

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.031.43-044.962

А. С. Кобайло, Н. А. Жилияк

Белорусский государственный технологический университет

МЕТОДИКА СИНТЕЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ТРЕБУЕМЫМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрены некоторые проблемы, возникающие при использовании обобщенных математических моделей для создания моделирующих комплексов. Формулируется задача синтеза математических моделей с требуемыми свойствами как задача формирования множества усеченных моделей, позволяющих на их основе проектировать программные и аппаратные средства моделирующих комплексов, обеспечивающих формирование процессов с требуемыми характеристиками. Для решения поставленной задачи предлагается метод, основанный на использовании характеристических логических функций (ХЛФ), связывающих булевы переменные, отождествленные с параметрами модели, и элементов логико-комбинаторного подхода к структурному синтезу сложных систем. Непосредственно синтез математических моделей с требуемыми свойствами осуществляется путем преобразования графа алгоритма реализации исходной (базовой) математической моделью в соответствии с полученными векторами параметров, обеспечивающих удовлетворение совокупности требуемых свойств. В результате выполнения различных преобразований над исходным графом получаем множества графов алгоритмов реализации усеченных математических моделей со свойствами. И далее выполняем обратный переход для каждого из графов от топологии и его спецификации к аналитическому выражению математической модели с требуемыми свойствами. Рассмотренная методика синтеза математических моделей с заданными характеристиками использовалась при синтезе специализированных вычислительных устройств для формирования отраженных сигналов.

Ключевые слова: моделирующий комплекс, характеристическая логическая функция, алгоритм, граф, булевы переменные, математическая модель, метод.

A. S. Kobaylo, N. A. Zhilyak

Belarusian State Technological University

THE METHOD OF SYNTHESIS OF MATHEMATICAL MODELS WITH THE DESIRED PROPERTIES

Some problems arising from the use of generalized mathematical models to create a simulation complexes are considered in this article. We formulate the problem of synthesis of mathematical models with the required properties submitted as the task of forming a plurality of truncated-models, allowing them to design software and hardware simulation complexes providing formation processes required characteristics. To solve this problem we propose a method based on the use of characteristic logic functions linking Boolean variables, we identify lennye-model parameters, and elements of logic-combinatorial approach to structural synthesis of complex systems. The direct synthesis of mathematical models with the required properties is carried out by converting the initial implementation of the algorithm graph (base) a mathematical model according to the received vector of parameters, ensuring the satisfaction of the aggregate properties required. As a result of the various changes in the original graph, we obtain a number of sets of graphs algorithms of implementation truncated mathematical models with the properties. Furthermore, we perform the reverse transition for each of the graphs on the topology and its specification to the analytical expression of the mathematical model with the desired properties. The considered method of synthesis of mathematical models with certain characteristics was used in the synthesis of specialized computing devices to generate return signals.

Key words: Synthesis, function, algorithm, graph, model, signal, Boolean variables, mathematical model method.

Введение. Разработка и создание моделирующих комплексов (программных, аппаратных, программно-аппаратных) для решения за-

дач образования, обучения операторов сложных технических систем, испытаний вновь создаваемого оборудования с целью установления

его соответствия эксплуатационно-техническим характеристикам основываются на математических моделях процессов, воздействующих на объект исследований в реальных условиях его эксплуатации или являющихся компонентами среды реальной деятельности субъектов обучения [1].

В то же время в ряде случаев цель использования моделирующего комплекса может быть достигнута с применением более простых и дешевых технических или программных средств, чем вычислительная система, реализующая обобщенную (базовую) математическую модель соответствующего процесса. Примером являются исследования, в частности, испытания технических подсистем или контроль их отдельных функций, не требующие наличия данных обо всей системе, в состав которой входит данная подсистема. В основу разработки таких средств могут быть положены некоторые упрощенные (частные) математические модели, учитывающие специфику проводимых исследований и содержащие только (или преимущественно) параметры, обеспечивающие требуемые в соответствии с данной спецификой свойства модели. Рассмотрим методику решения задачи формирования таких моделей, основанную на формальных методах синтеза и алгоритмах, реализующих эти методы.

