УДК 519.237.3

Е. И. Ловенецкая
Белорусский государственный технологический университет

КВАДРАТИЧНЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О СРЕДНЕМ МНОГОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для наблюдения $\mathbf{X} = (X_1; \ldots; X_n)$, имеющего многомерное нормальное распределение с единичной ковариационной матрицей, рассматривается задача проверки гипотезы о среднем против альтернативы сдвига. Исследуются критерии, основанные на статистиках вида $T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} f(X_k)$, где коэффициенты удовлетворяют условию равномерной асимптотической малости, а на функцию f накладываются определенные ограничения четности, гладкости и роста. Задача заключается в определении асимптотически (при $n \to \infty$) наиболее мощного критерия.

Исследовано предельное поведение математического ожидания и дисперсии статистики T_n при основной и альтернативной гипотезах. Показано, что в случае альтернатив, удовлетворяющих определенному условию асимптотической малости, предельное распределение статистики T_n является нормальным с одной и той же дисперсией при гипотезе и при альтернативе; получено асимптотическое представление для мощности критерия. Задача поиска функции f, определяющей асимптотически наиболее мощный критерий, сводится к задаче вариационного исчисления. Основным результатом статьи является доказательство того, что в описанной постановке задачи наиболее мощным критерием оказывается критерий, определяемый квадратичной функцией f.

Ключевые слова: проверка гипотез, многомерное нормальное распределение, асимптотически наиболее мощный критерий, квадратичный критерий, задача вариационного исчисления.

E. I. Lovenetskaya
Belarusian State Technological University

QUADRATIC CRITERIA FOR TESTING HYPOTHESIS ON THE MEAN OF THE MULTIDIMENSIONAL NORMAL DISTRIBUTION

For observing $\mathbf{X} = (X_1; \ldots; X_n)$ having multidimensional normal distribution with unit covariance matrix we investigate the problem of testing hypothesis on the mean against the alternative of the shift. We study the criteria which are based on the statistics in the form of $T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} f(X_k)$. We assume the coefficients of the statistics to satisfy a certain condition of uniform asymptotical negligibility and f to be an even function under some smoothness and growth constraints. The problem is to find the asymptotically (as $n \to \infty$) most powerful test.

The asymptotic behavior of mathematical expectation and variance of the statistics is investigated under null and alternative hypotheses. It is shown in the article that in the case of the alternatives satisfying certain asymptotical littleness condition the limiting distribution of the statistics T_n is normal with the same variance under null and alternative hypotheses. The asymptotic representation of the power function of the test is obtained, too. The problem of finding the function f for asymptotically most powerful test is reduced to some problem of the calculus of variations. The main result of the paper is the proof of the theorem that the most powerful test in the problem under consideration is a quadratic test.

Key words: hypothesis testing, multidimensional normal distribution, asymptotically most powerful test, quadratic criterion, problem of the calculus of variations.

Введение. Рассмотрим задачу проверки гипотезы о среднем многомерного гауссовского распределения. Наблюдение $\mathbf{X} = (X_1; \ldots; X_n)$ представляет собой нормальный случайный вектор, имеющий единичную матрицу ковариаций. Для проверки гипотезы H_0 о стандартной нормальности n-мерного вектора $\mathbf{X}$ против альтернативы сдвига H_n: $\mathbf{EX} = \boldsymbol{\mu}_n = (\mu_{n1}; \ldots; \mu_{nn})$, где $\boldsymbol{\mu}_n \neq \mathbf{0}$, применяется критерий с областью отклонения гипотезы $S_n = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n\colon T_n(\mathbf{X}) \geq c_\alpha\}$, где константа c_α определяется заданием уровня значимости α, т. е. при нулевой гипотезе $\mathbf{P_0}(S_n) = \alpha$. Будем рассматривать статистики вида

$$T_n = T_n(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} f(X_k) \tag{1}$$

с некоторыми условиями на коэффициенты λ_{nk} и функцию f. Требуется найти среди таких критериев асимптотически (при $n \to \infty$) наиболее мощный.

Статистики данного вида возникали в работах Ю. И. Ингстера [1, 2] при рассмотрении задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме. В этих статьях критерии указанного типа оказываются асимптотически минимаксными для некоторых сложных альтернатив, достаточно удаленных от нуля.

