

М. А. Анкуда, ассист., И. О. Оробей, доц., канд. техн. наук,
В. В. Сарока, ст. препод., канд. техн. наук
(БГТУ, г. Минск)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОДИНА

Для оценки качественных параметров технологических процессов широкое распространение получили анализаторы, которые основаны на изучении интенсивности ЯМР сигналов. Математическое описание процессов, происходящих в электронных компонентах ЯМР измерителей, позволяет более точно изучить динамику происходящих процессов, провести анализ сигналов и оценить реакцию при различном внешнем воздействии.

Схема автодина приведена на рисунке 1. В состав схемы входят параллельный колебательный контур на L_a , C^*1 , $C3$, $C4$ с возможностью электронной регулировки резонансной частот с помощью варикапы $VD1$; истоковый повторитель, построенный на $VT1$; дифференциальный усилитель на транзисторах $VT2$, $VT3$; амплитудный детектор реализованный на $VD2$, $VD3$. Схема получает питание от стабилизатора напряжения +7В собранного на $VD6$ и $VT4$ и стабилизатора напряжения -3В на $VD5$ и $VT5$.

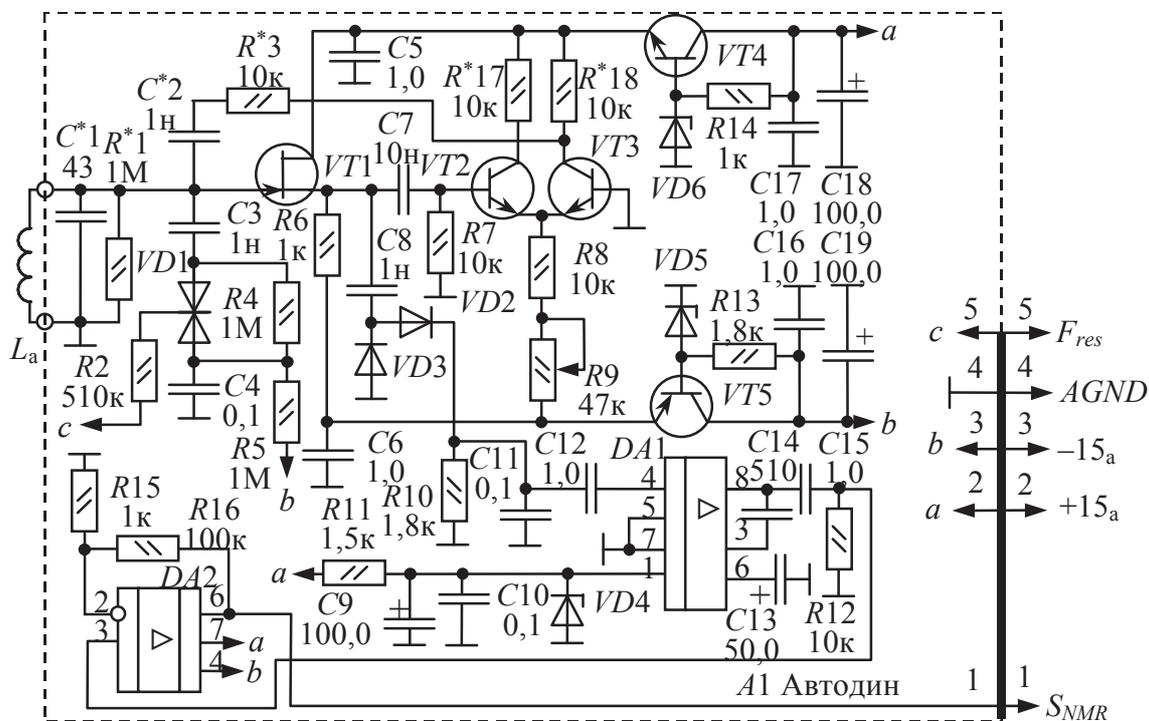


Рисунок 1 – Схема электрическая принципиальная автодина

Генератор колебаний включает в себя колебательный контур, повторитель и дифференциальный усилитель. При этом амплитуда

колебаний генератора будет зависеть от потерь, которые возникают в катушке L_a , и будет изменяться при периодическом прохождении через резонанс.

Подобная схема автодина используется для преобразования движения спинов в электрические сигналы во многих устройствах, что требует в свою очередь разработки ее модели с последующим анализом ее поведения при малых возмущениях, которые будут обусловлены прохождением резонансных условий.

Для получения модели составляются уравнения по первому закону Кирхгофа для узла, лежащего возле затвора VT1, и второму закону Кирхгофа по контуру от общей точки через генератор колебаний:

$$\begin{cases} i_L + i_{CD} + i_{R1} + i_{OC} = 0 \\ -u + u_{OC} + u_{K\perp} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Будет целесообразно выразить указанные токи через напряжение u :

$$i_{CD} = C_{CD} \frac{du}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int u dt; \quad i_{R1} = \frac{u}{R1} \quad (2)$$

После проведения некоторых расчетов для повторителя и дифференциального усилителя и выразив значения токов и напряжений для (1) получим:

$$\frac{1}{L} \int u dt + \frac{u}{R1} + C_D \frac{du}{dt} + \frac{u + i_{KVT3} \cdot R18}{R3 + R18} = 0 \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{L} \int u dt + \frac{u}{R1} + C_D \frac{du}{dt} + \frac{u}{R3 + R18} + \frac{i_{KVT3} \cdot R18}{R3 + R18} = 0 \quad (4)$$

Продифференцируем (4):

$$\frac{u}{L} + \frac{1}{R1} \cdot \frac{du}{dt} + C_D \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R3 + R18} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{R18}{R3 + R18} \cdot \frac{di_{KVT3}}{dt} = 0 \quad (5)$$

Разделим (5) на C_D и введём обозначение $\sqrt{\frac{1}{L \cdot C_D}} = \omega_0$,

где ω_0 – собственная частота контура. Получаем уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{C_D} \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R3 + R18} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{C_D} \cdot \frac{R18}{R3 + R18} \cdot \frac{di_{KVT3}}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = 0 \quad (6)$$

$$i_{KVT3} = -s \frac{u}{2} \quad (7)$$

где $s = \frac{dI_k}{dU_{be}}$ – крутизна транзистора VT3, Ом-1.

