УДК 517.2

А. М. Волк
Белорусский государственный технологический университет

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрено обобщенное гамма-распределение. Данное распределение обобщает гамма-распределение, распределения Рэлея, Максвелла, Вейбулла, Леви, хи-квадрат и имеет широкое применение в статистических методах исследования физических процессов, в дистанционном зондировании, в теории надежности, при описании дисперсного состава частиц дробления. Найдены числовые характеристики и получена характеристическая функция. Методом наибольшего правдоподобия получены уравнения для статистической оценки параметров данного распределения. Показана возможность описания дисперсной фазы в центробежных сепараторах.

Ключевые слова: обобщенное распределение, физические процессы, теория надежности, характеристическая функция, оценка параметров.

A. M. Volk
Belarusian State Technological University

STATISTICAL EVALUATION OF PARAMETERS OF THE GENERALIZED GAMMA DISTRIBUTION

The generalization of gamma distribution was considered. This distribution summarizes gamma distribution, distributions of Relay, Maxwell, Veibull, Levi, chi-square and widely used in statistical research methods of physical processes, in remote sensing, in the theory of reliability, when describing the composition of the particulate grinding particles. Numerical characteristics were found. The characteristic function was obtained. Using maximum likelihood method the equations for the statistical evaluation of the parameters of this distribution was obtained. The possibility of distribution of the dispersed phase in the centrifugal separators was revealed.

Key words: generalized distribution, physical processes, reliability theory, the characteristic function, parameter estimation.

Введение. Обобщенное гамма-распределение было рассмотрено в работе [1]. Данное распределение включает в себя гамма-распределение, его частные случаи и многие известные распределения: Рэлея, Максвелла, Вейбулла, Леви, хи-квадрат [2]. Названные распределения широко используются в прикладных задачах, связанных со статистическими методами исследования физических процессов, дистанционным зондированием, в теории надежности, для описания дисперсного состава частиц дробления [2, 3].

Свойства обобщенного гамма-распределения. Рассмотрим обобщенное гамма-распределение некоторой случайной величины ξ:

$$f(x,\theta,p,c)=\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\right). \quad (1)$$

Отметим, что параметр θ является параметром масштаба, а p и c есть параметры формы.

Выполним переход к безразмерной случайной величине $\eta = \xi / \theta$:

$$f(t,\theta,p,c)=\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}t^{p-1}\exp\left(-t^{c}\right). \quad (2)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины η

$$F(t,\theta,p,c)=\frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\int_0^t \tau^{p-1}\exp\left(-\tau^{c}\right)d\tau \quad (3)$$

сводится к неполной гамма-функции [4].

Если $c > 0$, то

$$F(t,\theta,p,c)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\gamma\left(\frac{p}{c},t^{c}\right), \quad (4)$$

а при $c < 0$

$$F(t,\theta,p,c)=1-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\gamma\left(\frac{p}{c},t^{c}\right). \quad (5)$$

Если $\frac{p-1}{c}>0$, то распределение (2), (3) имеет моду:

$$t_{\text{mod}}=\left(\frac{p-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}, \quad \xi_{\text{mod}}=\theta\, t_{\text{mod}}=\theta\left(\frac{p-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}. \quad (6)$$

Для функции распределения мода будет точкой перегиба.

Для распределения (2), (3) определены начальные моменты порядка k, удовлетворяющего условию $p + k > 0$, причем

$$\alpha_k(\eta) = \Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{p}{c}\right), \qquad (7)$$

$$\alpha_k(\xi) = \theta^k \Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{p}{c}\right). \qquad (8)$$

Действительно,

$$\alpha_\nu(\xi) = \frac{|\tilde{n}|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \int_0^{+\infty} x^\nu \left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\} dx =$$

$$= \frac{|c|\theta^\nu}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{p+\nu-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} dx =$$

$$= \frac{|c|\theta^\nu}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \int_0^{+\infty} t^{p+\nu-1} \exp(-t^c) dt = \theta^\nu \frac{\Gamma\left(\frac{p+\nu}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}.$$

