

Давидович Л.М., доц., канд. техн. наук;  
Кузьмицкий И.Ф., доц., канд. техн. наук;  
Савчук В.П., доц., канд. физ.-мат. наук  
(БГТУ, БГУ Минск)

## ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА КАЛАНДРИРОВАНИЯ

В настоящее время отсутствует математическая модель формирования толщины листа, что существенно сдерживает конструирование АСР процессом каландрования.

Из анализа реологических моделей, наиболее простой и в то же время достаточно полно отражающей основные свойства полимерного материала при формировании размеров листа, является модель Максвелла.

С целью линеаризации полученной нелинейной системы дифференциальных уравнений можно применить хорошо зарекомендовавший себя метод малого параметра.

Учитывая сложный характер протекания процесса, следует использовать метод декомпозиции, т. е. разбить процесс на участки с качественно различным характером поведения материала и четко выраженными граничными условиями. Такими участками могут быть зона принудительной деформации материала в межвалковом зазоре и свободная зона, соответствующая отрыву материала от валкового каландра, на котором происходит реализация напряжений.

При составлении модели необходимо получить уравнения, как в статическом, так и в динамическом режимах с учетом выделенных зон процесса.

Будем предполагать следующее:

1) длина валков велика по сравнению с толщиной материала в зазоре, что позволяет рассматривать плоское движение материала, т. е. считать, что компоненты скорости и давления определяются соотношениями

$$U = v(x, y);$$

$$P = P(x, y),$$

где  $U$  – скорость материала (среды);  $v$  – скорость валков;

2) валки имеют одинаковые радиусы и вращаются в противоположных направлениях с одинаковыми угловыми скоростями. Это допущение не имеет принципиального значения и вводится лишь для упрощения теоретических выкладок;

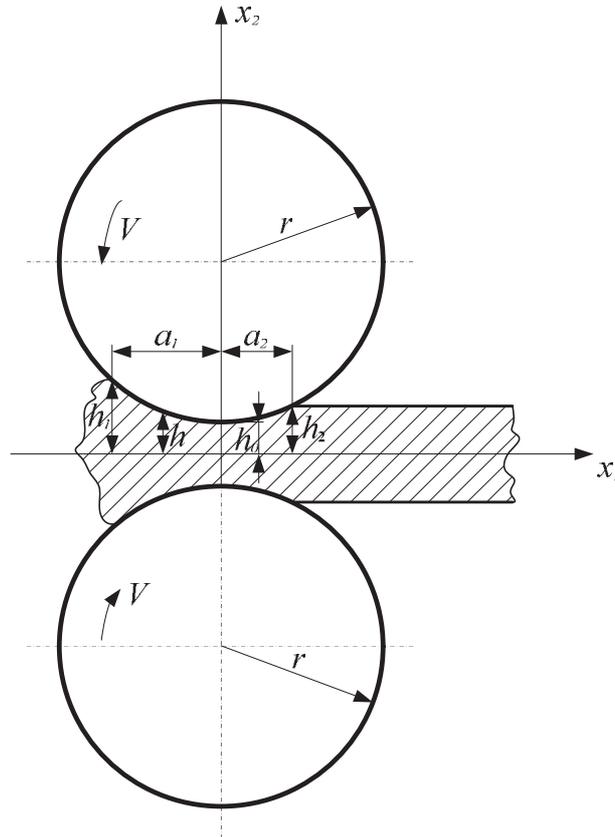
3) диаметр валков  $2r$  значительно меньше расстояния между ними  $2h_0$ ,

$$\frac{h_0}{r} = \varepsilon \ll 1;$$

4) температура материала за время прохождения зазора между валками практически не изменяется, т.е. процесс изотермический;

5) перерабатываемый материал несжимаем, т.е.  $\rho = \text{const}$ .

Движение среды рассматривается в плоскости  $X_1OX_2$ , т.е. в плоскости перпендикулярной осям валков (рисунок 1).



**Рисунок 1**

Тогда

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{DV_k}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial X_k} + \frac{\partial P_{k1}}{\partial X_1} + \frac{\partial P_{k2}}{\partial X_2} \\ \rho &= \frac{DU_k}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial X_k} + \frac{\partial P_{k1}}{\partial X_1} + \frac{\partial P_{k2}}{\partial X_2} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

$\rho$ ,  $P$  – плотность и давление среды;  $V_1$ ,  $V_2$  – составляющие скорости вдоль осей  $OX_1$ ,  $OX_2$  соответственно;  $P_{ki}$  – компоненты девиатора напряжений.

К уравнению (1) необходимо присоединить уравнение неразрывности, которое для плоского течения несжимаемой жидкости запишется

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}, \quad (2)$$

$$P_{ki} + t_0 \frac{DP_{ki}}{Dt} = \mu \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right), \quad (3)$$

где  $k, i = 1, 2$ ;  $t_0$  – постоянная, называемая временем релаксации напряжений в среде;  $\mu$  – коэффициент вязкости среды.

Уравнения (1) – (3) представляют собой замкнутую систему для нахождения  $P, U_k, P_{ki}$ . Для решения этой системы необходимо сформулировать граничные и начальные условия. Картина течения среды будет, очевидно, симметричной относительно  $OX_1$ , поэтому на этой оси будем иметь следующие условия:

$$x_2 = 0: P_{12} = P_{21} = 0, U_2 = 0 \quad (4)$$

В силу симметрии течения достаточно рассмотреть движение среды в области

$$a_1 \leq x_1 \leq a_2, \quad 0 \leq x_2 \leq f + f_1,$$

где  $x_2 = f(x_1) + f_1(t)$  – уравнение поверхности валка, соприкасающейся со средой;  $f_1(t)$  – расстояние на которое переместилась ось валка вдоль оси  $OX_2$  за время  $t$  (предполагается, что  $f_1(0) = 0$ ).

