

УДК 532.517

А. М. Волк, Е. В. Терешко

Белорусский государственный технологический университет

**АНАЛИЗ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТВЕРДУЮ ЧАСТИЦУ
В СПЛОШНОМ ПОТОКЕ**

Процессы разделения многофазных систем выступают составной частью многих технологических процессов в химической, пищевой, нефтехимической, микробиологической, энергетической и других отраслях промышленности. Характер движения частиц в сплошной среде является определяющим при сепарации, разделении фаз, тепломассоперенос и других процессах. Важным моментом для исследования движения частицы в потоке и особенно вблизи ограничивающей поверхности считается учет всех действующих на твердую частицу сил. Сравнительная оценка сил необходима и для исследования процесса осаждения частиц на фильтровальную поверхность. Анализ сил позволяет рассчитывать траекторию жидких и твердых частиц в газовых потоках, движение одиночных частиц в суспензии.

В данной работе исследована гидродинамика закрученного газового потока в цилиндрическом элементе, рассмотрены действующие на твердую сферическую частицу силы, как в основном потоке, так и при контакте с цилиндрической поверхностью. Составлена математическая модель и выполнен расчет движения твердых частиц. Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов разделения двухфазных потоков в вихревых аппаратах.

Ключевые слова: вихревые аппараты, сепарация, разделение фаз, закрученный поток, твердая частица, действующие силы, математическая модель, расчет движения.

A. M. Volk, E. V. Tereshko

Belarusian State Technological University

**ANALYSIS OF THE FORCES ACTING ON THE SOLID PARTICLES
IN A CONTINUOUS STREAM**

Separation processes of multiphase systems are an integral part of many processes in chemical, food, petrochemical, microbiological, energy and other industries. The nature of the motion of particles in a continuous medium is determining during the separation, phase separation, heat and mass transfer and other processes. The important point for the study of motion of a particle in the flow and especially near the boundary surface is the consideration of all the forces acting on solid particle. The comparative evaluation of the forces is needed for the study of the process of deposition of particles on the filter surface. The analysis allows to calculate the trajectory of the forces of liquid and solid particles in gas streams, the movement of individual particles in the suspension.

In this paper, the hydrodynamics of the gas flow in the cylindrical element has been investigated, forces acting on the solid spherical particle both in the main flow and in contact with the cylindrical surface have been considered. The mathematical model and calculation of the motion of the solid particles have been done. The results can be used for studies of processes in two-phase flow separation in vortex devices.

Key words: vortex devices, separation, phase separation, the swirling flow, particulate matter, the acting forces, mathematical model, calculation of motion.

Введение. Процессы разделения многофазных систем – составная часть многих технологических процессов в химической, пищевой, нефтехимической, микробиологической, энергетической и других отраслях промышленности [1]. Это отделение кристаллов солей от раствора, гранул полимеров от жидкой фазы, обезвоживание мелких фракций твердых материалов, улавливание жидких фракций в газожидкостных потоках, классификация материалов и т. д. Характер движения частиц в сплошной среде является определяющим при сепарации, разделении фаз, массообмене и других процессах [2, 3]. При исследовании данных процессов необхо-

дим учет всех действующих на твердую частицу сил.

Основная часть. Принимаем, что частицы имеют сферическую форму. Гидродинамика установившегося движения закрученного газового потока внутри цилиндра радиуса R описывается уравнениями Навье – Стокса неразрывности в цилиндрической системе координат r, φ, z [3]. Для осесимметричных потоков принимают $\frac{\partial W}{\partial \varphi} \cong 0$. При движении закрученных потоков внутри цилиндра радиальная составляющая скорости W_r незначительна и, как

правило, в расчетах не учитывается. Для газовых потоков также не принимается во внимание сила тяжести. Тогда из уравнения неразрывности следует $\frac{\partial W_z}{\partial z} = 0$. Это означает, что

профиль осевой составляющей скорости не изменяется по длине цилиндра. Принятые условия соответствуют коротким трубам и подтверждаются экспериментальными исследованиями [3].

