

УДК 621.383.29:621.514.015

В. И. Никитенок¹, С. С. Ветохин²¹Белорусский государственный университет²Белорусский государственный технологический университет**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ СЛАБЫХ
ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Счетчики фотонов широко используются в настоящее время в системах обнаружения и измерения слабых световых сигналов. Детекторами таких счетчиков служат фотоэлектронные умножители, диссекторы, лавинные фотодиоды и их сборки. В этих фотодетекторах осуществляется внутреннее умножение первичных фотоэлектронов за счет вторичной электронной эмиссии или лавинный механизм усиления в полупроводнике. Образующиеся на выходе детектора импульсы являются сигналами о приходе фотонов. Вместе с ними на выходе могут появляться импульсы, обусловленные шумами самого фотоприемника или сопровождающим сигнал световым фоном.

В работе рассматривается случай оптимального обнаружения слабых оптических сигналов, когда на выходе приемника излучения наблюдается стационарная пуассоновская последовательность импульсов, представляющая собой либо чистый фон, либо смесь полезного сигнала с фоном. В качестве анализируемых данных используется экспоненциальное распределение интервалов между соседними импульсами последовательности. В системах автоматической обработки информации поддержание постоянного уровня ложной тревоги связано с трудностями принципиального характера, вызванными изменениями интенсивности фона. В статье представлен анализ устойчивости показателей качества обнаружения в этих условиях.

Ключевые слова: счетчик фотонов, фотоприемник, обнаружение сигналов, слабый световой сигнал, вероятность ложной тревоги.

V. I. Nikitsionak¹, S. S. Vetokhin²¹Belarusian State University²Belarusian State Technological University**ON OPTIMAL DETECTION OF WEAK OPTICAL SIGNALS**

Photon counters are common by used in the systems of very weak optical signals detection and measurement. Photomultiplier tubes, dissectors, avalanche photo diodes and their arrays are the detectors in such counters. The internal multiplication of initial photoelectrons by secondary electron emission or avalanche mechanism is a feature of these detectors. The pulses that occur at the output of a detector signalize about a photon coming. Simultaneously, the pulses that are produced by the noise processes of a photodetector or light background could appear at the detector output.

The case of the optimal detection of weak optical signals, when one can obtain stationary Poisson series of pulses at the output of a detector, which contains only background or its mixture with the signal, is considered in the paper. The exponential distribution of intervals between pulses was used for calculations.

The instability of background was outlined as the main reason of a principal difficulty for an automatic detection system to hold a constant level of false alarm probability. Hence, the stability of indexes of detection quality in these systems was analyzed.

Key words: photon counters, photodetector, signal detection, weak optical signal, false alarm probability.

Введение. При обнаружении слабых оптических сигналов на выходе фотоприемника наблюдается последовательность импульсов в виде стационарного или простейшего пуассоновского потока (ППП) с интенсивностью λ_0 (прием чистого шума) или $\lambda_1 = \lambda_c + \lambda_0$ (прием смеси сигнала с шумом) [1, 2]. Временные интервалы между соседними импульсами t_1, \dots, t_m – это независимые выборочные значения с экспоненциальным законом распределения [3]. Таким образом, в зависимости от рассматриваемых выборочных значений

ППП представим законом Пуассона или экспоненциальным законом. Оба представления имеют право на практическое применение. Отметим, в теории и практике обнаружения слабых оптических сигналов используется первое представление. Рассмотрим оптимальный прием ППП в случае экспоненциального распределения:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

Основная часть. При оптимальном приеме ППП в случае использования распределения (1)

