальное распределение, в заданный промежуток?

50. Какими свойствами обладает функция Лапласа?

51. В чем заключается правило «трех сигм»?

52. Что относится к основным числовым характеристикам СВ?

53. Поясните, что характеризует математическое ожидание СВ.

54. Что характеризует дисперсия СВ?

55. Объясните, что характеризует среднее квадратическое отклонение СВ.

9.2.3. Практический минимум

1. Какие из следующих таблиц могут служить законами распределения СВ? В случае положительного ответа найти числовые характеристики одной из СВ:

а)

ξ	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

б)

ξ	3	4	7	10
P	0,1	0,1	0,4	0,3

в)

ξ	3	3	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

г)

ξ	–3	4	7	10
P	0,1	0,1	0,4	0,4

2. Задан закон распределения СВ ξ:

ξ	–3	1	2
P	0,2	0,3	p

Требуется:

а) определить, при каком значении p указанная таблица является рядом распределения некоторой СВ ξ;

б) вычислить вероятности $P(1 \le \xi < 3)$, $P(\xi \ge -2)$, $P(\xi = 2,5)$;

в) найти функцию распределения СВ ξ и построить ее график.

3. Дан ряд распределения ДСВ ξ:

ξ	2	4	7	11
P	0,4	0,3	p	0,1

Необходимо:

а) определить значение p;

б) рассчитать $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ;

в) вычислить вероятности $P(\xi = 2)$, $P(\xi = 3)$, $P(\xi \le 4)$, $P(M\xi - 3 < \xi \le 7)$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$;

г) записать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

4. Построить ряд распределения числа успехов в двух независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность успеха равна 0,3.

5. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают 2 шара; ξ – число белых шаров среди этих двух. Требуется:

а) составить ряд распределения СВ ξ;

б) рассчитать $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ;

в) вычислить вероятности $P(1 \le \xi < 3)$, $P(\xi \ge 2)$, $P(\xi = 1{,}5)$, $P(\xi > M\xi)$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$;

г) записать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

6. Составить ряд распределения числа ξ попаданий мячом в корзину при двух независимых бросках, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,4. Найти числовые характеристики этой случайной величины и вероятности $P(\xi = M\xi)$, $P(\xi < M\xi)$.

7. Составить ряд распределения числа ξ попаданий при двух независимых выстрелах, если вероятность попадания при первом равна 0,6, при втором – 0,5. Записать функцию распределения СВ ξ и построить ее график.

8. В коробке 9 карандашей, из них 3 простые. Составить ряд распределения числа ξ простых карандашей среди двух взятых наудачу. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

9. Определить, является ли указанная функция функцией распределения некоторой СВ. В случае положительного ответа составить ряд распределения СВ:

а) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}6 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}4 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}3 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}4 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$

10. Охотник произвел три независимых выстрела по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,8 и после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти математическое ожидание числа попаданий при трех выстрелах.

11. Оператор вызывает абонента, причем каждый последующий вызов осуществляется лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что абонент примет вызов, равна 0,4 и не зависит от предыдущих вызовов. Составить ряд распределения и найти математическое ожидание числа ξ вызовов, если производится не более четырех попыток.

12. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4 и не зависит от предыдущих выстрелов. Составить ряд распределения и найти математическое ожидание числа промахов.

13. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Произведено 4 независимых выстрела. Составить ряд распределения и найти математическое ожидание числа промахов.

14. Дан перечень возможных значений ДСВ ξ: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$; известны $M\xi=0{,}1$ и $D\xi=0{,}89$. Построить ряд распределения ДСВ ξ.

15. В урне 4 красных и 2 черных шара. Составить закон распределения ДСВ ξ – числа вынутых черных шаров и найти $P(\xi \ge 2)$, если:

а) наудачу вынуто 3 шара;

б) шары извлекают случайным образом по одному до появления красного;

в) шары извлекают наудачу до появления красного, возвращая каждый раз вынутый шар обратно;

г) извлекают случайным образом по одному 3 шара, возвращая каждый раз вынутый шар обратно.

16. Определить, имеет ли СВ ξ биномиальное распределение; в случае положительного ответа указать параметры распределения.

а) СВ ξ – число выпадений нечетного числа очков при четырех независимых подбрасываниях кубика.

б) Из 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. СВ ξ – число агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

в) Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. СВ ξ – число телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту.

г) В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. СВ ξ – число выигрышей при пяти случайно сделанных покупках.

д) Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, осматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает просмотр. СВ ξ – число просмотренных часов.

е) Тест состоит из 6 вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. СВ ξ – число правильных ответов при простом угадывании.

17. Игральную кость подбрасывают наудачу 4 раза. Определить математическое ожидание и дисперсию числа выпадений шестерки.

18. Клиенты банка, не связанные друг с другом, возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,8. Найти числовые характеристики СВ ξ – числа не возвращенных в срок кредитов из 10 выданных.

19. Определить числовые характеристики СВ ξ – числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если случайным образом приобретено 10 билетов, причем вероятность выиграть по каждому билету равна 0,05.

20. Вероятность повреждения детали при перевозке равна 0,002. Найти математическое ожидание и дисперсию числа поврежденных деталей в партии из 500 наудачу выбранных деталей.

21. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Определить закон распределения числа отказавших за время T элементов и числовые характеристики этой случайной величины.

22. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Определить закон распределения числа бракованных деталей среди 2000

отобранных наудачу и числовые характеристики этой случайной величины.

23. ДСВ ξ имеет биномиальное распределение с $M\xi = 0{,}8$ и $D\xi = 0{,}64$. Найти $P(\xi \le 1)$.

24. Опытным путем установлено, что доля коротких волокон хлопка-сырца составляет в среднем 3% в каждой подопытной партии. Для СВ ξ – количества коротких волокон среди выбранных наудачу 200 проверенных – найти $M\xi,\ D\xi,\ P(\xi > 2)$.

25. Требуется:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ ax - \dfrac{1}{3} & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

является функцией распределения НСВ ξ;

б) найти плотность распределения СВ ξ;

в) рассчитать $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$;

г) вычислить вероятности $P(0 \le \xi < 2)$, $P(\xi \ge 2)$, $P(\xi = 1{,}5)$, $P(\xi > M\xi)$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$;

д) построить графики функции распределения и плотности распределения.

26. Необходимо:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ ax^3 & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

является функцией распределения НСВ ξ;

б) найти плотность распределения СВ ξ;

в) рассчитать $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$;

г) вычислить вероятности $P(1 < \xi \le 5)$, $P(\xi \ge 2)$, $P(\xi = 4)$;

д) построить графики функции распределения и плотности распределения.

27. Дана функция распределения НСВ ξ:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ a(x^2-x) & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Требуется:

а) определить значение параметра a;

б) найти плотность распределения СВ ξ;

в) рассчитать $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$;

г) вычислить вероятности $P(0\le\xi<2)$, $P(\xi<1{,}5)$, $P(\xi=1{,}5)$, $P(\xi>M\xi)$, $P(|\xi-M\xi|<\sigma_\xi)$;

д) построить графики функции распределения и плотности распределения.

28. Необходимо:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ ax^3 & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2\end{cases}$$

является плотностью распределения НСВ ξ;

б) вычислить $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$;

в) найти функцию распределения СВ ξ;

г) определить вероятности $P(1\le\xi<3)$, $P(\xi\ge 0{,}5)$, $P(\xi=M\xi)$;

д) построить графики функции распределения и плотности распределения.

29. Требуется:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ a & \text{при } 0<x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3\end{cases}$$

является плотностью распределения НСВ ξ;

б) вычислить $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$;

в) найти функцию распределения СВ ξ;

г) определить вероятности $P(1\le\xi<3)$, $P(\xi\ge 0{,}5)$, $P(\xi=M\xi)$;

д) построить графики функции распределения и плотности распределения.