С учетом граничных условий и непрерывности профиля получена касательная составляющая скорости газового потока в зависимости от относительного радиуса $\tilde{r} = r / R$ [4]:

$$W_\varphi = \begin{cases} \frac{3}{4} \bar{W}_\varphi \frac{1 + \tilde{r}_{\max}}{\tilde{r}_{\max}^2} \tilde{r}, & 0 \leq \tilde{r} < \tilde{r}_{\max}, \\ \frac{3}{4} \frac{\bar{W}_\varphi}{1 - \tilde{r}_{\max}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \right), & \tilde{r}_{\max} \leq \tilde{r} \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

где \tilde{r}_{\max} – значение, соответствующее максимуму W_φ .

Касательная составляющая \bar{W}_φ средней скорости \bar{W} газового потока зависит от ее среднерасходной составляющей \bar{W}_z в элементе и угла закрутки потока статическим закручивателем [4]. Можно принять, что $\bar{W}_\varphi = \bar{W}_z \operatorname{tg}(k\beta)$. Здесь k – коэффициент, учитывающий отклонение угла закрутки потока от угла наклона лопастей завихрителя. Анализ экспериментальных данных для центробежных элементов с лопастным завихрителем, имеющим угол наклона лопастей к горизонту в пределах 30–45°, дает значения $k = 0,83$.

Напишем в цилиндрической системе координат уравнения движения частицы (1) под воздействием закрученного потока:

$$\begin{cases} m_a \left(\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) = F_r - F_\Pi, \\ m_a \left(\frac{dV_\varphi}{dt} + 2 \frac{V_\varphi V_r}{r} \right) = F_\varphi - F_{\text{TP}}^\varphi, \\ m_a \frac{dV_z}{dt} = m_a g + F_z + F_{\text{TP}}^z - F_A, \\ I_a \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial t} = M_{\text{TP}}^\varphi + M_\tau^\varphi, \\ I_a \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = M_{\text{TP}}^z + M_\tau^z. \end{cases} \quad (2)$$

Осевая составляющая закрученного газового потока задана зависимостью [5]:

$$W_z = \bar{W}_z \left(\frac{1}{2} + \tilde{r}^2 \right). \quad (3)$$

Схема действующих сил представлена на рис. 1. Рассматриваем случай контакта частицы с проницаемой поверхностью. В основном потоке отсутствует лишь сила трения.

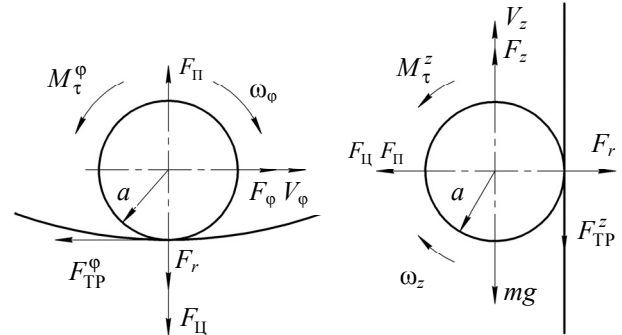


Рис. 1. Схема действующих на частицу сил

Опишем силы, входящие в уравнение движения [1, 5–8].

1. Сила воздействия внешних силовых полей – сила тяжести

$$\vec{F}_g = m_a g = \rho_a V_a \vec{g}. \quad (4)$$

2. Силы, обусловленные неравномерным распределением давления по поверхности частицы при ее движении в сплошном потоке:

а) сила Архимеда

$$\vec{F}_A = \rho_0 V_a \vec{g}; \quad (5)$$

б) сила, вызванная изменением давления при ускорении несущего потока или торможении

$$\vec{F}_{\text{УСК}} = \rho_0 V_a \frac{d(\bar{W} - \vec{V})}{dt}. \quad (6)$$

При малых плотностях среды по сравнению с плотностью частицы силой Архимеда можно пренебречь. Для малого изменения относительной скорости потока $\vec{F}_{\text{УСК}} = 0$;

в) гидродинамическая сила Жуковского возникает в результате неравномерного обтекания частицы набегающим потоком или при вращении частицы в однородном поле – эффект Магнуса.

Исследователи разделяют силы Жуковского и Магнуса, различают воздействие и направление сил Магнуса в зависимости от того, закручивается частица внешними силами или несущим потоком.