Основная часть. Сформулируем задачу формирования математических моделей для моделирующих комплексов с ограниченной функциональностью как задачу синтеза математических моделей с требуемыми свойствами.

Под задачей синтеза математических моделей вычислительных процессов с требуемыми свойствами будем понимать задачу, заключающуюся в формировании множества усеченных моделей, полученных из базовой модели вычислительного процесса путем выделения ее параметров, способствующих достижению требуемых свойств и исключению ее параметров, препятствующих их достижению [2].

Для решения данной задачи предлагается метод, основанный на использовании характеристических логических функций (ХЛФ), связывающих булевы переменные, отождествленные с параметрами модели, и элементов логико-комбинаторного подхода к структурному синтезу сложных систем.

Рассмотрим математическую модель процесса в виде

$$Y = F(\overline{X_N}), \quad (1)$$

где Y – вектор выходных данных; $\overline{X_N}$ – вектор параметров модели.

Необходимо найти множество частных (усеченных) моделей, полученных путем выде-

ления тех параметров модели, которые обеспечивают требуемые свойства.

Свойства модели задаются векторами строками P_i переменного размера для каждого из элементов вектора-столбца Q классификационных признаков $q_i \leftrightarrow P_i$. Здесь $q_i, i = 1, \dots, I$ – элементы вектора признаков; $p_i^k, k = 1, \dots, K_i$ – элементы векторов свойств P_i .

Вектор возможных значений (свойств) i -го признака имеет вид

$$\overline{P}_i = (p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^{K_i}).$$

При этом каждое свойство $p_i^k, k = \overline{1, K}$ обеспечивается включением в выражение модели (1) множества параметров

$$X'(i, k) = \{x'_1(i, k), x'_2(i, k), \dots, x'_{N_{ik}}(i, k)\} \quad (2)$$

и невключением в это выражение множества параметров

$$X''(i, k) = \{x''_1(i, k), x''_2(i, k), \dots, x''_{M_{ik}}(i, k)\}, \\ [X'(i, k) \cup X''(i, k)] \subset X, \quad (3)$$

где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ – множество параметров модели (1).

Синтез математических моделей с требуемыми свойствами будем осуществлять в два этапа. На первом этапе сформируем множество векторов параметров математических моделей с требуемыми свойствами, на втором для выбранного вектора из числа полученных на первом этапе (или каждого из векторов) сформируем соответствующую этому вектору усеченную математическую модель.

Этап 1. Установим взаимнообратное соответствие между параметрами модели (1) и булевыми переменными $x_n \leftrightarrow y_n = \{0, 1\}$.

Введем понятие характеристической логической функции.

Характеристической логической функцией свойства p_i^k будем называть функцию f_i^k , принимающую значение, равное единице, если модель соответствует требуемым свойствам, и нулю в противном случае.

Характеристическая логическая функция свойства p_i^k формируется как конъюнкция логических переменных, соответствующих параметрам модели из множества (2), совместно включаемых в выражение математической модели с требуемыми свойствами, знак дизъюнкции объединяет булевы переменные, отождествленные с параметрами из того множества, наличие которых в выражении модели не является необходимым для достижения ее заданных свойств, знак инверсии устанавливается над

переменными, отождествленными с параметрами модели из множества (3).

Характеристической логической функцией совокупности свойств $\{p_i^{k_i}\}$ называется функция, принимающая значение, равное единице, при наличии у модели всех требуемых свойств, и нулю, если хотя бы одно из свойств отсутствует.

ХЛФ совокупности свойств формируется на основе следующего положения.

Если $f_1^{k_1}, f_2^{k_2}, \dots, f_J^{k_J}$ – характеристические логические функции свойств $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_J^{k_J}$ соответственно, то характеристическая логическая функция набора требуемых свойств имеет вид

$$F(f_i^{k_i}) = f_1^{k_1} \wedge f_2^{k_2} \wedge \dots \wedge f_J^{k_J}.$$

Справедливость данного положения доказана в [2].