30. На вход приемного устройства поступает сигнал со случайной амплитудой напряжения. Плотность распределения случайной величины ξ – амплитуды напряжения – имеет следующий вид:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x & \text{при } 0<x\le 1,\\ a-x & \text{при } 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Необходимо:

а) определить значение параметра a;

б) вычислить $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ;

в) найти функцию распределения СВ ξ;

г) определить вероятности $P(1\le\xi<3)$, $P(\xi\ge 0{,}5)$, $P(\xi=M\xi)$;

д) построить графики функции распределения и плотности распределения.

31. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$, если СВ ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ 0{,}5+0{,}25x & \text{при } -2<x\le 0,\\ 0{,}5+0{,}5x^2 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

32. Найти $P(1\le\xi<2{,}5)$, $P(\xi\ge 0{,}5)$, если СВ ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16} & \text{при } 0<x\le 2,\\ x-\dfrac{7}{4} & \text{при } 2<x\le \dfrac{11}{4},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{11}{4}.\end{cases}$$

33. Рассчитать $P(-1<\xi\le 2)$, $P(\xi<1{,}5)$, если СВ ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ 0,2x+0,2 & \text{при } -1<x\le 1,\\ 0,5x-0,05x^2-0,05 & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

34. Найти $P(1\le\xi<2,5)$, $P(\xi\ge 0,5)$, если СВ ξ задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{1}{4}(4x-x^3) & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

35. Функция распределения НСВ ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}a & \text{при } x\le 1,\\ b\ln x+c & \text{при } 1<x\le e,\\ d & \text{при } x>e.\end{cases}$$

Определить постоянные a, b, c, d; найти среднее значение и дисперсию НСВ ξ.

36. НСВ ξ распределена равномерно на отрезке [2, 8]. Найти числовые характеристики СВ ξ и $P(0\le\xi<6)$, $P(6\le\xi<7)$, $P(\xi\ge 5)$, $P(\xi=8)$.

37. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке [2, 7]. Определить вероятность попадания случайной величины на отрезок [3, 5].

38. НСВ ξ имеет равномерное распределение с $M\xi=3$ и $D\xi=\frac{4}{3}$. Найти $P(|\xi-M\xi|\le\sigma_\xi)$.

39. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Определить вероятность того, что в данный момент часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

40. Интервал движения автобусов 15 мин. С какой вероятностью пассажир будет ожидать автобус менее 3 мин?

41. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой

более 0,05 с, если отсчет производится с округлением до ближайшего деления шкалы?

42. Рост человека измеряют в сантиметрах, округляя до ближайшего целого значения. Определить вероятность того, что при измерении роста ребенка допущена ошибка более 3 мм.

43. НСВ ξ – время работы лампы конденсатора – задается плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}001e^{-0{,}001x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти $M\xi$ и вероятность того, что лампа конденсатора будет работать не более среднего времени ее службы.

44. НСВ ξ – время безотказной работы радиотехники – задается функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 1 - e^{-0{,}05x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Определить $M\xi$ и вероятность того, что радиотехника не откажет за время, равное среднему сроку ее службы.

45. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром λ = 0,25 дня. Предполагая утверждение служащего справедливым, вычислить, какой процент зрителей помнит содержание рекламного ролика спустя 7 дней.

46. НСВ ξ имеет плотность распределения $p(x) = \dfrac{a}{x^2 + \pi^2}$ (закон Коши). Требуется:

а) определить значение параметра a;

б) найти функцию распределения СВ ξ;

в) вычислить вероятность попадания СВ ξ на промежуток $(\pi, +\infty)$;

г) выяснить, существуют ли для этой СВ $M\xi$, $D\xi$.

47. НСВ ξ подчинена нормальному закону распределения с $M\xi$ = 5 и $D\xi$ = 9. Определить $P(4 \le \xi < 6)$, $P(6 \le \xi < 10)$, $P(\xi \ge 3)$, $P(\xi = 3)$.

48. НСВ ξ подчинена нормальному закону распределения с $M\xi$ = 3 и $D\xi$ = 25. Найти $P(0 \le \xi < 6)$, $P(6 \le \xi < 7)$, $P(\xi \ge 2)$, $P(\xi = 2)$.

49. Определить числовые характеристики СВ ξ и $P(-3 \le \xi < 1)$, $P(\xi < 0)$, если НСВ ξ задана плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{5\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{25}(x+2)^2}$.

50. Вычислить вероятности $P(0 \le \xi < 2)$, $P(\xi \ge -2)$, $P(\xi = 1{,}5)$, $P(\xi > M\xi)$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$, если НСВ ξ задана плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{1}{6}x^2}$.

51. НСВ ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 3$, $\sigma = 4$. Найти $P(1 < \xi < 3)$, $P(\xi = 2)$, $P(\xi > 5)$, $P(\xi \le 0)$.

52. Определить вероятность того, что значение нормально распределенной СВ ξ отклонится от ее математического ожидания менее чем на 2, если параметры распределения равны $a = -10$, $\sigma = 3$.

53. Найти вероятность попадания НСВ ξ, распределенной по нормальному закону распределения с $M\xi = 3$ и $D\xi = 1$, на отрезок [2, 4].

54. а) Чему равна вероятность $P(\xi \in [0, 10])$, если ξ – нормально распределенная случайная величина с $M\xi = 10$ и $P(\xi \in [10, 20]) = 0{,}3$? б) Вычислить $D\xi$.

55. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 5 см и средним квадратическим отклонением 0,9 см. а) Рассчитать вероятность того, что диаметр наугад взятой детали находится в пределах от 4 до 7 см. б) С помощью правила «трех сигм» определить границы, в которых будут находиться диаметры деталей.

56. Ошибка измерительного прибора считается нормально распределенной СВ со средним квадратическим отклонением 3 мм. Систематическая ошибка отсутствует. Какова вероятность того, что измерение, сделанное с помощью этого прибора, превысит истинное значение измеряемой величины более чем на 5 мм?

57. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная ошибка нормально распределена и имеет среднее квадратическое отклонение 75 м. Для полета самолету отведен коридор высотой 100 м. Чему равны вероятности того, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

58. Размер диаметра втулок можно считать нормально распределенной СВ с математическим ожиданием $M\xi = 2{,}5$ см и

дисперсией $D\xi = 0{,}01$ см^2. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

59. Высотомер не имеет систематической ошибки, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднюю квадратическую ошибку должен иметь высотомер, чтобы с вероятностью 0,95 ошибка измерения высоты по абсолютной величине была меньше 10 м? С какой вероятностью ошибка измерения будет превосходить 3 м?

60. Деталь, изготовленная автоматом, считается стандартной, если отклонение ее размера от номинала не превышает 10 мм. Случайные ошибки отклонения размера от номинала распределены нормально с параметрами $a = 0$ мм и $\sigma = 5$ мм. а) Определить процент стандартных изделий для данного автомата. б) При каком количестве изделий, изготовленных автоматом, можно утверждать с вероятностью не менее 0,95, что среди них есть по крайней мере одна бракованная?

61. Проводятся два независимых измерения прибором, имеющим среднюю квадратическую ошибку 30 м и систематическую ошибку +10 м. Какова вероятность того, что обе ошибки измерений, имея разные знаки по абсолютной величине, превзойдут 10 м? (Ошибки измерения нормально распределены.)

62. Для нормально распределенной случайной величины 15% ее значений меньше 15 и 40% больше 40. Найти параметры этого распределения.

63. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса 520 г. Известно, что 5% коробок имеют массу меньше 500 г. Каков процент коробок, масса которых меньше 480 г, если масса коробки считается нормальной СВ?

64. Какое наибольшее расстояние допустимо между двумя рыболовецкими судами, идущими параллельными курсами, чтобы вероятность обнаружения косяка рыбы, находящегося между ними, была не менее 0,5, если дальности обнаружения косяка каждым из судов являются независимыми нормально распределенными СВ со средним значением 3,7 км и средним квадратическим отклонением 1,1 км?

