

УДК 535.14

Т. Б. Карлович

Белорусский государственный технологический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГОВ ГЕНЕРАЦИИ ДЛЯ ОДНОКУБИТНОГО ЛАЗЕРА

Вопрос о существовании порога генерации микролазера неоднократно обсуждался в литературе последних лет. До сих пор не найдено строгих критериев, по которым можно судить о том, находится ли микролазер в допороговом режиме работы или же в режиме генерации. Некоторые авторы экспериментальных работ утверждают, что порог генерации для одноатомных лазеров и подобных им систем вообще отсутствует, поскольку отсутствует излом в кривой зависимости внутрирезонаторной амплитуды поля от амплитуды некогерентной накачки.

В данной работе определяются два порога генерации для модели однокубитного лазера. Такой микролазер представляет собой систему, которая состоит из одного сверхпроводящего кубита (так называемого островка), характеризующегося двумя зарядовыми состояниями: с избыточной куперовской парой и без нее. Куперовская пара поступает на островок через контакт Джозефсона с электрода земли. При этом частота перехода настроена в резонанс с расположенным рядом копланарным волноводом (резонатором), в результате чего возможно испускание фотона. Лазерный режим генерации создается путем перекачки N куперовских пар на островок с последующим испусканием N фотонов.

В статье используется квантово-механический подход к определению порогов генерации однокубитного лазера на основе P - и Q -функций квазивероятности. Первый порог связан с генерацией излучения с ненулевой амплитудой, а второй порог – с достижением единицы среднего числа внутрирезонаторных фотонов. Для случая высокодобротного резонатора получены аналитические выражения для обоих порогов генерации. Обнаружено, что при определенном соотношении между параметрами, описывающими однокубитный лазер, первый порог генерации «исчезает», так как генерация излучения с ненулевой амплитудой осуществляется при любой интенсивности некогерентной накачки. Показано, что с увеличением параметра дефазировки возможен выход лазера из режима генерации.

Ключевые слова: однокубитный лазер, высокодобротный резонатор, сверхпроводящий кубит, функция квазираспределения, матрица плотности, подпороговый режим, режим генерации.

T. B. Karlovich

Belarusian State Technological University

DEFINITION OF THE THRESHOLDS FOR A SINGLE-QUBIT LASER

The definition of the threshold of a single-qubit laser has been the question of the great discussion for a long period of time. Up to now the strict criteria of the finding of this definition are absent. For the macroscopic laser the threshold is determined as the knee in the dependency of mean photon number in the cavity or intensity of the intracavity field versus the intensity of the incoherent pump. So simple definition is absent in the microlaser case because in this situation the most of the spontaneous emission is realized into the single cavity field mode. With the suppression of the spontaneous emission into noncavity field modes threshold must be very low.

In present work we propose to determine two thresholds for the single-qubit laser which consists of a superconducting cubit with two charge states differing by one Cooper pair consisting of two electrons. A Cooper pair tunnels across the Josephson junction from the ground to the island. Herewith the transition frequency is tuned to resonance with the nearby situated coplanar resonator which potentially resulting in the emission of a photon. The regime of laser generation is created by pumping N Cooper pairs on the island, followed by the emission of N photons.

In this work we use P - and Q -quasiprobability distribution functions to determine the first and the second generation thresholds. The first one is connected with the generation of the light with nonzero amplitude and the second one – with the definition of the equality of the number of the intracavity photons to the unity. In the case of high- Q cavity analytical expressions for both thresholds are obtained. It is found that under certain relations between the single-cubit laser parameters the first generation threshold disappears. In this case the generation of the radiation takes place under any intensity of the incoherent pump. The influence of the dephasing parameter on the statistical properties of the P -distribution function is investigated. It is demonstrated that with the increasing of the dephasing rate the oscillations of the generational parameter are possible as well as the exit from the generation regime.

Key words: single-qubit laser, high- Q cavity, Josephson energy, superconducting cubit, density matrix, quasidistribution function, thresholdless lasing.

Введение. В зависимости от свойств лазерного излучения режимы работы лазера разделяются на подпороговый режим, надпороговый режим или режим генерации излучения и режим самотушения лазера. Для многоатомного лазера порогом лазерной генерации является минимальный уровень возбуждения, при котором лазерное излучение на выходе состоит в большей мере из вынужденного излучения, чем из спонтанного излучения.