В данной работе исследуются альтернативы, удовлетворяющие некоторому условию асимптотической малости. Это позволяет доказать справедливость ЦПТ для статистики T_n при гипотезе и при альтернативе и получить асимптотическое выражение для мощности. В результате задача поиска функции f, соответствующей оптимальному в указанном смысле критерию, сводится к вариационной задаче, решением которой оказывается квадратичная функция.

Отметим, что квадратичные критерии возникают также при байесовском подходе к задаче о среднем многомерного нормального распределения. Замечательное свойство байесовского критерия состоит в том, что он максимизирует среднюю мощность, т. е. является наилучшим против сложной альтернативы. Основной результат статьи заключается в том, что квадратичные критерии в задаче о среднем многомерного нормального распределения являются не только наиболее мощными в среднем для сложных альтернатив, но и доставляют максимум мощности на индивидуальных альтернативах, удовлетворяющих определенному условию асимптотической малости.

Будем обозначать символами: φ – плотность, Φ – функцию распределения одномерной стандартной нормальной величины; $\mathbf{E_0}\xi$, $\mathbf{D_0}\xi$ – математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ при основной гипотезе H_0 и $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}\xi, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\mu}_n}\xi$ – при альтернативе H_n: $\mathbf{EX} = \boldsymbol{\mu}_n$; квантиль уровня α нормального распределения будем обозначать $u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$.

Основная часть. Рассмотрим поведение статистики (1) при нулевой гипотезе и при альтернативе. Опишем дополнительные условия на коэффициенты λ_{nk} и функцию f статистики (1).

Относительно функции f предполагаем, что она трижды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим условиям:

$$f(-x) = f(x), \tag{2}$$

$$\mathbf{E_0} f(X) = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{E_0} f''(X) \neq 0, \tag{4}$$

для некоторого натурального p существует такая постоянная $A > 0$, что

$$|f'''(x)| \le A|x|^p \text{ при всех } x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Из условия (2) четности функции f следует $\mathbf{E_0} f'(X) = 0.$ Условие (3) не ограничивает общности, поскольку всегда вместо функции f можно рассмотреть $\tilde{f} = f - \mathbf{E_0}f(X)$. Можно показать, что условие (5) обеспечивает функции f свойства, указанные в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть f – четная функция класса $C^3(\mathbf{R})$, для которой выполнено условие (5). Тогда при некоторых постоянных A_1, A_2, A_3 для всякого $x \in \mathbf{R}$ справедливы соотношения

$$|f''(x)| \le A_1\left(|x|^{p+1} + 1\right),$$

$$|f'(x)| \le A_2\left(|x|^{p+2} + 1\right),$$

$$|f(x)| \le A_3\left(|x|^{p+3} + 1\right).$$

Замечание. Очевидным следствием леммы 1 является конечность при гипотезе величин $\mathbf{E_0}|f(X)|^r$ при всех натуральных r, поскольку они ограничиваются моментами стандартного нормального распределения.

Для изучения распределения статистики (1) при справедливости альтернативной гипотезы полезным будет следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть функция h такова, что для некоторого натурального s при некотором постоянном $a > 0$ справедливо $|h(x)| \le a(|x|^s + 1)$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Тогда при некотором $b > 0$

$$\sup_{\nu: |\nu| \le |\mu|} \mathbf{E_0}\, |h(X+\nu)| \le b\left(|\mu|^s + 1\right).$$

Доказательство следует из свойств математического ожидания и неравенства Минковского (см., например, [3, с. 211]).

Относительно коэффициентов λ_{nk} статистики (1) предполагаем, что они неотрицательны и удовлетворяют следующим условиям:

$$\max_{1 \le k \le n} \lambda_{nk} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^2 \to 1 \text{ при } n \to \infty. \tag{7}$$

Условия (6) и (7) влекут условие равномерной асимптотической малости коэффициентов:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^2\right)^{-1/2} \max_{1 \le k \le n} \lambda_{nk} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

при котором, как следует из [3, 4], верна ЦПТ для $T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}\xi_k$, где ξ_k – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Учитывая, что для статистики (1) при основной гипотезе выполняются соотношения

$$\mathbf{E_0}T_n = 0, \;\; \mathbf{D_0}T_n = \mathbf{E_0}f^2(X)\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^2 \to \mathbf{E_0}f^2(X)$$

при $n \to \infty$, получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. При выполнении условий (3), (6), (7) и условия $\mathbf{E_0}f^2(X) < \infty$ статистика (1) при $n \to \infty$ сходится по распределению к нормальному распределению со средним 0 и дисперсией $\mathbf{E_0}f^2(X)$.