Минимум для аудиторной работы

Дискретные случайные величины: 1; 2; 5; 9; 12.

Основные законы распределения дискретных случайных величин: 16; 18; 20.

Непрерывные случайные величины: 26; 28; 31; 32.

Основные законы распределения непрерывных величин: 37; 42; 47; 49; 52; 55; 57.

9.2.4. Ответы

1. а) $M\xi = 6{,}8$, $D\xi = 6{,}76$; г) $M\xi = 7{,}2$, $D\xi = 9{,}36$. **2.** а) $p = 0{,}5$; б) $P(1 \le \xi < 3) = 0{,}8$, $P(\xi \ge -2) = 0{,}8$, $P(\xi = 2{,}5) = 0$;

в) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -3, \\ 0{,}2 & \text{при } -3 < x \le 1, \\ 0{,}5 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$ **3.** а) $p = 0{,}2$; б) $M\xi = 4{,}5$, $D\xi = 8{,}05$, $\sigma_\xi \approx 2{,}8$; в) $P(\xi = 2) = 0{,}4$, $P(\xi = 3) = 0$, $P(\xi \le 4) = 0{,}7$, $P(M\xi - 3 < \xi \le 7) = 0{,}9$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) = 0{,}9$;

г) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0{,}4 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}7 & \text{при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}9 & \text{при } 7 < x \le 11, \\ 1 & \text{при } x > 11. \end{cases}$

4.

ξ	0	1	2
P	0,49	0,42	0,09

5. а)

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

б) $M\xi = \frac{4}{3}$, $D\xi = \frac{16}{45}$, $\sigma_\xi = \frac{4}{3\sqrt{5}}$;

в) $P(1 \le \xi < 3) = \frac{14}{15}$, $P(\xi \ge 2) = \frac{2}{5}$, $P(\xi = 1{,}5) = 0$, $P(\xi > M\xi) = \frac{14}{15}$,

$P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) = \frac{8}{15}$; г) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{1}{15} & \text{при } 0 < x \le 1, \\ \frac{3}{5} & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

6.

ξ	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

$M\xi = 0{,}8$, $D\xi = 0{,}48$, $P(\xi = M\xi) = 0$, $P(\xi < M\xi) = 0{,}36$.

7.

ξ	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}7 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

8.

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

$M\xi = \frac{2}{3}$, $D\xi = \frac{5}{6}$.

9. а) не является; б)

ξ	1	2	4
P	0,3	0,1	0,6

10. $M\xi = 2{,}1$.

11.

ξ	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,216

$M\xi = 2{,}176$.

12.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,0864	0,1296

$M\xi = 1{,}3056$.

13.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

$M\xi = 2{,}4$.

14.

ξ	–1	0	1
P	0,4	0,1	0,5

15. а)

ξ	0	1	2
P	0,2	0,6	0,2

$P(\xi \ge 2) = 0{,}2$;

б)

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

$P(\xi \ge 2) = \frac{1}{15}$;

в)

ξ	0	1	2	…	m	…
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$		$\frac{2}{3^{m+1}}$	

$P(\xi \ge 2) = \frac{1}{9}$;

г)

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$P(\xi \ge 2) = \frac{7}{27}$.

16. а) $n = 4$, $p = 0{,}5$; б) распределение СВ ξ не является биномиальным; в) распределение СВ ξ не является биномиальным; г) $n = 5$, $p = 0{,}1$; д) распределение СВ ξ не является биномиальным; е) $n = 6$, $p = 0{,}25$. **17.** $M\xi = \frac{2}{3}$, $D\xi = \frac{5}{9}$. **18.** $M\xi = 2$, $D\xi = 1{,}6$. **19.** $M\xi = 0{,}5$, $D\xi = 0{,}475$. **20.** $M\xi = 1$, $D\xi \approx 1$. **21.** Биномиальное распределение с параметрами $n = 1000$, $p = 0{,}002$; хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметром $a = 2$, $M\xi = D\xi \approx 2$. **22.** Биномиальное распределение с параметрами $n = 1000$, $p = 0{,}002$; хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметром $a = 2$, $M\xi = D\xi \approx 2$. **23.** 0,8192. **24.** $M\xi = 6$, $D\xi \approx 6$, $P(\xi > 2) = 0{,}938$.

25. а) $a = \frac{1}{3}$; б) $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \frac{1}{3} & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases}$ в) $M\xi = 2{,}5$, $D\xi = 0{,}75$, $\sigma_\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $P(0 \le \xi < 2) = \frac{1}{3}$, $P(\xi \ge 2) = \frac{2}{3}$, $P(\xi = 1{,}5) = 0$, $P(\xi > M\xi) = 0{,}5$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **26.** а) $a = \frac{1}{27}$;

б) $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{9} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3; \end{cases}$ в) $M\xi = 2{,}25$, $D\xi = 0{,}3375$, $\sigma_\xi \approx 0{,}58$;

г) $P(1 < \xi \le 5) = \frac{26}{27}$, $P(\xi \ge 2) = \frac{19}{27}$, $P(\xi = 4) = 0$. **27.** а) $a = \frac{1}{6}$;

б) $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \frac{1}{6}(2x - 1) & \text{при } 1 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3; \end{cases}$ в) $M\xi = \frac{20}{9}$, $D\xi = \frac{23}{81}$, $\sigma_\xi = \frac{\sqrt{23}}{9}$;

г) $P(0 \le \xi < 2) = \frac{1}{3}$, $P(\xi < 1{,}5) = \frac{1}{8}$, $P(\xi = 1{,}5) = 0$, $P(\xi > M\xi) = 0{,}547$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) = 0{,}221$. **28.** а) $a = \frac{1}{4}$; б) $M\xi = \frac{8}{5}$, $D\xi = \frac{8}{75}$, $\sigma_\xi =$

$= \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{x^4}{16} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ г) $P(1 \le \xi < 3) = \dfrac{15}{16}$, $P(\xi \ge 0,5) = \dfrac{255}{256}$, $P(\xi = M\xi) = 0$. **29.** а) $a = \dfrac{1}{3}$; б) $M\xi = 1{,}5$, $D\xi = \dfrac{3}{45}$, $\sigma_\xi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{3} & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$ г) $P(1 \le \xi < 3) = \dfrac{2}{3}$, $P(\xi \ge 0,5) = \dfrac{5}{6}$,

$P(\xi = M\xi) = 0$. **30.** а) $a = 2$; б) $M\xi = 1$, $D\xi = \dfrac{1}{6}$, $\sigma_\xi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$;

в) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} - 1 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ г) $P(1 \le \xi < 3) = 0{,}5$, $P(\xi \ge 0,5) = \dfrac{7}{8}$,

$P(\xi = M\xi) = 0$. **31.** $M\xi = -\dfrac{1}{6}$, $D\xi = \dfrac{8}{9}$. **32.** $P(1 \le \xi < 2,5) = \dfrac{11}{16}$, $P(\xi \ge 0,5) = \dfrac{63}{64}$. **33.** $P(-1 < \xi \le 2) = 0{,}75$, $P(\xi < 1,5) = 0{,}5875$. **34.** $P(1 \le \xi < 2,5) = \dfrac{9}{16}$, $P(\xi \ge 0,5) = \dfrac{225}{256}$. **35.** $a = c = 0$, $b = d = 1$, $M\xi = e - 1$, $D\xi = \dfrac{1}{2}(1-(e-2)^2)$. **36.** $M\xi = 5$, $D\xi = 3$, $P(0 \le \xi < 6) = \dfrac{2}{3}$, $P(6 \le \xi < 7) = \dfrac{1}{6}$, $P(\xi \ge 5) = 0{,}5$, $P(\xi = 8) = 0$. **37.** 0,4. **38.** 0,577. **39.** $\dfrac{2}{3}$. **40.** 0,2. **41.** 0,5. **42.** 0,4. **43.** $M\xi = 1000$, $P(\xi \le M\xi) = 0,632$. **44.** $M\xi = 20$, $P(\xi > M\xi) = 0,368$. **45.** 17,4%. **46.** а) $a = 1$; б) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\pi}$; в) 0,25; г) $M\xi$, $D\xi$ не существуют. **47.** $P(4 \le \xi < 6) \approx 0{,}2586$, $P(6 \le \xi < 10) \approx 0{,}3232$, $P(\xi \ge 3) \approx 0{,}2514$, $P(\xi = 3) = 0$.