Экспериментально порог лазерной генерации многоатомного лазера определяется по излому кривой зависимости интенсивности внутрирезонаторного поля от интенсивности некогерентной накачки. В случае полуклассического описания активной среды это условие трансформируется в условие о необходимости инверсной населенности возбужденных атомов.

Далеко не так однозначно определяется порог генерации для микролазера, для которого большая часть спонтанного испускания осуществляется в единственную резонаторную моду поля. При уменьшении (подавлении) спонтанного испускания в нерезонаторные моды поля порог генерации должен быть очень низким [1].

В работе [2] авторы утверждают, что каждый микролазер имеет порог генерации. Существование порога генерации обосновывается наличием перехода от линейного режима усиления к нелинейному режиму генерации излучения. В качестве порогового значения предлагается условие равенства единице среднего числа фотонов в лазерной моде поля.

В настоящей статье будут определены пороги генерации однокубитного лазера на основе квантовых P - и Q -функций квазираспределения.

Основная часть. Однокубитный лазер состоит из заряженного сверхпроводящего кубита (искусственного атома), взаимодействующего с модой поля сверхпроводящего резонатора, представляющего собой копланарный волновод [3]. Кубит характеризуется двумя зарядовыми состояниями: $|2\rangle$ – с избыточной куперовской парой и $|0\rangle$ – без нее (рис. 1). Электронная куперовская пара поступает через контакт Джозефсона на островок (кубит) с электрода земли. Чтобы создать инверсную населенность, необходимо интенсивно откачивать куперовские пары с островка. С этой целью к нему через туннельный переход подключен контакт стока. Напряжение на него подается такое, чтобы сначала один электрон мог протуннелировать со скоростью Γ_{21} после развала куперовской пары и система перешла в состояние $|1\rangle$ с одним избыточным электроном на островке, а затем и второй электрон протуннелировал со скоро-

стью Γ_{10} и система перешла в состояние $|0\rangle$. Избыточная энергия этого состояния высвобождается в виде испускания фотона с частотой, настроенной на частоту перехода $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$. Режим генерации создается при перекачке N куперовских пар на островок с последующей генерацией N фотонов.

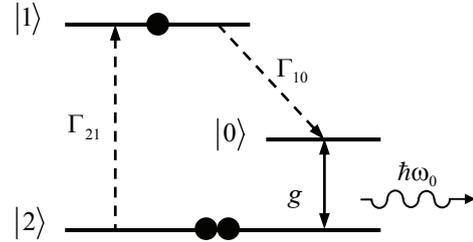


Рис. 1. Схема однокубитного лазера [3]

Взаимодействие куперовской пары и резонаторной моды поля описывается гамильтонианом Джейнса – Каммингса:

$$H_{JC} = \frac{1}{2} \hbar \omega_Q \sigma_z + \hbar \omega_R a^\dagger a + \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger), \quad (1)$$

где собственные значения энергии кубита $\hbar \omega_Q = \sqrt{\epsilon^2 + E_J^2}$ определяются через разность электростатических энергий между состояниями $|0\rangle$ и $|2\rangle$, ϵ и энергию Джозефсона E_J ; ω_Q – частота кубита; ω_R – частота резонатора; g – константа взаимодействия. Операторы σ_i удовлетворяют коммутационным соотношениям для ферми-частиц:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z. \quad (2)$$

Операторы a и a^\dagger удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозе-частиц:

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3)$$

Взаимодействие с окружением в однокубитном лазере сопровождается диссипацией энергии кубита и резонатора. Затухание кубита описывается параметром γ , а затухание резонаторной моды поля – параметром k и числом тепловых фотонов n_{th} . Управление кубитом осуществляется при помощи некогерентной накачки с интенсивностью Γ . Дефазировка кубита учитывается параметром Γ_ϕ^* . Редуцированное уравнение для матрицы плотности ρ , описывающей эволюцию однокубитного лазера, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_{JC}, \rho] - L_Q \rho - L_R \rho. \quad (4)$$

Здесь лиувиллиан L_Q описывает релаксацию и возбуждение кубита:

$$L_0\rho = \frac{\Gamma_\phi^*}{2}(\rho - \sigma_z\rho\sigma_z) + \frac{\gamma}{2}([\sigma_-, \rho\sigma_+] + [\sigma_-\rho, \sigma_+]) + \frac{\Gamma}{2}([\sigma_+, \rho\sigma_-] + [\sigma_+\rho, \sigma_-]), \quad (5)$$

