УДК 519.63

Студ. Е.Э. Холева
Науч. рук. доц. Ю.В. Пятаков
(кафедра информационных и управляющих систем, ВГУИТ, Воронеж, Российская Федерация)

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ СТЕРЖНЯ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОЕМКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Решение задач моделирования и управления технологическими процессами часто бывает связано с необходимостью расчета температурного поля в изделиях, теплофизические параметры которых (коэффициенты теплоемкости, температуропроводности) зависят от температуры.

В предлагаемой работе рассматривается задача расчета температурного поля стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, коэффициент теплоемкости которого зависит от температуры.

Постановка задачи

Математическая модель задачи представляет собой систему уравнений теплового баланса вида:

$$C_o(T(x,t))\cdot \partial T(x,t)/\partial t = \lambda \cdot \partial^2 T(x,t)/\partial x^2,\ x\in(0,L),\ t\in[0,t_k] \qquad (1)$$

с заданными

- начальном условиями

$$T(x,0)=T_0(x) \qquad (2)$$

- и граничными условиями

$$T(0,t)=T_1(t) \qquad (3)$$

$$T(L,t)=T_2(t). \qquad (4)$$

В системе уравнений (1)-(4) $T(x,t)$ – значение температуры стержня в точке x в момент времени t; λ – коэффициент теплопроводности (имеет постоянное значение); L – длина стержня; t_k – конечное значение времени; $C_0(T(x,t))$ – коэффициент объемной теплоемкости, зависимость которого от температуры $T(x,t)$ имеет вид:

$$C_o(T(x,t)) = C + a\cdot T(x,t). \qquad (5)$$

Решение задачи. Подставив выражение для объемной теплоемкости (5) в уравнение (1), получим

$$[C + a\cdot T(x,t)]\cdot \partial T(x,t)/\partial t = \lambda\cdot \partial^2 T(x,t)/\partial x^2. \qquad (6)$$

Преобразуем левую часть соотношения (6), внеся сомножитель $[C + a\ T(x,t)]$ под знак производной. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\partial\left[C\cdot T(x,t) + a/2\cdot T^2(x,t)\right]/\partial t = \lambda\cdot\partial^2 T(x,t)/\partial x^2,$$

или, что то же самое

$$\partial S(x,t)/\partial t = \lambda \cdot \partial^2 T(x,t)/\partial x^2 , \tag{7}$$

где

$$S(x,t) = C \cdot T(x,t) + a/2 \cdot T^2(x,t). \tag{8}$$

Заметим, что, если нам известно значение температуры $T(x,t)$ в точке x в момент времени t, то на основании соотношения (8) можно получить значение функции $S(x,t)$.

С другой стороны, если нам известно значение функции $S(x,t)$ в точке x в момент времени t, то решая уравнение (8) относительно функции $T(x,t)$, мы можем получить выражение для определения температуры $T(x,t)$.

Действительно, перепишем уравнение (8) в виде

$$a \cdot T^2(x,t) + 2C \cdot T(x,t) - 2S(x,t) = 0 . \tag{9}$$

Уравнение (9) представляет собой обычное квадратное уравнение из которого, учитывая, что $T(x,t) \geq 0$

$$T(x,t) = \sqrt{\left(\frac{C}{a}\right)^2 + \frac{2 \cdot S(x,t)}{a}} - \frac{C}{a} = \frac{2 \cdot S(x,t)}{\sqrt{C^2 + 2a \cdot S(x,t)} + C} .$$

Таким образом, исходное уравнение теплопроводности (1) можно заменить эквивалентным уравнением

$$\partial S(x,t)/\partial t = \lambda \cdot \partial^2 T(x,t)/\partial x^2 , \tag{10}$$

в котором функции $T(x,t)$ и $S(x,t)$ связаны соотношениями

$$S(x,t) = C \cdot T(x,t) + a/2 \cdot T^2(x,t)$$

$$T(x,t) = 2 \cdot S(x,t) / \left[\sqrt{C^2 + 2a \cdot S(x,t)} + C\right].$$

Для решения дифференциального уравнения (10) при условиях (2)-(4) можно использовать явную разностную схему.