Сформулируем условия на альтернативы, для которых применим результат данной работы. Предполагается, что для $\boldsymbol{\mu}_n$ выполняются условия: существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mu_{nk}^2 > 0, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\left|\mu_{nk}\right|^3 \to 0 \ \text{ при } n\to\infty; \tag{9}$$

для значения p, определяемого формулой (5), справедливо

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\left|\mu_{nk}\right|^{p+3} \to 0 \ \text{ при } n\to\infty. \tag{10}$$

Замечание. Условия (4) и (8) играют роль условия асимптотической различимости гипотезы и альтернативы в данной задаче в том смысле, что обеспечивают отличие математического ожидания статистики при альтернативе от математического ожидания при гипотезе.

Рассмотрим числовые характеристики статистики (1) при альтернативе в предположении справедливости условий (2)–(10). Заметим, что

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}T_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}f(X_k) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mathbf{E_0}f(X_k+\mu_{nk}).$$

Мы можем воспользоваться разложением функции f в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, если ряд

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}T_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mu_{nk}^2\frac{\mathbf{E_0}f''(X)}{2} + \\ +\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mu_{nk}^3\frac{1}{2}\mathbf{E_0}\int_0^1(1-s)^2 f'''(X+s\mu_{nk})ds$$

будет сходящимся. Здесь мы приняли во внимание, что $\mathbf{E_0}f(X)=0$, $\mathbf{E_0}f'(X)=0$. Учитывая (5) и лемму 2, получим оценку

$$\left|\mathbf{E_0}\frac{1}{2}\int_0^1(1-s)^2 f'''(X+s\mu_{nk})ds\right| \le \\ \le\frac{1}{6}\sup_{\nu:|\nu|\le|\mu_{nk}|}\mathbf{E_0}\left|f'''(X+\nu)\right| \le \frac{B}{6}\left(\left|\mu_{nk}\right|^p+1\right)$$

для некоторой положительной постоянной B.

Таким образом,

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}T_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}\mu_{nk}^2\frac{\mathbf{E_0}f''(X)}{2} + \theta_n,$$

где остаточный член θ_n в силу условий (9), (10) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Следствием леммы 1 является конечность математического ожидания $\mathbf{E_0}f''(X)<\infty$, поскольку f'' ограничивается степенной функцией. Таким образом, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}T_n$ сходится к конечному пределу при $n\to\infty$.

Предельное выражение для дисперсии статистики (1) при альтернативе получается аналогично. Здесь достаточно представить функцию f в виде

$$f(X_k+\mu_{nk}) = f(X_k) + \mu_{nk}\int_0^1 f'(X_k+s\mu_{nk})ds.$$

Тогда, поскольку $\mathbf{E_0}f(X)=0$, то

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}f(X_k) = \mu_{nk}\mathbf{E_0}\int_0^1 f'(X+s\mu_{nk})ds,$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\mu}_n}f(X_k) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}f^2(X_k) - \left(\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}f(X_k)\right)^2 = \\ = \mathbf{E_0}f^2(X) + 2\mu_{nk}\mathbf{E_0}f(X)\int_0^1 f'(X+s\mu_{nk})ds + \\ +\mu_{nk}^2\mathbf{D_0}\int_0^1 f'(X+s\mu_{nk})ds.$$

Для коэффициента при μ_{nk}, применяя дважды неравенство Коши – Буняковского, а затем такие же рассуждения, как выше при оценивании $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\mu}_n}T_n$, получим оценку

$$\left|\mathbf{E_0}f(X)\int_0^1 f'(X+s\mu_{nk})ds\right|^2 \le \\ \le \mathbf{E_0}f^2(X)\sup_{\nu:|\nu|\le|\mu_{nk}|}\mathbf{E_0}\left(f'(X+\nu)\right)^2.$$

Аналогично оценим коэффициент при μ_{nk}^2:

$$\mathbf{D_0}\int_0^1 f'(X+s\mu_{nk})ds \le \mathbf{E_0}\left(\int_0^1 f'(X+s\mu_{nk})ds\right)^2 \le \\ \le \sup_{\nu:|\nu|\le|\mu_{nk}|}\mathbf{E_0}\left(f'(X+\nu)\right)^2 \le B_1\left(\left|\mu_{nk}\right|^{2(p+2)}+1\right)$$