Выполним анализ воздействия данной силы на частицу в сплошном потоке. Выберем декартову систему координат с началом в центре частицы и связанную с движущейся частицей: x – по касательной к поверхности траектории движения, y – по нормали. Поле скоростей потока на поверхности частицы, обусловленное ее вращением с угловой скоростью ω , будет:

$$\vec{\Phi} = \{-\omega y; \omega x; 0\}.$$

Разобьем частицу на элементарные цилиндры плоскостями, параллельными плоскости движения на расстоянии dz друг от друга. По формуле Жуковского найдем подъемную силу, действующую на элементарный цилиндр с учетом направления:

$$d\vec{F}_{\Pi} = -\rho_{\Gamma} \oint \vec{\Gamma} \times (\vec{W} - \vec{V}) dldz.$$

По формуле Стокса от интеграла по контуру перейдем к интегралу по поверхности:

$$d\vec{F}_{\Pi} = -\rho_0 \iint_{S_i} \text{rot}(\vec{W} - \vec{\Phi}) \times (\vec{W} - \vec{V}) ds dz.$$

Проинтегрировав элементарные силы по всему объему частицы, получим:

$$\vec{F}_{\Pi} = \int d\vec{F}_{\Pi} = -\rho_{\Gamma} \iiint_{V_a} \text{rot}(\vec{W} - \vec{\Phi}) \times (\vec{W} - \vec{V}) dV_a.$$

Для вращающейся частицы $\text{rot} \vec{\Phi} = 2\vec{\omega}$, поэтому

$$\vec{F}_{\Pi} = -\rho_{\Gamma} \iiint_{V_a} (\text{rot} \vec{W} - 2\vec{\omega}) \times (\vec{W} - \vec{V}) dV_a. \quad (7)$$

Полученная формула обобщает все известные зависимости для поперечной силы, верна для произвольных потоков и частиц произвольной формы, однозначно определяет направление силы, показывает, что подъемная сила обусловлена только циркуляцией потока по контуру и не зависит от причин возникновения последней.

Если считать градиент поля скоростей потока по сечению частицы постоянным, то из последней формулы получим в цилиндрической системе координат составляющую подъемной силы, направленную по нормали к цилиндрической поверхности:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\Pi}^N = m_a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rW_{\phi})}{\partial r} - 2\omega_z \right) (W_{\phi} - V_{\phi}) \vec{e}_r + \\ + m_a \left(\frac{\partial W_z}{\partial r} + 2\omega_{\phi} \right) (W_z - V_z) \vec{e}_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Значение градиента вычисляется в точке расположения центра частицы. Как показывает полученная зависимость, подъемная сила может принимать большие значения вблизи поверхности, где значительно возрастает градиент скорости.

3. Сила гидродинамического воздействия $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_{\phi} \vec{e}_{\phi} + F_z \vec{e}_z$ потока, движущегося с некоторой скоростью относительно частицы, будет:

$$\vec{F} = \zeta \cdot \frac{1}{2} \rho_{\Gamma} |\vec{W} - \vec{V}| (\vec{W} - \vec{V}) \pi a^2. \quad (9)$$

Коэффициент сопротивления ζ зависит от режима движения частицы и определяется числом Рейнольдса:

$$\text{Re}_a = \frac{|\vec{W} - \vec{V}| a}{\nu}.$$

Для нахождения коэффициента сопротивления более удобной является зависимость [6]:

$$\zeta = \frac{24(1 + 0,17 \text{Re}_a^{2/3})}{\text{Re}_a}. \quad (10)$$

4. Силы, возникающие в результате взаимодействия поверхности частицы с жидкостью или с ограничивающей поверхностью:

а) силы сопротивления вращению, вызванные касательными напряжениями вязкой жидкости на поверхности частицы

$$\vec{M}\omega = -8\pi\mu a^3 \vec{\omega}. \quad (11)$$

Результирующий вращающий момент равен геометрической сумме составляющих моментов, обусловленных интенсивностью вихря поля скоростей несущей среды и вращением частицы

$$\begin{aligned} \vec{M} = 4\pi\mu a^3 (\text{rot} \vec{W} - 2\vec{\omega}) = \\ = 3\pi V_a (\text{rot} \vec{W} - 2\vec{\omega}); \end{aligned} \quad (12)$$

б) силы трения при контакте движущейся частицы с ограничивающей поверхностью

$$\vec{F}_{\text{ТР}} = -k_{\text{ТР}} \left| \vec{F}_n \right| \frac{\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a}}{|\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a}|}. \quad (13)$$

Направление этой силы зависит от направления скорости точки контакта. Точка контакта движется со скоростью, равной сумме поступательной и вращательной скоростей.