48. $P(0 \le \xi < 6) \approx 0{,}4514$, $P(6 \le \xi < 7) \approx 0{,}0624$, $P(\xi \ge 2) \approx 0{,}5793$, $P(\xi = 2) = 0$. **49.** $M\xi = -2$, $D\xi = 12{,}5$, $P(-3 \le \xi < 1) \approx 0{,}4126$, $P(\xi < 0) \approx 0{,}7157$. **50.** $P(0 \le \xi < 2) \approx 0{,}3749$, $P(\xi \ge -2) \approx 0{,}8749$, $P(\xi = 1{,}5) = 0$, $P(\xi > M\xi) = 0{,}5$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) \approx 0{,}6826$. **51.** $P(1 < \xi < 3) \approx 0{,}1915$, $P(\xi = 2) = 0$, $P(\xi > 5) \approx 0{,}3085$, $P(\xi \le 0) \approx$ $\approx 0{,}2266$. **52.** 0,4972. **53.** 0,6826. **54.** а) 0,3; б) $D\xi \approx 142$. **55.** а) 0,1309; б) (2,3 см; 7,7 см). **56.** 0,0475. **57.** 0,1762; 0,4792 и 0,3446. **58.** (2,2 см; 2,8 см). **59.** $\sigma \approx 5{,}1$ м, $P(\xi > 3) \approx 0{,}2776$. **60.** а) 95,44%; б) 65. **61.** 0,1257. **62.** $a \approx 35{,}093$, $\sigma \approx 19{,}395$. **63.** 0,05%. **64.** 8,61 км.

Глава 10. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

10.1. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

10.1.1. Теоретический минимум

1. Генеральная совокупность, выборка и способы ее представления.
2. Статистический ряд. Статистическое распределение случайной величины.
3. Графическое изображение статистических рядов.
4. Эмпирическая функция распределения.

Генеральная совокупность, выборка и способы ее представления

Задачей математической статистики является разработка методов планирования, описания и анализа экспериментальных данных, получаемых в результате анализа массовых случайных явлений.

Пусть в результате случайного эксперимента (СЭ) изучается определенный признак ξ (случайный фактор) некоторой совокупности Ω однородных (по этому признаку) объектов, называемых ***генеральной совокупностью*** (ГС). Число элементов множества Ω, если оно конечно, называется ***объемом*** ГС.

Для изучения случайного фактора – ***случайной величины*** (СВ) ξ с функцией распределения $F(x)$ и множеством Ω возможных значений СВ ξ (это множество зачастую отождествляется с самой ГС) обычно используется выборочный метод (ВМ), согласно которому из ГС производится репрезентативная выборка объема n (n наудачу отобранных объектов из ГС) и анализируются значения исследуемого признака для этих объектов. Точнее, для построения математической модели СЭ на основании эмпирических данных этот СЭ повторяется в одинаковых условиях n раз. Множество $x_1, x_2, \ldots, x_n$ исходов СЭ – наблюдаемых (выборочных) значений СВ ξ образует некоторое конечное подмножество множества Ω и называется ***n-выборкой*** (выборкой), а число элементов, входящих в выборку, – ***объемом выборки***.

Основное предположение математической статистики: выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются независимыми в совокупности одинаково распределенными (с функцией распределения $F(x)$ – теоретической функцией распределения) случайными величинами.

Аналогично определяется выборка и в случае, когда со СЭ связано несколько СВ, например выборка объема n из двумерной ГС есть совокупность $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ пар значений СВ ξ и η, принимаемых ими в n независимых повторениях СЭ.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке ГС, необходимо, чтобы объекты выборки «правильно» его представляли, т. е. выборка должна быть ***репрезентативной*** (представительной). Это требование выполняется, если все объекты ГС имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, т. е. при отборе сохраняется принцип случайности. Такую выборку называют ***случайной выборкой***.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется способ ее записи, при котором ее элементы упорядочены (как правило, в порядке не убывания): $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Разность между максимальным и минимальным элементами называется ***размахом выборки***:

$$\omega = x_{\max} - x_{\min}.$$

Статистический ряд. Статистическое распределение случайной величины

Пусть в выборке элемент x_i встречается n_i раз. Число n_i называется частотой элемента x_i, а $\frac{n_i}{n}$ – относительной частотой. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,$ где k – число различных элементов выборки. Последовательность пар $(x_i,\ n_i)$ называется ***статистическим рядом***. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы x_i, а вторая – их частоты n_i.

При большом объеме (больше 30) выборки ее элементы объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде ***интервального статистического ряда*** (табл. 10.1). Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивают на k непересекающихся интервалов. Число интервалов выбирается произвольно и, как правило, $6 \le k \le 20$. Вычисления значительно упрощаются, если интервалы имеют одинаковую длину $h \approx \frac{\omega}{k}$. Если в качестве выборочных значений берутся середины x_i^* полученных интервалов, то соответствующий интервальный статистический ряд называется ***группированным***. В дальнейшем будет рассматриваться именно этот случай. После того, как частичные интервалы выбраны, определяют частоты n_i^* – количество элементов выборки, попавших в i-й интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу), и относительные частоты $\frac{n_i^*}{n}$. Полученные данные сводятся в табл. 10.2.

Таблица 10.1

Интервальный статистический ряд

Интервалы наблюдаемых значений СВ ξ	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	…	$[x_{k-1}, x_k]$
Частоты	n_1^*	n_2^*	…	n_k^*

Таблица 10.2

Группированный статистический ряд

Середины интервалов	x_1^*	x_2^*	…	x_k^*
Частоты	n_1^*	n_2^*	…	n_k^*

Перечень наблюдаемых значений СВ ξ (или интервалов наблюдаемых значений) и соответствующих им относительных частот называется ***статистическим законом распределения*** СВ ξ (статистическое распределение выборки).

Графическое изображение статистических рядов

В ряде случаев для наглядного представления выборки используют полигон и гистограмму относительных частот (частот).

Гистограммой относительных частот (***частот***) для интервального ряда группированной выборки называют ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна соответствующей данному интервалу относительной частоте (частоте). Площадь гистограммы относительных частот равна 1.

При достаточно большом объеме выборки и достаточно малых интервалах группировки гистограмма относительных частот является статистической оценкой вида плотности распределения $p_\xi(x)$.

Полигоном частот группированной выборки называется ломаная с вершинами в точках (x_i^*, n_i^*), $i = \overline{1, k}$, а ***полигоном относительных частот*** – ломаная линия с вершинами в точках $\left(x_i^*, \dfrac{n_i^*}{n}\right)$, $i = \overline{1, k}$.

Если плотность распределения ГС достаточно гладкая функция, то полигон относительных частот является более хорошим приближением плотности, чем гистограмма. Гистограмму и полигон интервального статистического ряда удобно использовать для визуального подбора модели закона распределения СВ ξ.

Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения СВ ξ называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту наблюдения значений, меньших x $(\xi < x)$: $F^*(x) = \sum\limits_{x_i<x} \dfrac{n_i}{n}$. Таким образом, эмпирическая функция распределения является функцией распределения фиктивной СВ ξ_n, принимающей значение x_i^* с вероятностью $\dfrac{n_i}{n}$, $i = 1, ..., n$.

