УДК 517.968

Л. Д. Яроцкая
Белорусский государственный технологический университет

ОБ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ ТИПА СВЕРТКИ КОНТОРОВИЧА − ЛЕБЕДЕВА

Настоящая работа посвящена изучению интегрального уравнения второго рода с двумя ядрами. В качестве одного из них взята классическая свертка для преобразования Конторовича – Лебедева, а в качестве второго – обобщенная свертка, построенная с помощью композиционного равенства для преобразования Конторовича – Лебедева. Предполагается, что свертываемые и искомые функции принадлежат некоторым весовым пространствам Лебега измеримых функций. Путем применения преобразования Конторовича – Лебедева рассматриваемое уравнение сведено к линейному алгебраическому уравнению относительно преобразования Конторовича – Лебедева и некоторого интегрального преобразования по индексу с ядром, связанным с функцией Макдональда. Далее с помощью аппарата интегралов типа Коши полученное уравнение сводится к краевой задаче Римана для полуплоскости в классе функций, исчезающих на бесконечности, и применяются для нее соответствующие известные результаты. Получены условия аналитического продолжения интеграла Конторовича – Лебедева в некоторую полосу, установлена связь между интегралом типа Коши по действительной оси и интегралом Конторовича – Лебедева, записаны аналоги формул Сохоцкого. При этом рассмотрены условия равносильности полученных задач, даны достаточные условия разрешимости и алгоритм для нахождения решения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, преобразования по индексу, преобразование Конторовича – Лебедева, композиционная свертка.

L. D. Yarotskaya
Belarusian State Technological University

ON THE EQUATION WITH TWO CONVOLUTIONS OF THE KONTOROVICH – LEBEDEV TYPE IN THE KERNELS

The integral equation of the second kind with two kernels is investigated. One of them is the Kontorovich − Lebedev convolution and the second one is the generalized convolution construction connected with the index transforms of the Kontorovich – Lebedev type. It’s supposed that kernels and unknown functions belonging to some weighted Lebesgue spaces of measurable functions. Applying the Kontorovich − Lebedev transform this equation is reduced to a linear algebraic equation associated with the Kontorovich − Lebedev transform and some integral transform with respect to a parameter of the Macdonald type function. Then by means of the Cauchy type integral the last equation can be reduced to the Riemann boundary value problem for the half-plane in the class of functions vanishing at infinity. The solutions are obtained applying the well known results for the Riemann boundary value problem. We obtain the conditions of the analytic continuation of the Kontorovich − Lebedev integral in some strip. We establish the connections between the Cauchy type integral along the real axis and the Kontorovich − Lebedev integral and the analogues Sokhotskii formulas. As a result, sufficient conditions for solvability and the algorithm for receiving the solutions are given.

Key words: integral equation, index transform, Kontorovich – Lebedev transform, general convolution.

Введение. В работе автора [1] впервые были исследованы интегральные уравнения с неподвижной особенностью, разрешимые в замкнутой форме посредством преобразования Конторовича – Лебедева. В дальнейшем оказалось, что ядра рассматриваемых уравнений первого и второго рода являются свертками двух функций. Установлено [2], что преобразование Конторовича – Лебедева порождает целый класс преобразований по индексу. В монографии [3] разработан метод построения композиционных сверток для таких преобразований. В частности, дано понятие обобщенной свертки $(f * g)$ двух функций f и g как операции умножения в некоторой алгебре, когда с помощью действия соответствующего интегрального оператора K на свертку приходим к обычному умножению образов. Если при некоторых условиях имеет смысл обратный оператор от произведения функций, то в некотором пространстве функций свертку можно определить равенством Парсеваля:

$$(f * g)(x) = K^{-1}\big([K_1 f][K_2 g]\big)(x),$$

где K_1, K_2 − некоторые интегральные операторы.

Это позволило полученные конструкции применить для исследования некоторых классов интегральных уравнений с композиционной сверткой [2].

Основная часть.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим преобразование Конторовича – Лебедева следующего вида:

$$K_{i\tau}[f]=\int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)dx,\ \tau\ge 0. \qquad (1)$$

Здесь $K_{i\tau}(x)$ – функция Макдональда мнимого параметра, для которой справедливо следующее интегральное представление [3]:

$$K_{i\tau}(x)=\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,u}\cos(\tau u)du. \qquad (2)$$

Обозначим через $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$ пространство измеримых на положительной полуоси функций со степенным весом, норма которого определяется формулой

$$\|f\|_{\nu,p}=\left(\int_0^\infty \left|x^\nu f(x)\right|^p \frac{dx}{x}\right)^{1/p}<\infty, \qquad (3)$$

где $\nu\in\mathbf{R}$, $p\ge 1$. Заметим, что в случае $\nu p=1$ пространство $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$ совпадает с пространством $L_p(\mathbf{R}_+)$.