На основе ХЛФ совокупности требуемых свойств формируется множество векторов параметров математических моделей с требуемыми свойствами. В каждый из этих векторов включаются параметры, соответствующие булевым переменным, при единичном значении которых на одном из наборов ХЛФ совокупности требуемых свойств принимает единичное значение.

Таким образом, результатом выполнения первого этапа является формирование множества векторов параметров математических моделей с требуемыми свойствами $\{X_r(N_r)\}$.

Этап 2. Наличие набора параметров математической модели, гарантирующих соответствие модели требуемым свойствам, дает основание получить искомую модель путем преобразования графа вычислительного алгоритма реализации базовой модели. Данные преобразования базируются на следующих положениях.

Для формирования графа алгоритма реализации математической модели $F(\bar{x})$ с требуемыми свойствами необходимо над парой вершин u и v графа алгоритма реализации базовой математической модели $G = (V, E): e_0 = (u, v), u \leftrightarrow$ «Ввод x », $x_u \notin X_r(N_r)$, где $X_r(N_r)$ – множество элементов вектора параметров требуемых свойств $\bar{X}_r(N_r)$, выполнить операцию простого элементарного гомоморфизма.

Если во множестве вершин V' графа $G' = (V', E')$, полученного путем выполнения простого элементарного гомоморфизма над вершинами графа $G = (V, E)$ алгоритма реализации базовой модели, вершина v' является образом вершин v и u и в графе $G = (V, E)$ (u, v) – единственная дуга, входящая в вершину v , то для построения графа алгоритма реализации математической модели с требуемыми свойствами над каждой из пар вершин $v'_i, w'_{i|\bar{1}, I}$ выполняется операция

простого элементарного гомоморфизма, где w_i – i -я вершина, которой поставляет данные вершина v' I – количество дуг, выходящих из вершины v' .

Действительно, если во множестве вершин графа $G = (V, E)$ вершина v соответствует односторонней операции обработки параметра, поставленной ей вершиной u , то во множестве вершин преобразованного графа $G' = (V', E')$, который не содержит вершины $u' \leftrightarrow u$, образ v' вершины v выполняет «пустую» операцию над отсутствующими данными, поэтому любая из пар вершин $v', w_{i, i=\bar{1}, I}$ свертывается в одну вершину w''_i , которая становится их образом.

Соответствующее преобразование представлено на рис. 1.

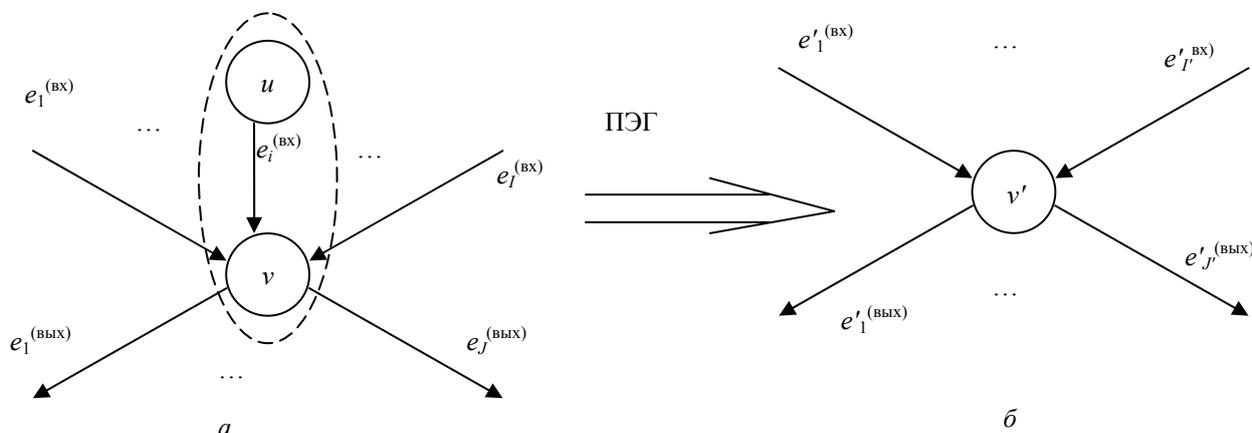


Рис. 1. Преобразование подграфа G_k :
 а – подграф графа G_k до преобразования, б – преобразованный подграф G'_k