Эмпирическая функция распределения используется в качестве оценки теоретической функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ и обладает всеми свойствами функции распределения дискретной СВ:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ – неубывающая непрерывная слева кусочно-постоянная функция;

3) если x_1 – наименьшее, а x_n – наибольшее значения статистического ряда, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_n$.

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является случайной: для разных выборок она получается разной. Если график $F^*(x)$ строится по группированным данным, то скачки происходят в точках, соответствующих серединам интервалов группировки.

Выборочным средним $\overline{x}$ называется среднее арифметическое элементов выборки:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Для группированной выборки –

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i^*,$$

где x_i^* – середины интервалов группировки, а n_i^* – количество элементов выборки, попавших в i-й интервал.

Пример. По выборке 5, 2, 2, 1, 6, 3, 1, 2, 3, 5:

а) записать вариационный ряд;

б) составить статистический ряд;

в) записать статистический закон распределения СВ;

г) записать эмпирическую функцию распределения;

д) построить полигон частот.

Решение. а) вариационный ряд – 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6. Размах выборки $\omega = 6 - 1 = 5$;

б) подсчитав частоты различных значений в выборке, составим статистический ряд:

x_i	1	2	3	5	6
n_i	2	3	2	2	1

Объем выборки равен сумме частот наблюдаемых значений: $n = 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 10$;

в) заменив в таблице частоты на относительные частоты, получим статистический закон распределения СВ:

x_i	1	2	3	5	6
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

г) наименьшее выборочное значение 1, поэтому эмпирическая функция распределения равна нулю для всех $x \le 1$. Дальше ее значение изменяется каждый раз при переходе x через значения x_i, увеличиваясь на величину относительной частоты $\frac{n_i}{n}$. Наибольшее выборочное значение 6, поэтому эмпирическая функция распределения равна 1 при всех $x > 6$. Итак,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,2, & 1 < x \le 2, \\ 0,5, & 2 < x \le 3, \\ 0,7, & 3 < x \le 5, \\ 0,9, & 5 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 10.1.

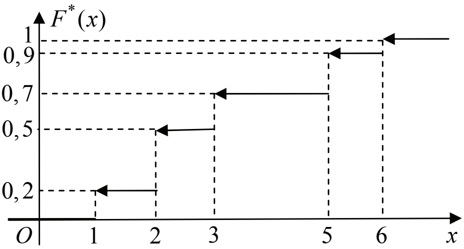


Рис. 10.1. График эмпирической функции распределения

д) полигон частот показан на рис. 10.2.

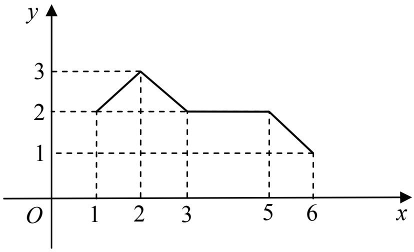


Рис. 10.2. Полигон частот

Пример. Построить гистограмму относительных частот и эмпирическую функцию распределения по данному интервальному ряду (табл. 10.3).

Таблица 10.3

Интервальный статистический ряд для задачи

Интервалы наблюдаемых значений СВ	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Частоты n_i	6	7	17	36	24	10

Решение. Объем выборки $n = 6 + 7 + 17 + 36 + 24 + 10 = 100$. Длина каждого интервала $h = 5$.

Для построения эмпирической функции распределения найдем середины интервалов x_i^* и относительные частоты $\frac{n_i}{n}$; для построения гистограммы относительных частот определим для каждого интервала значение $\frac{n_i}{nh}$. Дополним этими сведениями интервальный статистический ряд (табл. 10.4).

Таблица 10.4

Группированный и интервальный статистический ряд

Интервалы наблюдаемых значений СВ	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Середины интервалов x_i^*	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
Частоты n_i	6	7	17	36	24	10
$\frac{n_i}{n}$	0,06	0,07	0,17	0,36	0,24	0,1
$\frac{n_i}{nh}$	0,012	0,014	0,034	0,072	0,048	0,02

Гистограмма относительных частот и эмпирическая функция распределения представлены на рис. 10.3 и 10.4 соответственно.

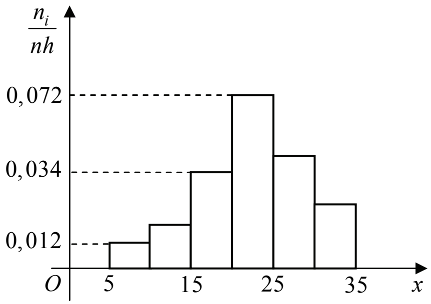


Рис. 10.3. Гистограмма относительных частот

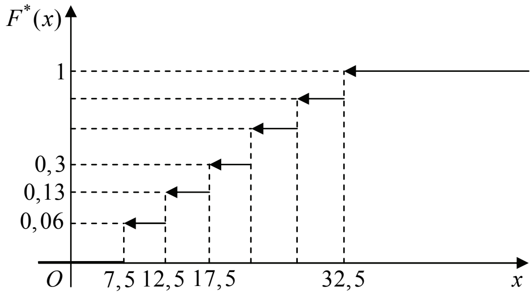


Рис. 10.4. Эмпирическая функция распределения

10.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные задачи математической статистики.

2. Что называется генеральной совокупностью (ГС), выборкой?

3. В чем заключается основное предположение математической статистики?

4. Что называется статистическим рядом, статистическим распределением случайной величины?

5. Перечислите основные виды графического представления статистических рядов.

6. Назовите вероятностные аналоги полигона и гистограммы относительных частот.

7. Какая функция называется эмпирической функцией распределения?

8. Перечислите основные свойства эмпирической функции распределения.

10.1.3. Практический минимум

1. По выборке 39, 41, 40, 40, 43, 41, 44, 42, 41, 41, 43, 42, 39, 40, 42, 43, 41, 42, 41, 39 требуется:

а) записать вариационный ряд;

б) составить статистический ряд;

в) записать статистическое распределение выборки;

г) построить полигон частот;

д) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

2. Построить: а) полигон относительных частот и б) график эмпирической функции распределения по выборке, представленной статистическим рядом:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

3. Результаты исследования предела прочности на сжатие 200 образцов металла представлены в виде интервального статистического ряда (табл. 10.5). Требуется построить: а) полигон и гистограмму относительных частот; б) график эмпирической функции распределения.

Таблица 10.5

Интервальный статистический ряд для задачи 3

Интервалы прочности, МПа	Частота n_i	Относительная частота (частотность) $\frac{n_i}{n}$
19–20	10	0,05
20–21	26	0,13
21–22	56	0,28
22–23	64	0,32
23–24	30	0,15
24–25	14	0,07

По виду гистограммы выдвинуть гипотезу о модели закона распределения исследуемой СВ (предел прочности на сжатие).

4. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график по выборке для распределения рабочих по тарифным разрядам:

Тарифный разряд	1	2	3	4	5
Количество рабочих	4	6	16	26	48

5. Построить гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения по данным интервального статистического ряда:

Границы интервалов	17–23	23–29	29–35	35–41	41–47	47–53	53–59
Частоты n_i	6	15	22	26	16	10	5

10.2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

10.2.1. Теоретический минимум

1. Точечные оценки параметров распределения и их основные свойства.
2. Интервальные оценки параметров распределения.
3. Доверительный интервал для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Точечные оценки параметров распределения и их основные свойства

Пусть закон распределения ГС известен с точностью до значений входящих в него параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Одна из задач математической статистики состоит в нахождении оценок неизвестных параметров по выборке. В качестве оценки параметра берут ту или иную функцию $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки (выборочных значений) – ***статистику***.