Сила трения создает вращательный момент. Если вектор \vec{a} направить от центра частицы в точку касания, то

$$\vec{M}_{\text{ТР}} = -\vec{F}_{\text{ТР}} \times \vec{a}. \quad (14)$$

Нормальная составляющая учитывает все силы, действующие по нормали к поверхности:

$$\vec{F}_N = -(\vec{F}_g^n + \vec{F}_r + \vec{F}_{\Pi} + \vec{F}_{\Pi}^N). \quad (15)$$

Центробежная сила без учета ускорения присоединительной массы будет:

$$F_{\Pi} = m_a \frac{V_{\phi}^2}{r}. \quad (16)$$

Полученный анализ сил позволяет рассчитывать траекторию жидких и твердых частиц в газовых потоках, движение одиночных частиц в суспензии.

Выполним расчет движения сферических частиц в вертикальном цилиндрическом элементе при следующих исходных данных:

- средняя расходная скорость газа $\bar{W}_z = 20$ м/с;
- угол закрутки потока $\beta = 35^\circ$;
- диаметр пронизаемого элемента $D = 1,5$ м, длина $L = 1$ м;
- частицы полиэтилена и полистирола плотностью $\rho_a = 950-1150$ кг/м³.

Система дифференциальных уравнений движения сферической частицы (1) решалась численными методами с учетом рассмотренных сил. Результаты расчета движения частицы, составляющие ее линейной скорости и угловой скорости вращения приведены на рис. 2.

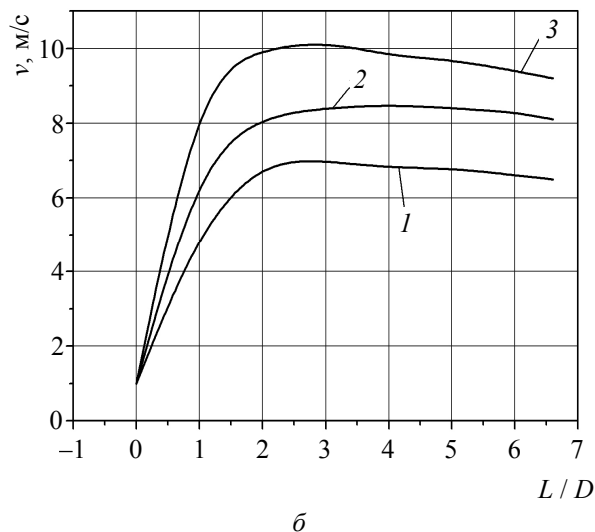
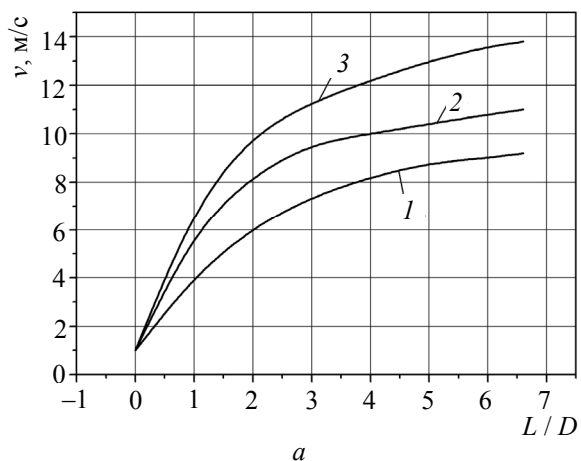


Рис. 2. Скорость частицы по длине элемента ($\rho_a = 950$ кг/м³):
 а – осевые составляющие; б – касательные составляющие:
 1 – $a = 1$ мм; 2 – $a = 2$ мм; 3 – $a = 3$ мм

Как показывают выполненные расчеты, преобладающими являются центробежная и подъемная силы, направленные к стенке. Поэтому одиночная частица движется по винтовой траектории в контакте с поверхностью. Возникающая сила трения создает вращательное движение, которое, в свою очередь, обуславливает возникновение одной из составляющих подъемной силы – силы Магнуса. Если скорость частицы меньше скорости обтекаемого ее газа, то сила Магнуса направлена к стенке.

Закключение. Составлена математическая модель и выполнен расчет движения твердых частиц под воздействием закрученного газового потока в цилиндрическом элементе. Исследована гидродинамика газового потока и рассмотрены действующие на твердую частицу силы, как в основном потоке, так и при контакте с цилиндрической поверхностью.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов разделения двухфазных потоков в вихревых аппаратах.