лиувиллиан L_R описывает релаксацию и возбуждение резонаторной моды поля:

$$L_R\rho = k(n_{th} + 1)([a\rho, a^+] + [a, \rho a^+]) + kn_{th}([a^+\rho, a] + [a^+, \rho a]). \quad (6)$$

Решение операторного уравнения (4) будем искать на основе эквивалентных уравнений для плотности вероятности. Сначала определим характеристический оператор как частичный след от матрицы плотности по переменным поля:

$$F(\lambda, \lambda^*) = Sp_f(e^{\lambda a^+} e^{-\lambda^* a} \rho). \quad (7)$$

Затем воспользуемся связью между элементами характеристического оператора и элементами P -функции квазивероятности посредством двойного преобразования Фурье:

$$P_{ij}(\alpha, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\lambda e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} F_{ij}(\lambda, t), \quad (8)$$

где индексы $i, j = 1, 2$, $\alpha = \sqrt{p} \exp(i\varphi)$.

Для дальнейших расчетов удобно ввести линейные комбинации элементов P -функции квазираспределения [4]:

$$P_1 = P_{11} + P_{22}, \quad P_2 = P_{11} - P_{22}, \quad P_6 = \frac{P_{12}}{\alpha^*} + \frac{P_{21}}{\alpha}. \quad (9)$$

Здесь P_1 – функция распределения амплитуды α ; P_6 – функция, соответствующая недиагональным элементам матрицы плотности.

В случае высокодобротного резонатора

$$k \ll G, \gamma, g \quad (10)$$

система уравнений для фазово-независимых элементов P -функции Глаубера P_1, P_2, P_6 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} &= -g \frac{\partial P_6}{\partial p} + 2kP_1 + 2kp \frac{\partial P_1}{\partial p}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} &= -g \frac{\partial P_6}{\partial p} + 2gP_6 + R_0P_1 - 2BP_2 + 2kp \frac{\partial P_2}{\partial p}, \\ \frac{\partial P_6}{\partial t} &= -gp \frac{\partial(P_1 - P_2)}{\partial p} - 2gpP_2 - \left(B + \frac{\Gamma_\phi^*}{4} \right) P_6 + 2kp \frac{\partial P_6}{\partial p}. \end{aligned} \quad (11)$$

В стационарном случае система (11) может быть решена аналитически. Функция распределения интенсивности поля однокубитного лазера имеет следующий вид:

$$P_1(p) = c\Theta(p_2 - p)(p_1 - p)(p_2 - p)^{q_1} e^{q_2 p}, \quad (12)$$

где

$$q_1 = -1 + \frac{2\mu}{\beta} - \frac{8k\mu}{\beta^2}, \quad \mu = R_0 - R + \frac{\beta B}{2k},$$

$$\beta = \frac{8k}{q_2}, \quad q_2 = \left[1 + \frac{k \left(B + \frac{\Gamma_\phi^*}{4} \right)}{2g^2} \right]^{-1}, \quad (13)$$

$$p_1 = \frac{B}{2k}, \quad p_2 = \frac{2R_{21}}{\beta}.$$

Интенсивности внутррезонаторного поля p_1 и p_2 соответственно равны:

$$p_1 = \frac{B}{2k}, \quad p_2 = \frac{2\Gamma}{\beta}, \quad (14)$$

а параметры –

$$B = \frac{R}{2} - k = \frac{(\Gamma + \gamma)}{2} - k, \quad (15)$$

$$B_0 = \frac{R_0}{2} - k = \frac{(\gamma - \Gamma)}{2} - k.$$

Область определения функции Глаубера (12) ограничена отрезком $[0, p_2]$, что обозначено множителем в виде Θ – функции Хевисайда. Константа c в формуле (12) вычисляется из условия нормировки функции квазивероятности:

$$\int_0^\infty dp P(p) = 1,$$

$$c^{-1} = \frac{\pi}{q_2^{q_1+1}} e^{q_2 p_2} ((p_1 - p_2)\gamma(q_1 + 1, q_2 p_2) + \frac{1}{q_2} \gamma(q_1 + 2, q_2 p_2)). \quad (16)$$