фиксируется количество принимаемых импульсов. Случайным оказывается время обнаружения. Принятие решения на обнаружение эквивалентно проверке гипотезы H_0 о том, что $\lambda = \lambda_0$ против альтернативы H_1 – параметр распределения $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$. В соответствии с критерием Немана – Пирсона логарифм отношения правдоподобия, определяющий алгоритм оптимального приема ППП [4], с учетом (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \ln l(t_1, t_2, \dots, t_m) &= \sum_{i=1}^m \ln(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_i} / (\lambda_0 e^{-\lambda_0 t_i})) = \\ &= m \ln(\lambda_1 / \lambda_0) - (\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^m t_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Откуда следует вариант правила выбора решения: принимается решение γ_1 – параметр распределения равен λ_1 (принимается смесь сигнала с шумом) при выполнении неравенства:

$$\begin{aligned} \ln l(t_1, t_2, \dots, t_m) \leq c_0 \quad \text{или} \\ \sum_{i=1}^m t_i \leq (m \ln(\lambda_1 / \lambda_0) - c_0) / (\lambda_1 - \lambda_0) = c, \end{aligned} \quad (3)$$

где c_0 , c – пороги решения (обнаружения), в противном случае принимается решение γ_0 – параметр распределения равен λ_0 (принимается чистый шум). При этом оптимальное обнаружение состоит в измерении величин интервалов между импульсами ППП, их суммировании и сравнении с порогом, т. е. с порогом сравнивается время поступления фиксированного количества m импульсов ППП.

При использовании распределения (1) в оптимальном обнаружителе измеряется время T прихода фиксированного количества m импульсов ППП, при использовании закона Пуассона – количество импульсов, поступивших за фиксированное время T . С другой стороны, в ППП интенсивность потока равна $\lambda = m / T$. И если интенсивность потока постоянна, то для принятия решения на обнаружение можно за случайную переменную взять m , зафиксировав T , или T , зафиксировав m : очевидна статистическая эквивалентность обоих алгоритмов обнаружения.

Найдем условные вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения оптимального алгоритма приема. Для (3) под знаком применимо [5] гамма-распределение с параметрами m и λ . Для него математическое ожидание и дисперсия распределения записываются так:

$$E\{t\} = m / \lambda, \quad V\{t\} = m / \lambda^2. \quad (4)$$

При $m \gg 1$ гамма-распределение аппроксимируется нормальным с параметрами (4) [5]. Поэтому условная вероятность ложной тревоги находится через интегралы вероятностей [3]:

$$\begin{aligned} F &= P(-\infty < t < c) = \Phi\{(c - E_0) / \sqrt{V_0}\} = \\ &= \Phi\{(c - m / \lambda_0) / (\sqrt{m} / \lambda_0)\} = \\ &= \Phi\left(c \lambda_0 / \sqrt{m} - \sqrt{m}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где E_0 , V_0 – соответственно математическое ожидание и дисперсия статистики (3) при приеме шума. Тогда порог обнаружения:

$$c = \sqrt{m} / \lambda_0 (\sqrt{m} - \Phi^{-1}(1 - F)), \quad (6)$$

здесь $\Phi^{-1}(x)$ – функция, обратная интегралу вероятности $\Phi(x)$.

Условная вероятность правильного обнаружения:

$$\begin{aligned} D &= P(-\infty < t < c) = \Phi\{(c - E_1) / \sqrt{V_1}\} = \\ &= \Phi\{(c - m / (\lambda_c + \lambda_0)) / (\sqrt{m} / (\lambda_c + \lambda_0))\} = \\ &= \Phi\left(c (\lambda_c + \lambda_0) / \sqrt{m} - \sqrt{m}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где E_1 , V_1 – соответственно математическое ожидание и дисперсия статистики (3) при приеме смеси сигнала с шумом.

Тогда из (6) и (7):

$$D = \Phi\left(g \sqrt{m} - (1 + g) \Phi^{-1}(1 - F)\right), \quad (8)$$

здесь $g = \lambda_c / \lambda_0$. Из (8) следует требуемое значение m для обеспечения заданных D и F при располагаемом g :

$$m = ((\Phi^{-1}(D) + (1 + g) \Phi^{-1}(1 - F)) / g)^2. \quad (9)$$

Расчеты по (8) и (9) представлены на рис. 1–3. Очевидно, условные вероятности правильного обнаружения в диапазоне 0,5–0,9 при вероятностях ложной тревоги 10^{-4} – 10^{-6} обеспечиваются:

– для малого отношения сигнала к шуму ($g = 0,1$, рис. 1) при довольно большом количестве импульсов ППП – $m = 1681$ – 4225 ;

– при $g = 1$ (рис. 2) и $g = 2$ это количество существенно уменьшается и составляет $m = 55$ – 117 и $m = 31$ – 60 соответственно;

– для $D = 0,9$ (рис. 3) при уменьшении отношения сигнала к шуму на порядок (от 1 до 0,1) объем выборки увеличивается более чем на порядок: для $F = 10^{-4}$ от 76 до 2886 (увеличение в 38 раз), для $F = 10^{-5}$ от 96 до 3568 (в 37 раз), для $F = 10^{-6}$ от 116 до 4238 (в 36 раз);

– требуемое количество импульсов ППП m (рис. 3) растет с уменьшением задаваемой вероятности ложной тревоги: при $F = 10^{-6}$ объем выборки увеличивается в 1,5 и 1,2 раза по сравнению со случаем $F = 10^{-4}$ и $F = 10^{-5}$ соответственно.

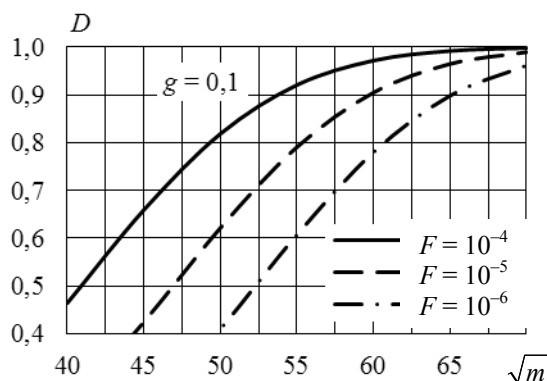


Рис. 1. Рабочие характеристики обнаружителя при малых g

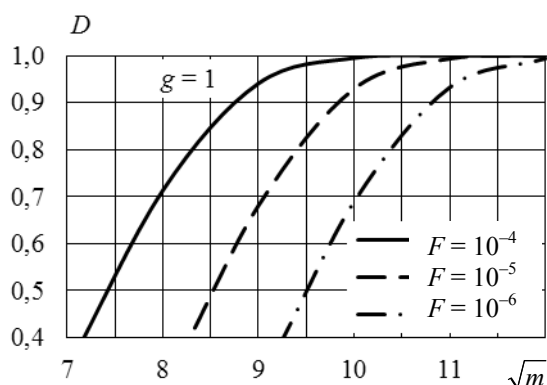


Рис. 2. Рабочие характеристики обнаружителя при средних значениях g

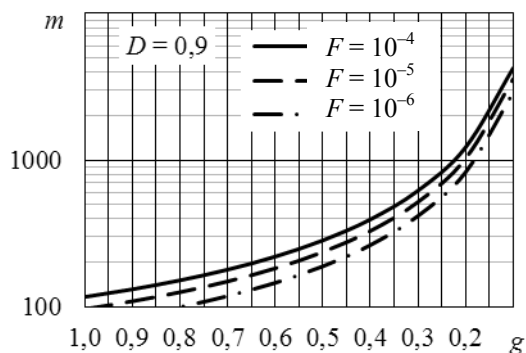


Рис. 3. Зависимость m от g при заданной вероятности ложной тревоги и вероятности правильного обнаружения $D = 0,9$