при некоторой постоянной $B_1 > 0$. Последнее неравенство является очевидным следствием лемм 1 и 2. Используя для оценивания коэффициента при μ_{nk} корень из этой величины, получим:

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\mu}_n}T_n = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\mu}_n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}f(X_k) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}^2\mathbf{D}_{\boldsymbol{\mu}_n}f(X_k) = \\ = \mathbf{E_0}f^2(X)\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}^2 + \theta_n^{\mathrm{I}} + \theta_n^{\mathrm{II}},$$

где

$$\left|\theta_n^{\mathrm{I}}\right| \le 2\sqrt{2B_1\mathbf{E_0}f^2(X)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}^2\left|\mu_{nk}\right|\left(\left|\mu_{nk}\right|^{p+2}+1\right),$$

$$\left|\theta_n^{\mathrm{II}}\right| \le B_1 \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^2 \mu_{nk}^2 \left(\left|\mu_{nk}\right|^{2(p+2)} + 1\right).$$

Условия (6)–(8), (10) обеспечивают сходимость к нулю величин θ_n^{I} и θ_n^{II}, а следовательно, $\mathbf{D}_{\mu_n} T_n \to \mathbf{E_0} f^2(X)$ при $n \to \infty$ и статистика (1) при альтернативе имеет дисперсию, асимптотически равную дисперсии при гипотезе.

Утверждение 2. При выполнении условий (2)–(10) и условия $\mathbf{E_0} f^2(X) < \infty$ случайная величина $T_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}\mu_{nk}^2 \mathbf{E_0} f''(X)$, где статистика T_n определена соотношением (1), при альтернативе H_n сходится при $n \to \infty$ по распределению к нормальному распределению со средним 0 и дисперсией $\mathbf{E_0} f^2(X)$.

Поскольку при альтернативе H_n статистику (1) можно представить в виде

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} f(X_k + \mu_{nk}),$$

считая X_k независимыми стандартными нормальными случайными величинами, то для доказательства утверждения проверим справедливость условия Ляпунова:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D_0}\xi_k\right)^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E_0}\left|\xi_k - \mathbf{E_0}\xi_k\right|^3 \to 0 \qquad (11)$$

при $n \to \infty$. При этом условии справедлива ЦПТ для сумм $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ независимых случайных величин (см. [3, гл. III, §4]).

Поскольку $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D_0}\xi_k = \mathbf{D}_{\mu_n} T_n$, то в силу доказанного выше предельного поведения дисперсии статистики при альтернативе знаменатель в (11) сходится к конечной величине при $n \to \infty$. Можно показать с помощью лемм 1 и 2, что при выполнении условий (6), (7), (10) числитель (11) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, для статистики (1) при альтернативе H_n имеет место утверждение 2.

Рассмотрим β_n – мощность критерия заданного уровня значимости α с областью отклонения гипотезы $S_n = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n \colon T_n(\mathbf{X}) \ge c_\alpha\}$. Имея в виду асимптотическую ситуацию, при построении критической области будем пользоваться предельными распределениями статистики. Выражая с помощью результатов утверждений 1 и 2 через функцию Φ стандартного нормального распределения вероятности S_n при гипотезе $\mathbf{P_0}(S_n) = \alpha$ и при альтернативе $\mathbf{P}_{\mu_n}(S_n) = \beta_n$, получим следующее асимптотическое выражение для мощности β_n критерия уровня значимости α:

$$\beta_n \cong \Phi\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{E_0} f''(X)}{\sqrt{\mathbf{E_0} f^2(X)}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}\mu_{nk}^2 - u_\alpha\right).$$

Таким образом, задача оптимизации мощности сводится к отысканию максимума функционала $\left(\mathbf{E_0} f^2(X)\right)^{-1/2} \mathbf{E_0} f''(X)$, которая вследствие его однородности эквивалентна задаче поиска максимума функционала $G(f) = \mathbf{E_0} f''(X)$ при фиксированном значении $\mathbf{E_0} f^2(X)$ (положим, например, $\mathbf{E_0} f^2(X) = 2$).