Задача оценивания неизвестного параметра θ состоит в построении приближенной формулы $\theta \approx u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – выборочная функция или статистика, а ее значение – ***оценка*** $\tilde{\theta}$ ***параметра*** θ, что обозначается $\tilde{\theta} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Оценки параметров подразделяются на ***точечные*** и ***интервальные***. Точечная оценка определяется одним числом, а интервальная – двумя числами (концами интервала, накрывающего оцениваемый параметр). Качество оценки характеризуется следующими основными свойствами.

1. Оценка $\tilde{\theta}$ называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру: $M[\tilde{\theta}] = \theta$. Разность $M[\tilde{\theta}] - \theta$ называется *смещением.*

2. Оценка $\tilde{\theta}$ называется ***состоятельной***, если при увеличении объема выборки n оценка $\tilde{\theta}$ сходится по вероятности к θ:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta - \tilde{\theta}| < \varepsilon) = 1.$$

3. Пусть $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$ – две различные несмещенные оценки параметра. Если для дисперсий $D[\tilde{\theta}_1]$ и $D[\tilde{\theta}_2]$ выполняется условие $D[\tilde{\theta}_1] < D[\tilde{\theta}_2]$, то говорят, что оценка $\tilde{\theta}_1$ более эффективна, чем оценка $\tilde{\theta}_2$. Оценка с наименьшей дисперсией называется ***эффективной***.

Кроме этих свойств имеются и другие. К сожалению, не всегда можно найти статистики, которые имели бы все указанные свойства. Формулы для вычисления приведены в табл. 10.6.

Выборочное среднее $\bar{x}$ характеризует центр распределения (рассеивания) изучаемой СВ и является несмещенной и состоятельной оценкой, а в случае выборки из нормального распределения – и эффективной оценкой для математического ожидания СВ.

Выборочная дисперсия характеризует степень разброса (рассеяния) выборочных значений относительно среднего и является состоятельной, но смещенной оценкой дисперсии изучаемой СВ. Если произведена выборка из ГС с известным средним m, то несмещенной оценкой для дисперсии будет статистика:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \; s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2.$$

Таблица 10.6

Формулы для расчета основных числовых характеристик выборки

Для негруппированной выборки	Для группированного статистического ряда
Выборочное среднее	
$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ либо $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i^*$ (10.1)
Выборочная дисперсия	
$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$ $D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2$	$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \overline{x})^2 n_i^*,$ $D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i^* - (\overline{x})^2$ (10.2)
Несмещенная оценка дисперсии $s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$ (10.3)	
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$ $s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \overline{x})^2 n_i^*,$ $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i^* - \frac{n}{n-1}(\overline{x})^2$ (10.4)

Интервальные оценки параметров распределения

Доверительной вероятностью, или ***надежностью, оценки*** называется вероятность γ, с которой выполняется неравенство $|\theta - \tilde{\theta}| < \varepsilon$, т. е. $\gamma = P(|\theta - \tilde{\theta}| < \varepsilon)$, где θ – оцениваемый параметр, ε – точность оценки.

Доверительным интервалом для параметра θ ГС называется интервал ($\tilde{\theta} - \varepsilon$, $\tilde{\theta} + \varepsilon$), который накрывает θ с вероятностью (надежностью) γ. В практике важную роль играет длина доверительного интервала, причем чем меньше его длина, тем точнее оценка. Если длина доверительного интервала достаточно велика, то оценка малопригодна для практики. Выбор доверительной вероятности определяется конкретными условиями. Обычно используются значения 0,90; 0,95; 0,99; 0,9973. Значение $\alpha = 1 - \gamma$ называется ***уровнем значимости***.

Доверительный интервал для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение

В случае выборки объема n из ГС нормально распределенной случайной величины ξ с *известной дисперсией* σ^2 доверительный интервал для математического ожидания m определяется следующим соотношением:

$$\overline{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{10.5}$$

где $u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ – точность оценки; n – объем выборки; α – уровень значимости; u_α – квантиль нормального распределения, удовлетворяющая уравнению $\Phi(u_\alpha) = \frac{\gamma}{2}$ и определяемая из таблицы функции Лапласа (табл. П2).

В случае выборки объема n из нормального распределения с *неизвестной дисперсией* σ^2 доверительный интервал для математического ожидания m находится по формуле

$$\overline{x} - t_{\alpha,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + t_{\alpha,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{10.6}$$

где s^2 – несмещенная оценка дисперсии; α – уровень значимости; $t_{\alpha,\, n-1}$ – квантиль распределения Стьюдента, удовлетворяющая уравнению $P(|t_{n-1}| \geq t_{\alpha,\, n-1}) = \alpha$ для СВ t_{n-1}, имеющей распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1$ (табл. П3).

Пример. По выборке 5, 2, 2, 1, 6, 3, 1, 2, 3, 5 найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную оценку дисперсии.

Решение. Составляем статистический ряд:

x_i	1	2	3	5	6
n_i	2	3	2	2	1

По формуле (10.1) вычисляем выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = 3.$$

С помощью формулы (10.2) рассчитываем выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{1}{10} \cdot (1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 1) - 3^2 = 2{,}8.$$

По формуле (10.3) находим несмещенную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{10}{9} \cdot 2{,}8 \ = \ 3{,}11,$$

несмещенная оценка σ (среднеквадратичного отклонения) $s = 1{,}7635$.

Следует отметить, что выборочные числовые характеристики являются характеристиками данной выборки, но не являются характеристиками распределения генеральной совокупности.

Пример. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и несмещенную оценку дисперсии по данному интервальному статистическому ряду:

Интервалы наблюдаемых значений СВ	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Частоты n_i	6	7	17	36	24	10

Решение. Для расчета воспользуемся формулами (10.1)–(10.3), где k – число интервалов; x_i^* – середина i-го интервала; n_i^* – частота наблюдений из i-го интервала. Итак,

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \cdot (7{,}5 \cdot 6 + 12{,}5 \cdot 7 + 17{,}5 \cdot 17 +$$
$$+ 22{,}5 \cdot 36 + 27{,}5 \cdot 24 + 32{,}5 \cdot 10) = 22{,}25,$$

$$D_в = \frac{1}{100} \cdot \Big((7{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 6 + (12{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 7 + (17{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 17 \ +$$
$$+ (22{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 36 + (27{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 24 + (32{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 10 \Big) =$$
$$= 40{,}6875,$$

$$s^2 = \frac{100}{99} \cdot 40{,}6875 = 41{,}1.$$

10.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется выборочной функцией (статистикой)?

2. В чем заключается задача оценивания неизвестного параметра?

3. Назовите типы оценок параметров. В чем заключается их отличие?

4. Перечислите основные свойства «хороших» оценок. В чем заключается суть этих свойств?

5. Какая оценка для математического ожидания является несмещенной и состоятельной? Запишите формулу для этой оценки.

6. Приведите формулу для несмещенной оценки дисперсии.

7. Какая оценка называется интервальной? Что называется доверительной вероятностью? доверительным интервалом?

8. Являются ли концы доверительного интервала постоянными величинами? случайными величинами?

9. Что происходит с длиной доверительного интервала при увеличении объема выборки? увеличении доверительной вероятности?

10. Как строится доверительный интервал для математического ожидания СВ, имеющей нормальное распределение?

10.2.3. Практический минимум

6. После 6 заездов автомобиля были получены следующие значения его максимальной скорости, м/с: 27, 38, 30, 37, 35, 31. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии максимальной скорости автомобиля.

7. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, было произведено 5 независимых измерений, результаты которых приведены ниже:

Номер измерения	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2858	2763

Найти несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если значение измеряемой величины: а) известно и равно 2800 м; б) неизвестно.

8. Оценить математическое ожидание нормального распределения с заданной надежностью 0,95, если среднеквадратическое отклонение равно 2 и по выборке объема 10 найдено выборочное среднее, равное 5,4.

