УДК 517.982.45

Т. Г. Шагова
Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫХ МНЕМОФУНКЦИЙ

Рассмотрена задача аппроксимации обобщенных функций новыми обобщенными функциями (мнемофункциями, порожденными рациональными функциями), которые образуют подалгебру в алгебре новых обобщенных функций, и асимптотические разложения которых имеют специальный вид. Построены асимптотические разложения некоторых классов рациональных мнемофункций, в частности, ассоциированных с обобщенными функциями δ и $P(1\ /\ x)$, а также исследовано их поведение на бесконечности. Ввиду того, что произведение обобщенных функций не может быть корректно определено в пространстве обобщенных функций, для δ^2 и $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ построены асимптотические разложения, главным членом которых является δ-функция с бесконечно большим коэффициентом. В работе показано, что равенство, представленное в монографии [1], имеет место только для аппроксимаций определенного вида.

Ключевые слова: аппроксимация, мнемофункция, рациональная мнемофункция, асимптотическое разложение.

T. G. Shagova
Belarusian State Technological University

ON THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF RATIONAL MNEMOFUNCTIONS

The problem of generalized functions approximation by new generalized functions (mnemofunctions generated by rational functions) is considered in the article. They form a subalgebra in the algebra of new generalized functions and their asymptotic expansions have a special type. The approximations of distributions δ and $P(1\ /\ x)$ by mnemofunctions generated by rational functions are considered. Asymptotic expansions were built for such mnemofunctions and their behavior was investigated. Asymptotic expansions for δ^2 and $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ which are not defined as generalized functions, were obtained. The major term of these expansions is δ-function with infinitely large coefficient. It was shown that the equality given in the monograph [1] holds only for approximations of special type.

Key words: approximation, mnemofunction, rational mnemofunction, asymptotic expansion.

Введение. В связи с невозможностью введения ассоциативного всюду определенного произведения обобщенных функций стала развиваться теория новых обобщенных функций. В рамках данной теории рассматриваются новые объекты, которые обладают основными свойствами обобщенных функций, но в то же время допускают корректно определенную операцию умножения, т. е. образуют алгебру. Практически все эти конструкции основаны на некоторой аппроксимации обобщенных функций семейством гладких функций $f_\varepsilon(x)$, зависящих от малого параметра ε. Поскольку по своему построению новые обобщенные функции сохраняют информацию о способе их получения из гладких, то для таких объектов начали использовать название мнемофункции (от слова «mnemo» – память) [2].

Связь мнемофункций с классическими обобщенными функциями устанавливается с помощью понятия ассоциированности. Будем говорить, что обобщенная функция $u \in D'(\mathbf{R})$ ассоциирована с мнемофункцией $f_\varepsilon(x)$ и что f есть регуляризация функции u, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \langle u, \varphi\rangle$$

для любой функции $\varphi \in D(\mathbf{R})$. Будем обозначать $(f_\varepsilon) \sim u$.

С позиции ассоциированности понятие произведения обобщенных функций возникает достаточно естественно. Произведением функций $u, v \in D'(\mathbf{R})$, ассоциированных с мнемофункциями (f_ε) и (g_ε) соответственно, будем считать обобщенную функцию w, ассоциированную с произведением мнемофункций $(f_\varepsilon g_\varepsilon)$. Однако для семейства $(f_\varepsilon g_\varepsilon)$ может не существовать ассоциированной обобщенной функции, что частично преодолевается за счет того, что для мнемофункций часто существуют асимптотические разложения в пространстве $D'(\mathbf{R})$ вида

$$(f_\varepsilon) \approx \sum_{k=-m}^{+\infty} \varepsilon^k u_k,\ u_k \in D'(\mathbf{R}).$$

С точки зрения асимптотических разложений произведением обычных обобщенных функций можно считать асимптотическое разложение произведения ассоциированных мнемофункций.

Особый интерес вызывают мнемофункции, порожденные рациональными функциями, т. е. мнемофункции вида $f_\varepsilon(x) = \dfrac{P(x/\varepsilon)}{Q(x/\varepsilon)}$, которые будем в дальнейшем называть рациональными. Такие мнемофункции образуют подалгебру в алгебре обобщенных функций, и их асимптотические разложения имеют специальный вид. Поэтому в данной работе рассматриваются рациональные мнемофункции и их асимптотические разложения.

Основная часть. Академиками А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским была получена общая формула нахождения асимптотических разложений интегралов, зависящих от параметра, основанная на методе последовательных разложений [3]. С точки зрения теории мнемофункций эта формула дает асимптотическое разложение мнемофункций вида $f_\varepsilon(x) = f(x/\varepsilon)$, так называемых самоподобных мнемофункций. С помощью этой формулы были построены асимптотические разложения ряда рациональных мненофункций. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Тогда семейство функций $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ задает аппроксимацию δ-функции. И асимптотическое разложение имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{\pi\left(\varepsilon^2 + x^2\right)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{2k} \left(\frac{\varepsilon}{\pi} P\left(\frac{1}{x^{2k+2}}\right) + \frac{\delta^{(2k)}}{(2k)!} \right).$$

Существует много других аппроксимаций δ-функции. Асимптотические разложения таких семейств имеют главный член, равный δ, и отличаются младшими членами. Например, функция $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}$. Ее асимптотическое разложение:

$$\frac{\varepsilon^3\sqrt{2}}{\pi(\varepsilon^4 + x^4)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{4k} \left(\frac{\delta^{(4k)}}{(4k)!} + \frac{\varepsilon^2 \delta^{(4k+2)}}{(4k+2)!} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^3 P\left(\frac{1}{x^{4k+4}}\right) \right).$$

Функцию $1/x$ аппроксимирует семейство функций, порожденное $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Тогда ее асимптотический ряд:

$$\frac{\varepsilon x}{\varepsilon^2 + x^2} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{2k} \left(P\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right) + \varepsilon\pi\delta^{(2k+1)} \right).$$

Следует отметить, что асимптотические разложения рациональных мнемофункций имеют специальный вид: коэффициентами таких разложений могут быть только δ-функция и ее производные или степенные функции.