Оценим зависимость показателей обнаружения от интенсивности шума. Положим, интенсивность шума увеличилась так, что λ_0 возросло до $\lambda_{0,1} \geq \lambda_0$. Введем обозначение

$$\xi = \lambda_{0,1} \geq \lambda_0. \quad (10)$$

Вероятности ложной тревоги F_1 и правильного обнаружения D_1 при увеличившейся интенсивности шума $\lambda_{0,1}$, должны быть получены при пороге обнаружения c (6). Обычно D_1 не рассматривают, а исследуют F_1 , требования к которой всегда более жесткие. Тогда в соответствии с (6) при интенсивности шума $\lambda_{0,1}$ условная вероятность ложной тревоги:

$$F_1 = \Phi\left(\sqrt{m}(\xi - 1) - \xi \Phi^{-1}(1 - F)\right). \quad (11)$$

Видно, что $F_1 = F$ при $\xi = 1$, а при увеличении ξ возрастает и F_1 . Величина F_1 определяется не только задаваемыми значениями F и ξ , но зависит и от объема выборки m (9). При этом значения m лежат в диапазоне, обеспечивающем задаваемые показатели качества обнаружения. Это можно учесть, подставляя (9) в (11):

$$F_1 = \Phi\left(\left(\Phi^{-1}(D) + (1 + g)\Phi^{-1}(1 - F)\right)(\xi - 1) / g - \xi \Phi^{-1}(1 - F)\right). \quad (12)$$

Таким образом, значение F_1 зависит не только от задаваемой вероятности ложной тревоги F и неконтролируемого увеличения интенсивности шума ξ , но и от D и g . Расчеты по (12) показывают:

1) при малых значениях g , условных вероятностях ложной тревоги 10^{-4} , 10^{-5} и 10^{-6} , условной вероятности правильного обнаружения 0,5–0,9 увеличение интенсивности шума даже на 1% приводит к увеличению условной вероятности ложной тревоги соответственно в 4,1–6,4, 6,2–10,4 и 9,4–16,6 раз. А при $F = 10^{-5}$ – 10^{-6} имеем ее увеличение уже на два порядка и более, что в автоматических обнаружителях недопустимо;

2) при отношении сигнала к шуму, равном 1, аналогичные п. 1 результаты получаются при неконтролируемом увеличении ξ на 10 и 20%.

Заключение. Итак, условная вероятность ложной тревоги в оптимальном обнаружителе оказывается весьма чувствительной к неконтролируемым увеличениям интенсивности шума. Реальная условная вероятность ложной тревоги в большей мере возрастает при меньших значениях задаваемой вероятности ложной тревоги, больших величинах условной вероятности правильного обнаружения и меньших значениях отношения сигнала к шуму.

Это означает, что в системах автоматической обработки информации, получаемой от счетчиков фотонов – обнаружителей слабых световых сигналов, поддержание постоянным уровня ложной тревоги связано с трудностями принципиального характера и требует применения специальных мер.

Литература

1. Лазерная локация / И. Н. Матвеев [и др.]. М.: Машиностроение, 1984. 272 с.
2. Многофункциональные лидарные системы / В. И. Иванов [и др.]. Минск: Университетское, 1986. 286 с.

3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 752 с.
5. Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М.: Советское радио, 1968. 288 с.

References

1. Matveev I. N. *Lazernaya lokatsiya* [Laser Location]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1984. 272 p.
2. Ivanov V. I. *Mnogofunktsionalnyye lidarnyye sistemy* [Multifunction Lidar Systems]. Minsk, Universitetskoye Publ., 1986. 286 p.
3. Venttsel E. S. *Teoriya veroyatnostey* [Theory of Probability]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 575 p.
4. Levin B. R. *Teoreticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Basic of Statistical Radio technique]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1989. 752 p.
5. Shor Ya. B., Kuz'min F. I. *Tablitsy dlya analiza i kontrolya nadyezhnosti* [Tables of reliability analysis and control]. Moscow, Sovetskoye radio, 1968. 288 p.

Информация об авторах

Никитенок Виктор Иванович – кандидат технических наук, доцент. Белорусский государственный университет (220006, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: nikitavi44@mail.ru

Ветохин Сергей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физико-химических методов сертификации продукции. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: veto@belstu.by

Information about the authors

Nikitsionak Viktor Ivanavich – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nikitavi44@mail.ru

Vetokhin Siarhei Siarheyavich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Physical and Chemical Methods of Testing. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: veto@belstu.by

Поступила 28.02.2015