9. Среднее значение расстояния до ориентира по четырем независимым измерениям равно 2250 м, среднеквадратическая ошибка измерительного прибора $\sigma = 40$ м, систематическая ошибка отсутствует. Найти с надежностью 95% доверительный интер-

вал для измеряемой величины, считая ошибку измерения нормально распределенной СВ.

10. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью 0,98 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ была 0,2, если среднеквадратическое отклонение этой СВ равно 4?

11. По данным интервального статистического ряда найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии s^2:

Границы интервалов	17–23	23–29	29–35	35–41	41–47	47–53	53–59
Частоты n_i	6	15	22	26	16	10	5

12. Определить доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения с надежностью $\gamma = 0{,}95$, если по выборке объема 12 найдены несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии: $\overline{x} = 16{,}8$, $s^2 = 2{,}25$.

Минимум для аудиторной работы

Методы статистического описания результатов наблюдения: 1; 2; 5.

Статистическая оценка неизвестных параметров распределения. Точечные и интервальные оценки: 6; 7; 8; 11.

10.2.4. Ответы

1. а) 39, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 44.

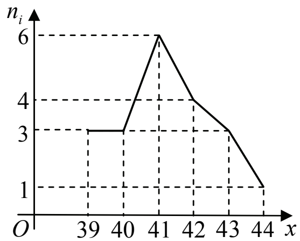
б)

x_i	39	40	41	42	43	44
n_i	3	3	6	4	3	1

в)

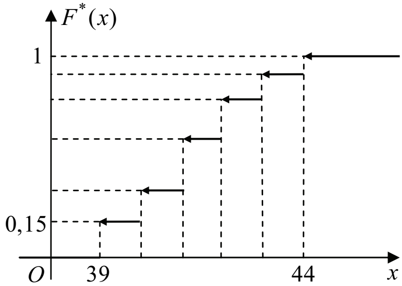
x_i	39	40	41	42	43	44
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,3	0,2	0,15	0,05

г)



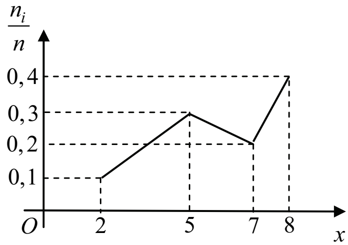
Полигон частот

д) $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 39,\\ 0{,}15, & 39<x\le 40,\\ 0{,}3 & 40<x\le 41,\\ 0{,}6, & 41<x\le 42,\\ 0{,}8, & 42<x\le 43,\\ 0{,}95, & 43<x\le 44,\\ 1, & x>44.\end{cases}$

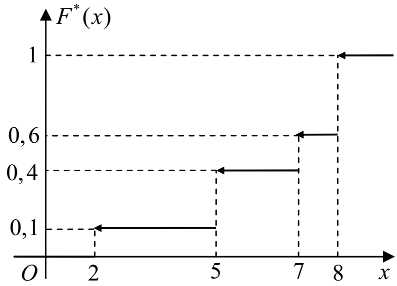


2. а)

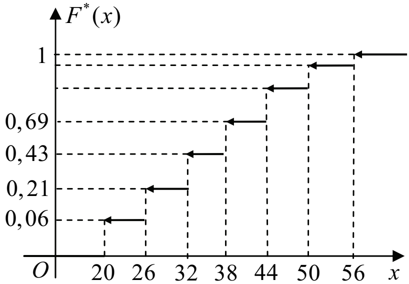
x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,3	0,2	0,4

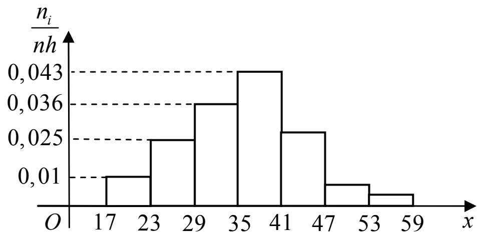


б) $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0{,}1, & 2<x\le 5,\\ 0{,}4, & 5<x\le 7,\\ 0{,}6, & 7<x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$



5.





6. $\bar{v} = 33$ м/с, $s^2 = 18{,}8$ м^2/с^2. **7.** а) $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2800)^2 = \frac{6439}{5} = 1287{,}8$;

б) $\bar{x} = 2809$ м, $s^2 = \frac{6034}{4} = 1508{,}5$ м^2. **8.** (4,16; 6,64). **9.** $P(|\bar{x} - m| < \varepsilon) =$

$= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}95$, $\varepsilon = 39{,}2$, (2210,8 м; 2289,2 м). **10.** $n \geq 2191$.
11. $\bar{x} = 36{,}86$, $s^2 = 84{,}87$. **12.** (15,85; 17,75).

10.3. СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

10.3.1. Теоретический минимум

1. Метод наименьших квадратов.
2. Подбор параметров линейной зависимости.

Метод наименьших квадратов

Пусть производится опыт, целью которого является исследование зависимости некоторой величины y от величины x. Предполагается, что эти величины связаны функциональной зависимостью

$$y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k).$$

Вид этой зависимости и требуется определить из опыта. Зависимость, полученная по результатам опытных данных, называется *эмпирической*. Задача отыскания эмпирической зависимости известна как задача сглаживания эмпирических данных.

Для решения таких задач обычно применяется расчетный метод, известный под названием «метод наименьших квадратов» (МНК), дающий возможность при *заданном виде* зависимости так выбрать ее числовые параметры, что кривая $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k)$ в определенном смысле наилучшим образом отображает экспериментальные данные. Согласно МНК, требование наилучшего согласования кривой $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k)$ и экспериментальных точек сводится к тому, чтобы ***сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от сглаживающей кривой обращалась в минимум***.

Вид зависимости (класс функций, которому должна принадлежать искомая функция $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k)$) может быть выбран на основе теоретических представлений о характере изучаемой зависимости или из геометрических соображений: на плоскости строят точки (x_i, y_i), $(i = \overline{1, n})$ – результаты наблюдений (точечная диаграмма) – и по характеру их расположения выбирают вид функциональной зависимости. После выбора вида зависимости параметры $a_1, a_2, ..., a_k$ находим из условия минимума суммы квадратов отклонений:

$$S(a_1, a_2, ..., a_k) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i, a_1, a_2, ..., a_k) - y_i)^2 \to \min.$$

Если функция $S(a_1, a_2, ..., a_k)$ является непрерывной и дифференцируемой по параметрам, то в точке минимума частные производные должны равняться нулю, т. е. искомые значения параметров должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, ...,\ \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \qquad (10.8)$$

Подбор параметров линейной зависимости

На практике часто встречается линейная зависимость y от x:

$$y = ax + b.$$

Тогда $S(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} ((ax_i + b) - y_i)^2$, где (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ – результаты наблюдений, и система (10.8) примет вид

$$\begin{cases} nb + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (10.9)$$

Если в качестве функции f выбраны многочлены более высоких степеней, то системы для определения параметров будут достаточно громоздкими, и в этом определенный недостаток МНК. Тем не менее этот метод широко применяется при статистической обработке результатов измерений.

Пример. По результатам наблюдений установить вид эмпирической зависимости y от x и методом наименьших квадратов найти $y = f(x)$:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	5	7

Решение. Наносим точки (x_i, y_i) на плоскость Oxy (рис. 10.5) и по их расположению замечаем, что они группируются вокруг прямой линии. Поэтому сглаживать экспериментальные данные будем линейной функцией: $y = ax + b$.

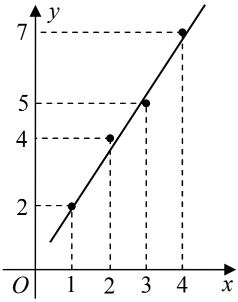


Рис. 10.5. Экспериментальные данные

Искомые коэффициенты a и b находим из системы (10.9), рассчитав предварительно необходимые суммы. Для удобства все вычисления заносим в табл. 10.7.