Итак, имеем следующую оптимизационную задачу:

$$G(f) = \int_{\mathbf{R}} f''(x)\varphi(x)dx \to \mathrm{extr}, \qquad (12)$$

$$\mathbf{E_0} f(X) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0, \qquad (13)$$

$$\mathbf{E_0} f^2(X) = \int_{\mathbf{R}} f^2(x)\varphi(x)dx = 2, \qquad (14)$$

$$\mathbf{E_0} f'(X) = \int_{\mathbf{R}} f'(x)\varphi(x)dx = 0. \qquad (15)$$

Интегрируя по частям в (12) и (15) и учитывая, что внеинтегральные члены обращаются в нуль за счет оценок из леммы 1, получаем функцию Лагранжа для данной задачи в виде

$$L = \lambda_0 \int_{\mathbf{R}} \left(x^2 - 1\right) f(x)\varphi(x)dx + \lambda_1 \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx + \\ + \lambda_2 \int_{\mathbf{R}} x f(x)\varphi(x)dx \, + \, \lambda_3 \int_{\mathbf{R}} f^2(x)\varphi(x)dx.$$

Приравнивая к нулю вариационную производную: $\frac{\partial L}{\partial f} = 0$, находим решение задачи (12)–(15) в виде $f(x) = ax^2 + bx + c$, откуда с учетом условий (13)–(15) получаем:

$$f(x) = x^2 - 1. \qquad (16)$$

Для доказательства того, что на функции (16) достигается максимум в задаче (12)–(15), рассмотрим функцию $f + h$, четную и удовлетворяющую, как и f, условиям (13)–(15), и покажем, что $G(h) \le 0$. Действительно, интегрируя $G(h)$ по частям и учитывая четность функции h, а также (16) и условие (14) для функции $f + h$, получаем:

$$G(h) = \int_{\mathbf{R}} \left(x^2 - 1\right) h(x)\varphi(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} h^2(x)\varphi(x)dx \le 0,$$

а следовательно, для всех таких функций h имеет место $G(f+h)=G(f)+G(h)\le G(f)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть для проверки гипотезы о стандартной нормальности n-мерного вектора $\mathbf{X}$ против альтернативы сдвига H_n: $\mathbf{EX} = \boldsymbol{\mu}_n$ рассматриваются критерии, основанные на статистиках вида (1) с коэффициентами, удовлетворяющими (6), (7). Если для альтернативы выполнены условия (8)–(10), то в классе критериев, определяемом семейством трижды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих (2)–(5), асимптотически наиболее мощным является критерий, основанный на функции (16).

Заключение. В статье рассмотрено применение критериев, основанных на статистиках вида (1), в задаче проверки гипотезы о среднем многомерного нормального распределения при альтернативах сдвига, удовлетворяющих определенному условию равномерной асимптотической малости. Показано, что при определенных условиях на компоненты статистики (1) наиболее мощными среди всех таких критериев оказываются квадратичные критерии.

Литература

1. Ингстер Ю. И. О минимаксном непараметрическом обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме // Проблемы передачи информации. 1982. Т. 18, вып. 2. С. 61–73.

2. Ingster Yu. I. Asymptotically minimax hypotheses testing for nonparametric alternatives, I–III // Mathematical methods of statistics. 1993. Vol. 2, no. 2, pp. 85–114; no. 3, pp. 171–189; no. 4, pp. 249–268.

3. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.

4. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971. 376 с.

References

1. Ingster Ju. I. On the minimax nonparametric detection of signals in white gaussian noise. *Problemy peredachi informatsii* [Problems of information transmission], 1982, vol. 18, no. 2, pp. 61–73 (In Russian).

2. Ingster Yu. I. Asymptotically minimax hypotheses testing for nonparametric alternatives, I–III. *Mathematical methods of statistics*, 1993, vol. 2, no. 2, pp. 85–114; no. 3, pp. 171–189; no. 4, pp. 249–268.

3. Shiryaev A. N. *Verojatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 576 p.

4. Hájek J., Šidák Z. Theory of Rank Tests. Prague, Academia, 1967. 297 p. (Rus. Ed.: Gayek Ya., Shidak Z. *Teoriya rangovyh kriteriev* [Theory of Rank Tests]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 376 p.).

Информация об авторе

Ловенецкая Елена Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ei_blinova@mail.ru

Information about the author

Lovenetskaya Elena Ivanovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ei_blinova@mail.ru

Поступила 15.03.2015