Пример. В примере осуществлялся расчет температурного поля теплоизолированного стержня толщины $L = 2{,}5$ см, теплофизические параметры которого соответствуют параметрам резиновой смеси, используемой для изготовления беговой части протекторов автомобильных шин:

- коэффициент теплопроводности $\lambda = 0{,}197$ Вт/(м·град);
- плотность $\rho = 1401{,}4$ кг/м^3

Зависимость теплоемкости от температуры имеет вид:

$$c_p = 0{,}8336 \cdot (T + 273{,}15) + 898{,}495 \text{ Дж/(кг·град)}. \tag{11}$$

Начальное значение температуры $T_0 = 20$ °С, значения температуры на концах стержня $T_1(t) = T_2(t) = 195$ °С

На рисунке 1 приведены графики изменения температуры в середине стержня.

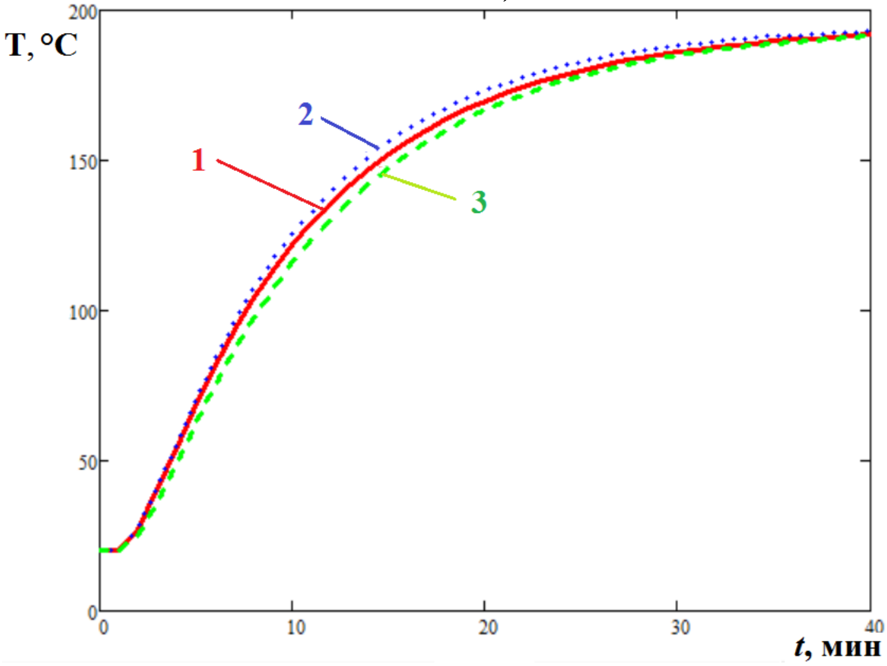

Рисунок 1 – Графики температуры

График 1 представляет собой значение температуры, рассчитанной с учетом изменения теплоемкости в соответствии с формулой (11), графики 2 и 3 не учитывают изменение теплоемкости в стержне (при расчете графика 2 значение теплоемкости бралось постоянным, рассчитанным по формуле (11) при минимальном значении температуры $T = 20$ °C; при расчете графика 3 значение теплоемкости рассчитывалось по формуле (11) при максимальном значении температуры $T = 195$ °C

Выводы. Как показывают сопоставления рассчитанных значений температур, не учет изменения коэффициента теплоемкости может привести к погрешности определения температуры от -4,2 °C до +6,5 °C. Известно, что изменение температуры на 10° изменяет значение скорости процесса вулканизации в два раза. Таким образом, не учет зависимости теплофизических параметров среды от температуры может привести к существенным погрешностям в определении оптимальной продолжительности процесса.