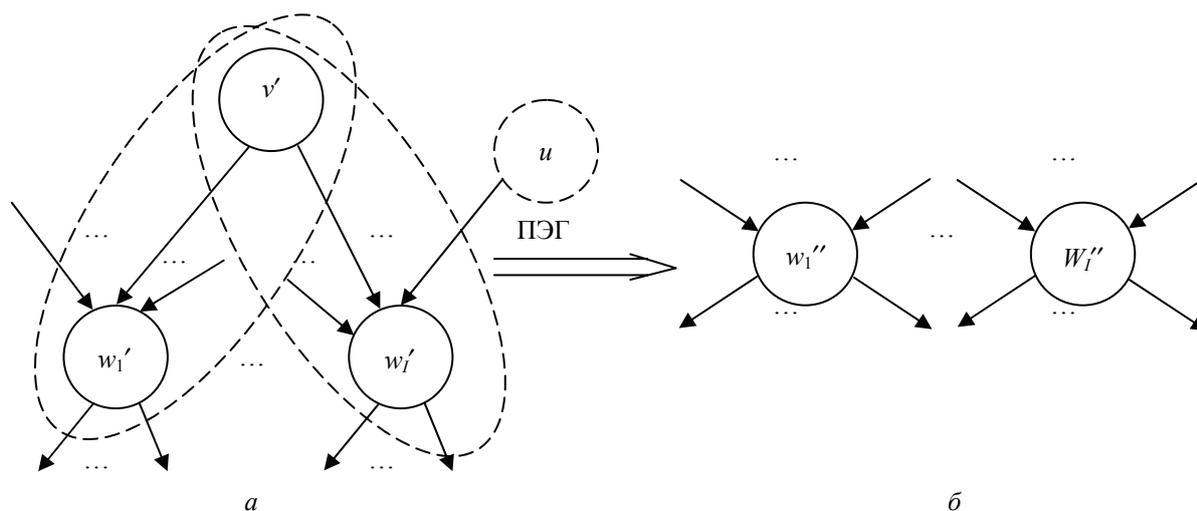


Рис. 2. Преобразование подграфа G_k при одноместной операции $\varphi \leftrightarrow u$:
 a – подграф после первого преобразования; \bar{b} – вторично преобразованный подграф

Если в результате преобразования графа $G = (V, E)$ алгоритма реализации базовой математической модели количество входных дуг вершины v' меньше, чем требуемая емкость операции $\varphi \leftrightarrow v'$, то для получения графа алгоритма реализации математической модели с требуемыми свойствами необходимо выполнить операцию простого элементарного гомоморфизма над каждой из пар вершин $v', w'_i, i = \overline{1, I}$, где w'_i и I имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае (рис. 2, 3).

С учетом приведенных положений реализация предложенного метода синтеза математических моделей с требуемыми свойствами предусматривает выполнение следующей последовательности действий:

1. Формирование множества N -мерных векторов параметров модели с требуемыми свойствами.

В качестве исходных данных процедуры используются: аналитическое выражение исходной математической модели $Y = F(X_n)$, набор характеристических логических функций $\{f_i^k\}$, массив $\{k_i\}$.

Для реализации процедуры применяются ранее представленные данные о ХЛФ, и при этом получаем совокупность векторов параметров $\{X_i(\overline{N}_r)\}$.

2. Построение графа математической модели вычислительного процесса с требуемыми свойствами.

Исходными данными являются: аналитическое выражение базовой математической модели $Y = F(X)$, вектор параметров этой модели X_n , векторы параметров с требуемыми свойствами $\{X_r(N_r)\}$.