В монографии П. Антосика, Я. Микусинского и Р. Сикорского «Теория обобщенных функций: секвенциальный подход» [1] для квадратов функций δ и $P(1/x)$ приведено следующее равенство:

$$\delta^2 - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = -\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{x^2}.$$

Поскольку выражения δ^2 и $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ как обобщенные функции не определены, левая часть формулы, очевидно, не имеет смысла. В то время, когда правая часть равенства определена в пространстве обобщенных функций. Формальное доказательство этого выражения дано в [1]. Рассмотрим это равенство с позиции мнемофункций. В качестве аппроксимаций δ и $P(1/x)$ возьмем рациональные функции $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$ и $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ соответственно. Асимптотические разложения мнемофункций, порожденных данными, были приведены ранее. Найдем асимптотические разложения, соответствующие квадратам мнемофункций. Для наглядности выпишем только несколько первых членов разложений:

$$(f_\varepsilon)^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \sim \frac{\delta}{\varepsilon \cdot 2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\frac{\delta^{(2)}}{2!} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} P\left(\frac{1}{x^4}\right) - \frac{3\varepsilon^3}{2\pi}\frac{\delta^{(4)}}{4!} + \ldots;$$
$$(g_\varepsilon)^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \sim \frac{\pi\delta}{2\varepsilon} + P\left(\frac{1}{x^2}\right) -$$
$$- \frac{3\pi\varepsilon}{2}\frac{\delta^{(2)}}{2!} - 2\varepsilon^2 P\left(\frac{1}{x^4}\right) + \ldots$$

Подставив эти разложения в равенство, видим, что главный член разности будет следующим:

$$\left(f_\varepsilon\right)^2-\frac{1}{\pi^2}\left(g_\varepsilon\right)^2\approx-\frac{1}{\pi^2}P\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Что и требовалось показать.

Однако если в качестве аппроксимации δ-функции взять функцию $f_1(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}$, то первые члены асимптотического разложения, соответствующего квадрату мнемофунции:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}f_1^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\sim\frac{3}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon}\delta+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}\pi}\frac{\delta^{(2)}}{2!}+$$
$$+\frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{2}\pi}\frac{\delta^{(4)}}{4!}+\ldots$$

И если $P(1/x)$ будем аппроксимировать функцией $g(x)$, то

$$\left(f_{1\varepsilon}\right)^2-\frac{1}{\pi^2}\left(g_\varepsilon\right)^2\approx\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\frac{\delta}{2\pi\varepsilon}-\frac{1}{\pi^2}P\left(\frac{1}{x^2}\right)+\ldots,$$

т. е. δ-функция с бесконечно большим коэффициентом. Отсюда следует, что с точки зрения теории мнемофункции выполнимость данного равенства зависит от способа аппроксимации. Для того, чтобы это равенство выполнялось, следует аппроксимировать δ и $P(1/x)$ рациональными функциями, удовлетворяющими равенству: $\int f^2(x)dx=\frac{1}{\pi^2}\int g^2(x)dx.$

Заключение. В ходе работы были получены асимптотические разложения некоторых рациональных мнемофункций. Коэффициентами таких разложений могут быть только функция δ и ее производные, а также степенные функции. Рассмотрены некоторые аппроксимации обобщенных функций δ и $P(1/x)$ и построены их асимптотические разложения, а также построены разложения мнемофункций, соответствующих квадратам функций δ и $P(1/x)$. Главным членом таких разложений является δ-функция с бесконечно большим коэффициентом.

Литература

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.

2. Антоневич А. Б., Пыжкова О. Н., Третьякова Л. Г. Асимптотические разложения для произведений базовых обобщенных функций // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 5. С. 18–31.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26–29.

References

1. Antosik P., Mikusinskiy Ya., Sikorskiy R. *Teoriya obobshchennykh funktsiy: sekventsial'nyy podkhod* [The theory of generalized functions: sequential approach]. Moscow, Mir Publ., 1976. 312 p.

2. Antonevich A. B., Pyzhkova O. N., Tret'yakova L. G. Asymptotic expansions for products of basic distributions. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi* [Proceedings of mathematical institution of NASB], 2000, vol. 5, pp. 18–31 (In Russian).

3. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Asymptotic expansions of integrals with slowly decreasing kernel. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1959, vol. 126, no. 1, pp. 26–29 (In Russian).

Информация об авторе

Шагова Татьяна Григорьевна – магистр физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tanya.shagova@gmail.com

Information about the author

Shagova Tat'yana Grigor'evna – Master of Physical and Mathematical Sciences, assistant lecturer, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tanya.shagova@gmail.com

Поступила 11.03.2016