На поверхности валка принимаем условие прилипания, следовательно, на поверхности вращения валков скорость течения расплава полимера равна скорости вращения валка:

$$x_2 = f + f_1: U_\tau = V_1 + \frac{df_1}{dt} \sin \varphi, \quad U_n = \frac{df_1}{dt} \cos \varphi, \quad (5)$$

где  $U_\tau, U_n$  – касательная и нормальная составляющие скорости среды;  $V_1(t)$  – скорость любой точки поверхности валка (рисунок 2).

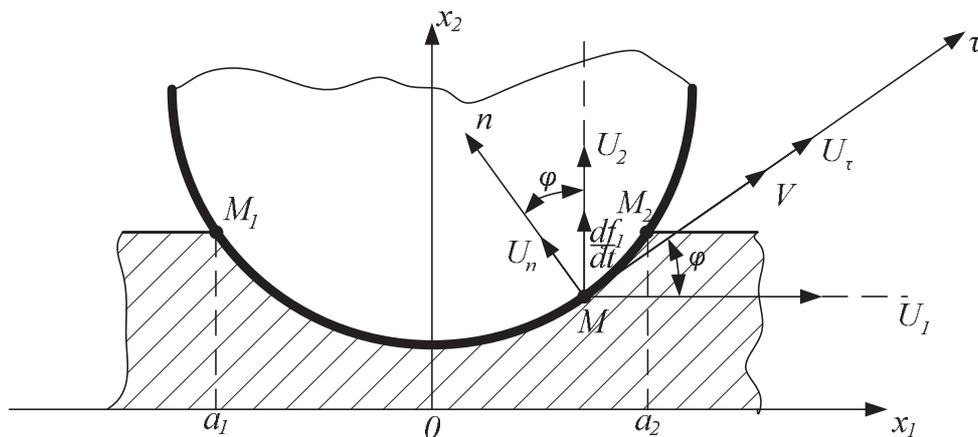


Рисунок 2

Представим, что  
 $U_n = U_2 \cos \varphi - U_1 \sin \varphi,$

$$U_{\tau} = U_1 \cos\varphi + U_2 \sin\varphi.$$

Тогда условие (5) разделив на  $\cos\varphi$  перепишем:

$$\begin{aligned} x_2 = f + f_1: \quad U_1 + U_2 \frac{df}{dx_1} &= V_1 \sqrt{1 + \frac{df}{dx_1} + \frac{df}{dt} \frac{df_1}{dx_1}}, \\ U_2 - U_1 \frac{df}{dx_1} &= \frac{df_1}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

В точке  $M_2 [f(a_2) + f_1(t), a_2(t)]$  среда отрывается от поверхности валка и при дальнейшем движении будет ограничиваться лишь свободной поверхностью, на которой  $P_{nn} = 0$ ,  $P_{n\tau} = 0$  ( $P_{nn}$ ,  $P_{n\tau}$  – проекция на нормаль и касательную к поверхности напряжения). Свободная поверхность в точке  $M_2$  плавно сопрягается с поверхностью валка, поэтому в точке  $M_2$  имеем условие:

$$x_2 = f(a_2) + f_1(t), x_1 = a_2(t): P_{nn} = 0, P_{n\tau} = 0. \quad (7)$$

В точке  $M_1 [f(a_1) + f_1(t), a_1(t)]$  среда захватывается валком и увлекаются в зазор благодаря прилипанию частиц среды к поверхности валка. Следовательно, в точке  $M_1$  имеет место лишь условие

$$x_2 = f(a_1) + f_1(t), x_1 = a_1(t): P_{nn} = 0. \quad (8)$$

Выразим  $P_{nn}$  и  $P_{n\tau}$  через давление  $P$  и компоненты девиатора напряжений получим:

$$P_{n\tau} = (-P_{11}\sin\varphi + P_{12}\cos\varphi)\cos\varphi + (-P_{12}\sin\varphi + P_{22}\cos\varphi)\sin\varphi,$$

$$P_{nn} = [(P + P_{11})\sin\varphi - P_{12}\cos\varphi]\sin\varphi + (-P_{12}\sin\varphi + (P + P_{22})\cos\varphi)\cos\varphi.$$

$$x_2 = f(a_2) + f_1(t), x_1 = a_2(t):$$

$$P \left[ 1 + \left( \frac{df}{dx_1} \right)^2 \right] + P_{22} + P_{11} \left( \frac{df}{dx_1} \right)^2 - P_{12} \frac{dt}{dx_1} = 0, \quad (9)$$

$$(P_{22} - P_{11}) \frac{df}{dx_1} + P_{12} \left[ 1 + \left( \frac{df}{dx_1} \right)^2 \right] = 0;$$

$$x_2 = f(a_1) + f_1(t), x_1 = a_1(t):$$

$$P \left[ 1 + \left( \frac{df}{dx_1} \right)^2 \right] + P_{22} + P_{11} \left( \frac{df}{dx_1} \right)^2 - P_{12} \frac{dt}{dx_1} = 0.$$

Таким образом, задача исследования движения среды в зазоре каландра состоит в решении уравнений (1) – (3) с условиями (4), (6), (7).