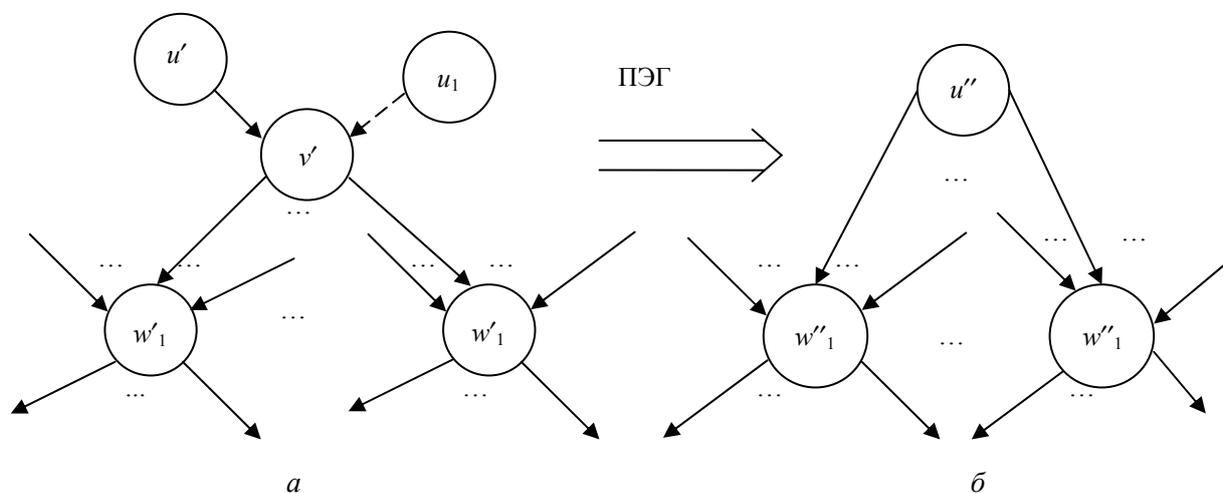


Рис. 3. Преобразование подграфа G_k при использовании операций $\varphi \leftrightarrow v$ более одного аргумента:
 a – подграф G_k после первого преобразования; \bar{b} – результат вторичного преобразования подграфа G_k

Процедура выполняется этапами:

а) построение графа G вычислительного алгоритма реализации базовой модели $Y = F(X)$;

б) для каждого из векторов X_r (N_r) преобразование графа G с целью получения множества графов $\{G_r = (V_r, E_r)\}$ алгоритмов реализации усеченных математических моделей со свойствами $\{N_r\}$; при этом для каждого полученного графа формируется спецификация путем удаления элементов идентификации операций, отождествленных с вершинами, поставляющими данные в каждой паре свертываемых дуг графа G другому преобразу того же образа во множестве вершин V_r .

3. Формирование математических моделей с требуемыми свойствами.

Для каждого из графов $\{G_r\}$ обратный переход от топологии и его спецификации к ана-

литическому выражению математической модели с требуемыми свойствами.

Заключение. Рассмотренная методика синтеза математических моделей с заданными характеристиками использовалась при синтезе специализированных вычислительных устройств для формирования отраженных сигналов. Синтезированные устройства по сравнению с устройствами, синтезированными на основе базовой математической модели известными методами синтеза [2], обладают следующими свойствами: простота, низкие себестоимость, энергопотребление, вес, габариты, высокая надежность, технологичность, обусловленная возможностью реализации всех структурных составляющих средствами цифровой вычислительной техники.

Литература

1. Кобайло А. С. Применение теории синтеза вычислительных систем реального времени на примере радиосигналов // Труды БГТУ. 2014. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 135–137.
2. Кобайло А. С. Теория синтеза вычислительных систем реального времени. Минск: БГТУ, 2010. 258 с.

References

1. Kobaylo A. S. The application of the theory of synthesis of computing real-time systems on the example of radio. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2014, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 135–137 (In Russian).
2. Kobaylo A. S. *Teoriya sinteza vychislitel'nykh sistem real'nogo vremeni* [Theory synthesis of computing real-time systems]. Minsk: BSTU Publ., 2010. 258 p.

Информация об авторах

Кобайло Александр Серафимович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kac_53@mail.ru

Жияк Надежда Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gh_nadya@mail.ru

Information about the authors

Kobaylo Aleksandr Serafimovich – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kac_53@mail.ru

Zhilyak Nadezhda Aleksandrovna – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gh_nadya@mail.ru

Поступила 12.03.2015