Рассчитаем характеристическую функцию распределения (2), (3) случайной величины ξ:

$$\varphi(\varsigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\varsigma x) f(x) dx =$$

$$= \varphi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)}{k!} (i\varsigma\theta)^k =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)}{k!} (i\varsigma\theta)^k.$$

Выполним замену $t^c = y$ и, разлагая функцию $\exp(i\varsigma\theta t)$ в ряд, найдем:

$$\varphi(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\varsigma\theta)^k}{k!} \int_0^{+\infty} y^{\frac{p+k}{c}-1} \exp(-y) dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)}{k!} (i\varsigma\theta)^k. \qquad (9)$$

Для исследования сходимости полученного ряда применим признак Коши и используем формулу Стирлинга [4]. При $c < 0$ или $c > 1$ данный ряд сходится и характеристическая функция аналитическая при любых значениях ς. В данном случае распределение случайной величины однозначно определяется ее моментами [5].

Статистическая оценка параметров. Статистическая оценка параметров распределения может быть выполнена методом моментов, при котором параметры распределения находятся из условия равенства теоретических и статистических моментов. Распределение однозначно определяется своими моментами, если характеристическая функция аналитическая [5].

Метод моментов требует решения достаточно сложной системы уравнений, а также проверки соответствия полученной функции статистическим данным с помощью критериев согласия.

Выполним статистическую оценку параметров распределения (2) методом наибольшего правдоподобия [6].

Пусть имеется некоторая выборка $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ генеральной совокупности распределения (2), (3). Рассмотрим функцию правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{p-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}. \qquad (10)$$

Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln L =$$

$$= n\left[\ln\frac{|c|}{\theta} - \ln\partial\left(\frac{p}{c}\right) + (p-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right]$$

и рассмотрим функцию:

$$G = \frac{\ln L}{n} =$$

$$= \ln\frac{|c|}{\theta} - \ln\Gamma\left(\frac{p}{c}\right) + (p-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c.$$

Максимум данной функции совпадает с максимумом функции правдоподобия (10).

Найдем частные производные функции G:

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = -\frac{p}{\theta} + \frac{c}{\theta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -\frac{1}{c}\psi\left(\frac{p}{c}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = \frac{1}{c} + \frac{p}{c^2}\psi\left(\frac{p}{c}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln\frac{x_i}{\theta}. \qquad (13)$$

Применим необходимое условие экстремума функции многих переменных, приравняем найденные частные производные к нулю и получим уравнения правдоподобия для определения параметров распределения:

$$\theta = \left(\frac{c}{p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,c} \right)^{\frac{1}{c}}, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{c} \psi\left(\frac{p}{c} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{\theta} = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{1}{c} + \frac{p}{c^2} \psi\left(\frac{p}{c} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} = 0. \qquad (16)$$

Решение уравнений (14)–(16) дает статистическую оценку параметров распределения (2), (3). Данные оценки являются состоятельными, асимптотически-несмещенными, эффективными, асимптотически-нормальными и асимптотически-эффективными оценками [6]. При условии эффективности оценок система (14)–(16) имеет единственное решение [7].

Описание дисперсного состава частиц дробления. Распределение (2), (3) инвариантно относительно величины ξ^k. Применив его к описанию величины порядка d^k относительно диаметра при исследовании дисперсного состава частиц дробления частиц и обозначив $t = d / \theta$, получим распределение:

$$f(t, \theta, p, c) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{p+k}{c} \right)} t^{\,p+k-1} \exp\left(-t^c \right), \quad (17)$$

$$F(t, \theta, p, c) = \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{p+k}{c} \right)} \int_0^t \tau^{p+k-1} \exp\left(-\tau^c \right) d\tau. \quad (18)$$

Функции (17), (18) описывают распределение количества ($k = 0$), диаметров ($k = 1$), поверхности ($k = 2$) и объема ($k = 3$) в зависимости от размера частиц и позволяют найти все необходимые характеристики этих распределений, предварительно получив статистическую оценку параметров по полученным уравнениям правдоподобия.