Таблица 10.7

Расчетная таблица

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	2	2	1	4
2	4	8	4	16
3	5	15	9	25
4	7	28	16	49
10	18	53	30	94

Подставляя полученные суммы в систему (10.9), имеем:

$$\begin{cases} 4b + 10a = 18, \\ 10b + 30a = 53. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a = 1{,}6$, $b = 0{,}5$ и уравнение сглаживающей линии $y = 1{,}6x + 0{,}5$, график которой изображен на рис. 10.5 (см. на с. 321).

10.3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Для решения какой задачи служит метод наименьших квадратов? В чем заключается идея метода?
2. Поясните, из каких соображений находится вид сглаживающей линии.
3. Запишите систему уравнений для нахождения параметров линейной эмпирической зависимости.

10.3.3. Практический минимум

1. При контроле качества пищевых продуктов для определения концентрации тех или иных веществ находят эмпирическое уравнение зависимости оптической плотности раствора от концентрации. Имеются данные для определения концентрации фосфора в мясных изделиях:

Концентрация раствора, мг/кг	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Оптическая плотность раствора	0,035	0,070	0,150	0,140	0,175

Построить корреляционное поле (точечную диаграмму) и график полученной методом наименьших квадратов эмпирической зависимости.

2. Исследовалась зависимость морозостойкости y кирпича от водопоглощения при атмосферном давлении x. Опытные данные приведены ниже:

y	30	76	41	60	54	65	40
x	15,4	13,7	15,1	15,4	14,2	14,1	15,1

Построить корреляционное поле и найти коэффициенты линейной эмпирической зависимости.

3. Исследовать эмпирическую зависимость времени валки дерева от его диаметра по результатам испытаний, которые приведены ниже:

Диаметр дерева, см	24	26	28	30	32	34	36
Время валки, с	49	53	54	56	61	62	65

4. Получить систему уравнений для нахождения параметров линейной эмпирической зависимости из условия минимума суммы квадратов отклонений.

Минимум для аудиторной работы

Линейная эмпирическая зависимость: 1; 3.

10.3.4. Ответы

1. $y = 1{,}75\,x + 0{,}009$. **2.** $y = -\,19{,}64\,x + 340{,}15$. **3.** $t = 1{,}45d + 13{,}8$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Значения $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблица П2

Значения $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452
0,01	0,004	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463
0,02	0,008	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888	1,62	0,4474
0,03	0,012	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484
0,04	0,016	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732
0,34	0,1331	0,74	0,2704	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767

Окончание табл. П2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981	3,20	0,499313
2,01	0,4778	2,31	0,4896	2,61	0,4955	2,91	0,4982	3,21	0,499336
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982	3,22	0,499359
2,03	0,4788	2,33	0,4901	2,63	0,4957	2,93	0,4983	3,23	0,499381
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984	3,24	0,499402
2,05	0,4798	2,35	0,4906	2,65	0,4960	2,95	0,4984	3,25	0,499423
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985	3,26	0,499443
2,07	0,4808	2,37	0,4911	2,67	0,4962	2,97	0,4985	3,27	0,499462
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986	3,28	0,499481
2,09	0,4817	2,39	0,4916	2,69	0,4964	2,99	0,4986	3,29	0,499499
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,4987	3,30	0,499517
2,11	0,4826	2,41	0,4920	2,71	0,4966	3,01	0,4987	3,31	0,499534
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,02	0,4987	3,32	0,499550
2,13	0,4834	2,43	0,4925	2,73	0,4968	3,03	0,4988	3,33	0,499566
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,04	0,4988	3,34	0,499581
2,15	0,4842	2,45	0,4929	2,75	0,4970	3,05	0,4989	3,35	0,499596
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,06	0,4989	3,36	0,499610
2,17	0,4850	2,47	0,4932	2,77	0,4972	3,07	0,4989	3,37	0,499624
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,08	0,4990	3,38	0,499638
2,19	0,4857	2,49	0,4936	2,79	0,4974	3,09	0,4990	3,39	0,499651
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	3,10	0,4990	3,40	0,499663
2,21	0,4864	2,51	0,4940	2,81	0,4975	3,11	0,4991	3,50	0,499767
2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	3,12	0,4991	3,60	0,499841
2,23	0,4871	2,53	0,4943	2,83	0,4977	3,13	0,4991	3,70	0,499892
2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	3,14	0,4992	3,80	0,499928
2,25	0,4878	2,55	0,4946	2,85	0,4978	3,15	0,4992	3,90	0,499952
2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979	3,16	0,4992	4,00	0,499968
2,27	0,4884	2,57	0,4949	2,87	0,4979	3,17	0,4992	4,50	0,499997
2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980	3,18	0,4993	5,00	0,4999997
2,29	0,4890	2,59	0,4952	2,89	0,4981	3,19	0,4993	$x > 5$	0,5

Таблица П3

Распределение Стьюдента (*t*-распределение)

γ	Вероятность												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,327	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,583
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,833
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,868	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,402	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1985.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1984.

3. Бугров, Я. С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1983.

4. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: Тетрасистемс, 2003. – 2 т.

5. Высшая математика: типовая учебная программа для высших учебных заведений по химико-технологическим, лесотехническим, полиграфическим специальностям / сост.: В. М. Марченко [и др.]. – Минск: БГТУ, 2009.

6. Ильин, В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М.: Наука, 1979.

7. Мантуров, О. В. Курс высшей математики / О. В. Мантуров, Н. М. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1986.

8. Методическое пособие по курсу «Высшая математика»: в 5 ч. / сост.: Е. А. Островский, Л. И. Жилевич, М. З. Дубкова. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1986–1990. – 5 ч.

9. Методическое пособие по разделу «Математическое программирование» курса «Прикладная математика» для студентов специальности 0902 / сост.: В. М. Марченко, В. И. Янович. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1987.

10. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2005. – 2 т.

11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2003. – 2 ч.

12. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учеб. пособие / под ред. М. И. Сканави. – М.: Высш. шк., 1978.

13. Трехуровневые задания по дисциплине «Высшая математика»: в 4 ч. / сост.: Ж. Н. Горбатович [и др.]. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1988–1991. – 4 ч.

14. Шипачев, В. С. Высшая математика: учеб. для нематематических специальностей вузов / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2003.

15. Айвазян, С. А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1983.

16. Блинова, Е. И. Планирование и организация эксперимента / Е. И. Блинова. – Минск: БГТУ, 2010.

17. Герасимович, А. Г. Математическая статистика: учеб. пособие / А. Г. Герасимович. – Минск: Выш. шк., 1983.

18. Ивченко, Г. И. Математическая статистика: учеб. пособие для втузов / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. – М.: Высш. шк., 1984.

19. Микулик, Н. А. Руководство к решению технических задач по теории вероятностей и математической статистике / Н. А. Микулик, Г. Н. Рейзина; под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Выш. шк., 1977.

20. Пустыльник, Е. И. Статистические методы анализа и обработки данных / Е. И. Пустыльник. – М.: Наука, 1968.

21. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 1: учеб. пособие / В. М. Марченко [и др.]; под ред. В. М. Марченко. – Минск: БГТУ, 2010.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Марченко Владимир Матвеевич
Асмыкович Иван Кузьмич
Борковская Инна Мечиславовна и др.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В 2-х частях

Часть 2

Учебное пособие

Редактор *Е. С. Ватеичкина*
Компьютерная верстка *Е. С. Ватеичкина*
Корректор *Е. С. Ватеичкина*

Подписано в печать 06.05.2014. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,7. Уч.-изд. л. 16,0.
Тираж 1200 экз. Заказ 145.

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
ЛП № 02330/12 от 30.12.2013.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Переплетно-брошюровочные процессы произведены
в ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Ул. Корженевского, 20, 220024, г. Минск. Заказ .