Также мы рассмотрели систему точных уравнений для элементов P -функции P_1 и P_2 . Ее решение может быть найдено численно, если использовать разложение в ряд по степеням интенсивности внутррезонаторного поля:

$$P_i = \sum_{n=0}^\infty b_i^{(n)} p^n. \quad (17)$$

В этом случае элементы функции квазираспределения удовлетворяют матричному двумерному рекуррентному соотношению:

$$\begin{pmatrix} -2kn + 2B_0 & 2kn - 2B \\ -gn & gn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4k & 0 \\ \frac{4k^2}{g}n - \frac{2k}{g} \left(B + \frac{\Gamma_\varphi^*}{4} \right) & -2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{B_0}{B} \end{pmatrix} c_0, \quad (19)$$

где константа c_0 определяется из условия нормировки функции распределения.

На рис. 2 представлена P -функция Глаубера, подсчитанная с использованием аналитического решения (12) и численного решения (18). Видно, что численные и аналитические расчеты хорошо совпадают между собой. Функция квазираспределения имеет характерный максимум в области граничного значения интенсивности поля p_2 . Значит, при данных параметрах осуществляется генерация излучения однокубитным лазером с амплитудой, близкой к значению $\sqrt{p_2}$. При увеличении параметра дефазировки Γ_φ^* максимум функции распределения смещается влево, амплитуда его уменьшается и увеличивается его ширина. Граничное значение интенсивности внутрирезонаторного поля уменьшается, при этом сама функция квази вероятности остается ограниченной на отрезке.

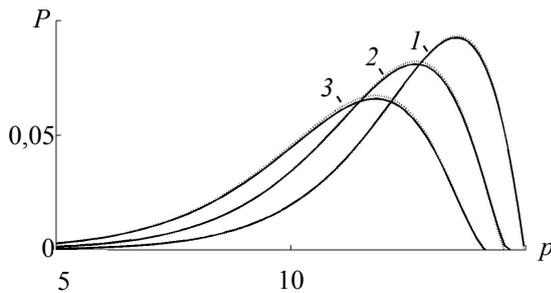


Рис. 2. Функция распределения Глаубера в зависимости от интенсивности внутрирезонаторного поля для параметров $g = 5$, $\gamma = 1$, $k = 0,25$:

$$1 - \Gamma_\varphi^* = 0; \quad 2 - \Gamma_\varphi^* = 100; \quad 3 - \Gamma_\varphi^* = 200$$

Условия генерации излучения однокубитным лазером определим исходя из появления ненулевого максимума у P -функции (первый порог генерации) и Q -функции квази вероятности (второй порог генерации) в зависимости от интенсивности некогерентной накачки. По определению

$$R^{(s)}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda F_N(\lambda) e^{-\lambda\alpha^* + \lambda^*\alpha - s|\lambda|^2/2}, \quad (20)$$

где параметр $s = 0$ соответствует P -функции, а $s = 2 - Q$ -функции.

Явный вид условия генерации излучения для первого порога может быть получен из анализа первой производной функции Глаубера (12):

$$G = q_2 p_1 p_2 - q_1 p_1 - p_2 > 0. \quad (21)$$

В случае больших констант взаимодействия g это неравенство имеет вид

$$G = \left(\frac{\Gamma}{4k} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{4k} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{4k} - \frac{3}{2} \right) > 0. \quad (22)$$

Из условия (22) следует, что для параметров однокубитного лазера существует интервал значений

$$1 < \frac{\gamma}{2k} < 3, \quad (23)$$

для которого генерация излучения будет иметь место при любой, даже нулевой интенсивности некогерентной накачки. Другими словами, при выполнении условия (21) будет наблюдаться беспороговая генерация излучения однокубитным лазером.

Примеры различных генерационных кривых представлены на рис. 3.