Обозначения. a – диаметр частицы, м; \bar{G} – циркуляция скорости, м/с; D – диаметр цилиндра, м; \bar{e} – единичный вектор; $F_{УСК}$ – сила, обусловленная ускорением несущего потока, Н; F_A – сила Архимеда, Н; F_g – сила тяжести, Н; $F_{П}$ – подъемная сила, Н; F_C – сила Стокса, Н; F_N – нормальная составляющая действующих сил, Н; $F_{ТР}$ – сила трения, Н; $F_{Ц}$ – центробежная сила, Н; F_ϕ, F_r, F_z – составляющие силы гидродинамического воздействия, Н; g – ускорение свободного падения, м/с²; $k_{ТР}$ – коэффициент трения; L – длина цилиндрического элемента, м; m – масса частицы, кг; M_τ – вращающий момент на поверхности частицы, Н/м; R – радиус, м; $\tilde{r} = r/R$ – безразмерная радиальная координата; Re – число Рейнольдса; t – время, с; V_ϕ, V_z, V_r – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости движущейся частицы соответственно, м/с; V_a – объем частицы, м³; W_ϕ, W_z, W_r – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости газового или жидкостного потока соответственно, м/с; \bar{W}_z – средняя скорость газа, жидкости, м/с; x, y, z – прямоугольная система координат; β – угол, коэффициент; $\pi = 3,14159\dots$, отношение длины окружности к диаметру; ζ – коэффициент сопротивления; μ – коэффициент динамической вязкости, Н · с/м²; ν – коэффициент кинематической вязкости, м²/с; ρ – плотность потока, кг/м³; ρ_a – плотность частицы, кг/м³; τ – касательные напряжения, Н/м²; ϕ, r, z – цилиндрическая система координат; ω – угловая скорость, с⁻¹; Φ – поле скоростей.

Литература

1. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
2. Кутепов А. М., Латкин А. С. Вихревые процессы для модификации дисперсных систем. М.: Наука, 1992. 250 с.
3. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1988. 588 с.
4. Марков В. А., Волк А. М., Ершов А. И. Исследование оттока жидкости через отверстия прямоточно-центробежного элемента // Инженерно-физический журнал. 1991. Т. 61, № 1. С. 82–87.
5. Щукин В. К., Халатов А. А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. М.: Машиностроение, 1982. 199 с.
6. Медников Е. М. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 176 с.
7. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975. 378 с.
8. Пирумов А. Н. Аэродинамические основы инерционной сепарации. М.: Госстройиздат, 1961. 124 с.

References

1. Nigmatullin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]: in 2 parts. Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1, 464 p. Part 2, 360 p.
2. Kutepov A. M., Latkin A. S. *Vikhrevyye protsessy dlya modifikatsii dispersnykh system* [Vortex processes for the modification of disperse systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 250 p.
3. Gupta A., Lillie D., Sayred N. *Zakruchennyye potoki* [Swirling flows]. Moscow, Mir Publ., 1988. 588 p.
4. Markov V. A., Volk A. M., Ershov A. I. Research outflow of fluid through the holes direct-flow centrifugal element. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics], 1991, vol. 61, no. 1, pp. 82–87 (In Russian).
5. Shchukin V. K., Khalatov A. A. *Teploobmen, massoobmen i gidrodinamika zakruchennykh potokov v osesimmetrichnykh kanalakh* [Heat transfer, mass transfer and hydrodynamics in swirling currents in axisymmetric channels]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1982. 199 p.
6. Mednikov E. M. *Turbulentnyy perenos i osazhdeniye aerorozley* [Turbulent transport and deposition of aerosols]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 176 p.
7. Busroyd R. *Techeniye gaza so vzveshennymi chastitsami* [Gas flow with suspended particles]. Moscow, Mir Publ., 1975. 378 p.
8. Pirumov A. N. *Aerodinamicheskiye osnovy inertsionnoy separatsii* [Aerodynamic bases of inertial separation]. Moscow, Gosstroj Publ., 1961. 124 p.

Информация об авторах

Волк Анатолий Матвеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

Терешко Елена Владимировна – магистр физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tereshko@belstu.by

Information about the authors

Volk Anatoliy Matveevich – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Tereshko Elena Vladimirovna – master of Physical and Mathematical Sciences, assistant of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tereshko@belstu.by

Поступила 05.03.2015