Рассмотрим экспериментальные значения распределения веса капель дисперсной фазы, уносимых из сепарационного элемента [8]. Средние значения шести опытов, полученных методом отбора проб, приведены в таблице.

Распределение веса капель дисперсной фазы

Диаметр капель $d_i - d_{i+1}$, мкм	0–40	20–40	40–60	60–80	80–100
Относительный вес	0,03	0,23	0,38	0,21	0,15

Решение уравнений правдоподобия (14)–(16) дает значения параметров: $\theta = 49{,}2$, $c = 2{,}233$, $p = 3{,}373$ и функцию распределения объемов:

$$F_3(d) = 2{,}52 \int_0^{d/49{,}2} t^{2{,}373} \exp\left(-t^{2{,}233} \right) dt. \quad (19)$$

Полученное распределение позволяет рассчитать все необходимые характеристики распределения количества, размера, поверхности и объема исследуемой дисперсной фазы и применить их для расчета эффективности процессов разделения газожидкостных потоков [9].

Заключение. Обобщенное гамма-распределение имеет широкую область применения в силу своей универсальности. Но его использование ограничивалось отсутствием способов достоверной оценки параметров на основании статистических данных.

Предложенный метод наибольшего правдоподобия и полученные уравнения (14)–(16) позволяют получить состоятельные и асимптотически-эффективные статистические оценки параметров распределения.

Полученное распределение объемов (19) частиц дисперсной фазы может быть использовано для расчета эффективности разделения фаз в газожидкостных потоках.

Литература

1. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.

2. Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, вып. 1. С. 31–38.

3. Коузов П. А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1987. 264 с.

4. Янке Е., Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 458 с.

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

6. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.

7. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Мир, 1975. 648 с.

8. Левданский Э. И., Волк А. М., Плехов И. М. О законе распределения частиц при дроблении // ТОХТ. 1986. № 5. С. 672–677.

9. Волк А. М. Эффективность разделения газожидкостных потоков // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2006. Вып. XIV. С. 42–45.

References

1. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statistics*, 1962, vol. 33, pp. 1187–1192.

2. Korolev V. Yu., Krylov V. A., Kuz'min V. Yu. Stability of finite mixtures of generalized gamma distributions with respect to perturbations of parameters. *Informatika i eye primeneniya* [Computer science and its applications], 2011, vol. 5, issue 1, pp. 31–38 (In Russian).

3. Kouzov P. A. *Osnovy analiza dispersionnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov* [Principles of analysis of variance and composition of industrial dust from grinding materials]. Leningrad, Khimiya Publ., 1987. 264 p.

4. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nyye funktsii: Formuly, grafiki, tablitsy* [Special functions: Formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 458 p.

5. Feller V. *Vvedeniye v teoriyu veroyatnostey i eye prilozheniya* [An introduction to probability theory and its applications]. In 2 vol., vol. 2. Moscow, Mir Publ., 1984. 738 p.

6. Ayvazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Applied Statistics: Basics of modeling and primary processing]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1983. 471 p.

7. Kramer G. *Matematicheskiye metody statistiki: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Mathematical Methods of Statistics: Basics of modeling and primary data processing]. Moscow, Mir Publ., 1975. 648 p.

8. Levdanskiy E. I., Volk A. M., Plekhov I. M. On the particle distribution law in crushing. *Tekhnicheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Technical Foundations of Chemical Engineering], 1986, no. 5, pp. 672–677 (In Russian).

9. Volk A. M. Separation efficiency of gas-liquid flow. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], serias VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2006, issue XIV, pp. 42–45 (In Russian).

Информация об авторе

Волк Анатолий Матвеевич − кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

Information about the author

Volk Anatoliy Matveevich − PhD (Engineering), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Поступила 05.03.2016