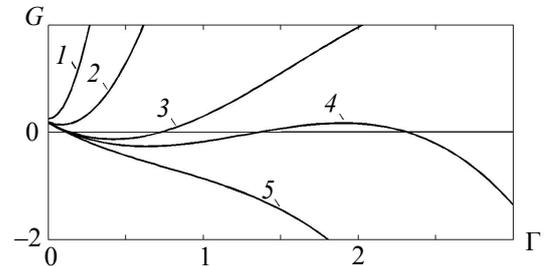


Рис. 3. Зависимость генерации от интенсивности некогерентной накачки для параметров

$$g = 1, \gamma = 0,2, k = 0,05:$$

$$1 - \Gamma_\varphi^* = 0; \quad 2 - \Gamma_\varphi^* = 50;$$

$$3 - \Gamma_\varphi^* = 70; \quad 4 - \Gamma_\varphi^* = 72; \quad 5 - \Gamma_\varphi^* = 75$$

Значения используемых параметров удовлетворяют неравенству (23). Из рисунка видно, что для кривых 1 и 2 условие генерации выполняется при любых значениях интенсивности некогерентной накачки. Однако при значительном увеличении параметра дефазировки в рамках рассматриваемой модели возможны несколько вариантов поведения генерационной кривой. Например, для кривой 3 при малых значениях накачки генерация имеет место, далее следует интервал значений, на котором однокубитный лазер переходит в допороговый режим работы и далее, начиная с некоторого значения, лазер опять переходит в режим генерации. Кривая 4

демонстрирует двойной переход от режима генерации к допороговому режиму работы лазера, осциллируя вблизи нуля. Кривая 5 является монотонно убывающей кривой в зависимости от интенсивности некогерентной накачки. Для таких параметров после короткого генерационного периода однокубитный лазер с ростом некогерентной накачки переходит в допороговый режим работы.

Также можно определить порог генерации на основе Q -функции Хусими, который в случае больших констант взаимодействия будет иметь вид

$$G = \left(\frac{\Gamma}{4k}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{4k} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\gamma}{4k} + \frac{3}{2}\right) > 0. \quad (24)$$

На основании неравенства (24) можно сделать вывод о том, что второй порог генерации у однокубитного лазера существует при всех

значениях параметров и наступает всегда позже первого порога генерации. Исходя из определения (20) появление максимума у Q -функции, отличного от нуля, свидетельствует о появлении в резонаторе хотя бы одного фотона, т. е. соответствует однофотонному пределу.

Заключение. В настоящей работе введены два порога генерации для однокубитного лазера на основе функций Глаубера и Хусими. Найдены параметры, при которых может осуществляться беспороговая генерация излучения однокубитным лазером на основе первого порога генерации. Показано, что параметр дефазировки существенно влияет на генерацию однокубитного лазера и может приводить к осцилляциям генерационной кривой. Продемонстрировано, что значительное увеличение параметра дефазировки приводит к невозможности генерации излучения однокубитным лазером.

Литература

1. Rice P. R., Carmichael H. J. Photon Statistics of a Cavity-QED Laser: A comment on the laser-phase-transition analogy // *Phys. Rev. A*. 1994. Vol. 50. P. 4318–4329.
2. Björk G., Karlsson A., Yamamoto Y. Definition of a laser threshold // *Phys. Rev. A*. 1994. Vol. 50. P. 1675–1680.
3. Single artificial-atom lasing / O. Astafiev [et al.] // *Nature*. 2007. Vol. 449. P. 588–590.
4. Карлович Т. Б., Килин С. Я. Квантовые статистические свойства одноатомного лазера // *Оптика и Спектр*. 2001. Т. 91, № 3. С. 375–383.

References

1. Rice P. R., Carmichael H. J. Photon Statistics of a Cavity-QED Laser: A comment on the laser-phase-transition analogy. *Phys. Rev. A*, 1994, vol. 50, pp. 4318–4329.
2. Björk G., Karlsson A., Yamamoto Y. Definition of a laser threshold. *Phys. Rev. A*, 1994, vol. 50, pp. 1675–1680.
3. Astafiev O., Inomata K., Niskanen A. O., Yamamoto T., Pashkin Yu. A., Nakamura Y., Tsai J. S. Single artificial-atom lasing. *Nature*, 2007, vol. 449, pp. 588–590.
4. Karlovich T. B., Kilin S. Ya. Quantum statistical properties of a single-atom laser. *Optika i spektr* [Opt. and Spectr], 2001, vol. 91, no. 3, pp. 375–383 (In Russian).

Информация об авторе

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Information about the author

Karlovich Tatyana Borisovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), senior lecturer, the Department of Energy Saving, Hydraulics and Heating. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Поступила 12.03.2015