УДК 517.444

Л.Д. Яроцкая, канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ ТРЕТЬЕГО РОДА МНИМОГО ПАРАМЕТРА

Функция

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right] \tag{1}$$

называется модифицированной функцией Бесселя третьего рода или функцией Макдональда, где

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{2}$$

модифицированная функция Бесселя первого рода [1]. Известно, что функция $K_{i\tau}(x)$ имеет представление

$$K_{i\tau}(x) = \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,u}\cos(\tau u)\,du. \tag{3}$$

В работе изучаются свойства функции, определённой следующим несобственным интегралом при $x > 0$

$$K(\tau, x) = \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,u}\sin(\tau u)\,du. \tag{4}$$

Учитывая, что $K(-\tau, x) = -K(\tau, x)$, будем полагать $\tau > 0$.

Функции (3), (4) возникают в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов [2, 3] и преобразований по индексу [3,4]. Так, например, функция (3) является ядром преобразования Конторовича – Лебедева, простейшего в классе преобразований по индексу. Кроме того, установлено [3], что все известные в литературе преобразования по индексу композиционно связаны с преобразованием Конторовича – Лебедева в силу универсальной структуры их ядер.

1. Интегральное представление через контурные интегралы Меллина – Барнса.

Теорема. Справедливо следующее представление

$$K(\tau, x) = \frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}{2\pi^{3/2} i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\begin{matrix} s+i\tau, s-i\tau, s, 1-s \\ s+1/2 \end{matrix}\right)(2x)^{-s}\,ds, \tag{5}$$

где $0 < \gamma < 1/2$.

Доказательство. Осуществляя в (4) замену $t = \mathrm{sh}^2(u/2)$, имеем

$$K(\tau,x) = e^{-x}\int\limits_0^\infty e^{-2x\,\mathrm{sh}^2 u/2}\sin\tau u\,du =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2i}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2xt}}{\sqrt{t}}\left(\frac{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)^{2i\tau}}{\sqrt{t+1}} - \frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)^{2i\tau}}{\sqrt{t+1}}\right)dt.$$

Выражение в скобках в последнем интеграле представим как обратное преобразование Меллина произведения гамма − функций Эйлера, согласно формуле (8.4.2.13) из [2]. Получим

$$K(\tau,x) = \frac{e^{-x}}{2i}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2xt}}{\sqrt{t}}\frac{1}{2\pi^{3/2}i}\times$$

$$\times\int\limits_L \Gamma\left(s, s+1/2\right)\left(\Gamma\begin{pmatrix}1/2 - i\tau - s\\ s - i\tau + 1/2\end{pmatrix} - \Gamma\begin{pmatrix}1/2 + i\tau - s\\ s + i\tau + 1/2\end{pmatrix}\right)t^{-s}ds\,dt, \quad 0 < \mathrm{Re}\, s < 1/2.$$

Контур L выбран так, чтобы он отделял левую серию полюсов подынтегрального выражения от правых. Используя формулу дополнения для гамма − функции Эйлера

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)},$$

вычислим выражение в скобках

$$\frac{\Gamma\left(1/2 - i\tau - s\right)}{\Gamma\left(1/2 - i\tau + s\right)} - \frac{\Gamma\left(1/2 + i\tau - s\right)}{\Gamma\left(1/2 + i\tau + s\right)} = \frac{\dfrac{\pi}{\cos\pi(s+i\tau)} - \dfrac{\pi}{\cos\pi(s-i\tau)}}{\Gamma\left(1/2 - i\tau + s\right)\Gamma\left(1/2 + i\tau + s\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\pi\sin\pi i\tau\sin\pi s}{\cos\pi(s+i\tau)\cos\pi(s-i\tau)}}{\Gamma\left(1/2 + i\tau + s\right)\Gamma\left(1/2 - i\tau + s\right)} = 2i\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\frac{\Gamma\left(1/2 - i\tau - s\right)\Gamma\left(1/2 + i\tau - s\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}.$$

Далее, поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле и вычислив внутренний интеграл, получим (5).

2. Связь с функцией Макдональда посредством преобразований типа Гильберта [5].

Теорема 2. Справедливы представления:

$$K(\tau,x) = \frac{e^{-x}\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{y}K_{i\tau}(y)}{y-x}dy, \tag{6}$$

$$K(\tau,x) = \frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-y}K_{i\tau}(y)}{y+x}dy. \tag{7}$$

Доказательство. С учетом формул (8.4.23.5) и (8.4.2.6) [2] приведем (5) к следующему виду:

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}\operatorname{sh}\pi\tau}{2\pi^{3/2}i}\int_L \Gamma\left(\begin{matrix} s, & 1-s \\ 1/2+s, 1/2-s\end{matrix}\right)\frac{2\sqrt{\pi}}{\operatorname{ch}\pi\tau}\int_0^\infty e^y K_{i\tau}(y)(2y)^{s-1}\,dy\,(2x)^{-s}\,ds =$$

$$e^{-x}\operatorname{th}\pi\tau\int_0^\infty e^y K_{i\tau}(y)\frac{dy}{y}\frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma\left(\begin{matrix} s, & 1-s \\ 1/2+s, 1/2-s\end{matrix}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{-s} ds\,dy =$$

$$\frac{e^{-x}\operatorname{th}\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty e^y K_{i\tau}(y)\frac{dy}{y\left(1-x/y\right)}.$$

Контур $L=(\gamma-i\infty,\gamma+i\infty)$, $0<\gamma=\operatorname{Re}s<1/2$, выбран так, чтобы он отделял левую серию полюсов подынтегрального выражения от правых. Откуда и следует (6). Формула (7) доказывается аналогично, применяя (8.4.23.3) и (8.4.2.5) [2].

3. Представление в виде линейных комбинаций функций гипергеометрического типа.

Применяя формулу (8.4.51.10) [2] (теорему Слейтер) к (5) и свойства гамма − функции, получим представление функции (4) через функции гипергеометрического типа

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}}{\tau}\,{}_2F_2\left(1/2,1;1-i\tau,1+i\tau;2x\right)-\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi\tau}\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right],$$

где ${}_2F_2$ − гипергеометрическая функция, определённая рядом

$${}_2F_2\left(1/2,1;1-i\tau,1+i\tau;2x\right)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(1/2)_k}{(1-i\tau)_k(1+i\tau)_k}(2x)^k,$$

и $I_{i\tau}(x)$ − модифицированная функция Бесселя первого рода (2).

Полученные представления оказываются весьма эффективными при изучении свойств функции (4) и преобразований по индексу с этой функцией в ядре [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965–1967. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 1966. – 295 с.

2. Прудников, А. П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981–1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 1986. – 800 с.

3. Yakubovich, S. B. Index transforms / S. B. Yakubovich. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996. – 252 p.

4. Yakubovich, S.B On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel function / S.B. Yakubovich, L.D. Gusarevich (Yarotzkaya) // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 1998. – Vol. 1, № 3. – P. 297–309.

5. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 334 с.