Аппроксимируя крутизну транзистора разложением в ряд до квадратичного члена вместо (6) получаем:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{C_z} \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R3 - R18} - \frac{R18}{(R3 - R18)} (5.5 \cdot 10^5 u^2 - 273.1u - 0.075) \right) \frac{du}{dt} - \omega_0^2 u = 0 \quad (7)$$

Решение уравнения (7), получаемое методом медленно меняющихся амплитуд, имеет вид

$$a(t) = 2 \sqrt{\frac{me^{mt}}{C_0 - 5.5 \cdot 10^5 k_2 e^{mt}}} \quad (8)$$

$$C_0 = \frac{4m - a^2 \cdot 5.5 \cdot 10^5 k_2}{a^2}, \quad a = \sqrt{4KTR\Delta f} \quad (9)$$

где Δf – ширина полосы;
 k – постоянная Больцмана;
 T – температура 293К;
 R – общее сопротивление;
 $a(t)$ – амплитуда напряжения.

$$m = 0,075k_2 - k_1 \quad (10)$$

$$k_1 = \frac{1}{C_z} \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R3 - R18} \right) \quad k_2 = \frac{1}{C_z (R3 + R18)} \quad (11)$$

В установившемся режиме (при $t \rightarrow \infty$) (8) можно переписать в виде:

$$u(t) = 2 \sin(\omega_0 t) \sqrt{\frac{me^{mt}}{C_0 - 5.5 \cdot 10^5 k_2 e^{mt}}} \quad (12)$$

Для получения временной зависимости сигналов ЯМР на выходе автодина нужно выявить влияние на его работу движения вектора намагниченности в катушке регистрации. При помещении образца в постоянное поле B_0 , направленное по Oz , и наложении на него переменного вращающегося с частотой ω в плоскости Oxy поля B_1 уравнениями движения вектора намагниченности являются уравнения Блоха:

$$dM_x/dt - \gamma(M_y B_z - M_z B_y) - M_x/T_2 = 0 \quad (13)$$

$$dM_y/dt - \gamma(M_z B_x - M_x B_z) - M_y/T_2 = 0 \quad (14)$$

$$dM_z/dt - \gamma(M_x B_y - M_y B_x) - M_z/T_1 = M_0/T_1 \quad (15)$$

где M_x, M_y, M_z – мгновенные значения проекций векторов намагниченности результирующего поля в образце на оси Ox, Oy, Oz ;

B_x, B_y, B_z – мгновенные значения проекций векторов индукции результирующего поля в образце на оси Ox, Oy, Oz ;

M_0 – равновесная намагниченность ($M_0 = \gamma_0 B_0$);

$B_z = B_0$.

Общее решение (13)–(15) затруднено в связи с необходимостью прохождения резонансных условий, что требует изменения во време-

ни $B_z = B_0$ или частоты ω . Поэтому переходят в ВСК с частотой ω вокруг Oz , полагая

$$M_x = u \cos \omega t - v \sin \omega t, \quad M_y = \mp (v \cos \omega t + u \sin \omega t), \quad (16)$$

где u – намагниченность, вращающаяся синфазно с B_r , А/м;

v – намагниченность, опережающая B_r на $\pi/2$, А/м.

Переходим к уравнениям для u и v :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{T_2} + v \Delta \omega = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{T_2} - u \Delta \omega = -|\gamma| B_1 M_z, \quad \frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} - |\gamma| v B_1 = \frac{M_0}{T_1}. \quad (17)$$

Перепишем первые два уравнения (17) через комплексную функцию

$F = v + ju$

$$dF/dt + (1/T_2 + j\Delta\omega)F = -|\gamma|B_1M_z. \quad (18)$$

Решение (18) $F = -|\gamma|B_1 \int_{-\infty}^t M_z(t') \exp\left(\frac{t-t'}{T_2} - j \int_t^{t'} \Delta\omega(t'') dt''\right) dt'$ при ма-

лом B_1 из-за $M_z \approx M_0$ принимает вид

$$v + ju = -|\gamma|B_1M_0 \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{t-t'}{T_2} - j \int_t^{t'} \Delta\omega(t'') dt''\right) dt'. \quad (19)$$

Спектр ЯМР снимают прохождением резонансных условий изменением поля B_0 при постоянной частоте ω или изменением ω при постоянном B_0 . На практике применяют как развертку полем, так и частотой. (19) анализируются при разных вариантах изменения B_0 или $\Delta\omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леше, А. Ядерная индукция / А. Леше; пер. с нем. под ред. П. М. Бородина. – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1963. – 684с.
2. Jacobson, V. A. Shapes of Nuclear Induction Signals / V. A. Jacobson, R. K. Wangsness // Physical Review. – 1948. –v. 73. – P. 942–946
3. Анкуда, М. А. Разработка и расчет параметров спинового генератора / М. А. Анкуда, В. В. Сарока // Труды БГТУ. Сер. VI. Физ.-мат. науки и информ. – 2005. – Вып. XIII. – С. 121–123