В монографии [3] показано, что оператор Конторовича – Лебедева (1) ограничено действует из пространств функций $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ с параметром $0<\nu<1$ в пространство $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Через

$$KL(L_{\nu,p})=\{g:\ g(\tau)=K_{i\tau}[f]\} \qquad (4)$$

обозначим область значения преобразования Конторовича – Лебедева (1) функций f пространства $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$, где $\nu<1$, $p\ge 1$. Показано [3], для того чтобы $g(\tau)\in KL(L_{\nu,p})$, $0<\nu<1$, $p\ge 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$g(\tau)\in L_r(\mathbf{R}_+),\ r\ge 1,$$
$$\underset{\varepsilon\to 0+}{\mathrm{l.i.m.}}(I_\varepsilon g)\in L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+). \qquad (5)$$

Кроме того, справедлива следующая формула обращения преобразования (1):

$$f(x)=\underset{\varepsilon\to 0+}{\mathrm{l.i.m.}}(I_\varepsilon g)(x),\quad x>0, \qquad (6)$$

$$(I_\varepsilon g)(x)=\frac{2}{\pi^2x^{1-\varepsilon}}\times$$
$$\times\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}((\pi-\varepsilon)\tau)K_{i\tau}(x)g(\tau)d\tau,\ \varepsilon\in(0,\pi), \qquad (7)$$

причем предел в (5), (6) понимается по норме (3) пространства $L_{\nu,p}(\mathbf{R}_+)$.

Двойной интеграл

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2t}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{ty}{2u}-\frac{yu}{2t}-\frac{ut}{2y}}f(u)g(y)dudy \qquad (8)$$

называется сверткой двух функций f и g для преобразования Конторовича – Лебедева (1).

Лемма 1 [3]. Свертка (8) функций $f(x)$ и $g(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$ существует и принадлежит пространству $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ с параметром $\nu>1/2$. Кроме того, если $1/2<\nu<1$, то для любого $x>0$ справедливо факторизационное равенство

$$\left[K_{i\tau}(f*g)\right](x)=[K_{i\tau}f](x)[K_{i\tau}g](x). \qquad (9)$$

Подчеркнем, что свертку (8) можно определить как обратное преобразование Конторовича – Лебедева (7) функции $K_{i\tau}[f]K_{i\tau}[g]$.

В работе [4] построена свертка $(f\hat{*}g)$ двух функций f и g, определенная обратным преобразованием Конторовича – Лебедева функции $\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]$:

$$(f\hat{*}g)(x)=\frac{2}{\pi^2x}\times$$
$$\times\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]d\tau. \qquad (10)$$

Здесь

$$\hat{F}(\tau)=\int_0^\infty M_{i\tau}(u)f(u)du - \qquad (11)$$

интегральное преобразование, где специальная функция ядра определяется интегралом

$$M_{i\tau}(u)=\int_0^\infty e^{-u\,\mathrm{ch}\,t}\sin(\tau t)dt. \qquad (12)$$

Заметим, что интеграл (12) напоминает интегральное представление (2) для функции Макдональда $K_{i\tau}(x)$.

В работе [4] доказаны следующие свойства преобразования (11) и свертки (10). В частности, если $f(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$, то интеграл в (11) существует и $\hat{F}(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$.

Лемма 2. Пусть $f(x), g(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$, $G(x)\in L_1\left(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+\right)$, где $G(x)$ – преобразование (1) функции $g(y)$ и $0\le\delta<\pi/2$. Тогда свертка (10) функций $f(x)$ и $g(x)$ существует и принадлежит пространству $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, где $\nu>1$.

Для функций $f(x)\in L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ с параметром $1\le\nu<1+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0>0$, определим преобразование Конторовича – Лебедева следующим образом:

$$K_{i\tau}[f]=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)x^\varepsilon dx,$$
$$0<\varepsilon\le\varepsilon_0. \qquad (13)$$

Лемма 3. Пусть $f(x), g(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразование (13) свертки (10) существует и справедливо факторизационное равенство

$$K_{i\tau}\left[\left(f \hat{*} g\right)\right] = \hat{F}(\tau) K_{i\tau}[g]. \qquad (14)$$

2. Аналитическое продолжение интеграла Конторовича – Лебедева. Рассмотрим функцию комплексного переменного z

$$K_{iz}[f] = \int_0^{\infty} K_{iz}(x) f(x) dx. \qquad (15)$$

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, $0 < \nu < 1$. Тогда $K_{iz}[f]$ – аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1 - \nu$.

Доказательство. Используем формулу [3]

$$K_{iz}(x) = \frac{1}{2} \int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} e^{-x \operatorname{ch} \beta + iz\beta} d\beta, \quad \delta \in [0, \pi/2). \qquad (16)$$

Сделав замену переменной $\beta = u + i\delta$, оценим:

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} K_{iz}(x) \right| = C \frac{e^{-\delta |\operatorname{Re} z|}}{2} < \infty. \qquad (17)$$

Применяя неравенство Гёльдера, оценку (17) и обобщенное неравенство Минковского, имеем:

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} K_{iz}(x) f(x) dx \right| \le C e^{-\delta |\operatorname{Re} z|} \|f\|_{\nu,2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u \operatorname{Im} z} \operatorname{ch}^{\nu-1} u \sqrt{u^2 + \delta^2} du.$$

Интеграл в последнем равенстве сходится, если $|\operatorname{Im} z| < 1 - \nu$. Следовательно, функция $K_{iz}[f]$ является непрерывно дифференцируемой и аналитической в этой полосе. Теорема доказана.

3. Связь интеграла Конторовича – Лебедева (1) с интегралом типа Коши [5]. В силу четности функции Макдональда возьмем $\tau \in \mathbf{R}$.

Пусть $f(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - z} \int_0^{\infty} K_{i\tau}(t) f(t) dt.$$

Воспользовавшись представлением (16) при $\delta = 0$, в силу абсолютной сходимости поменяв порядок интегрирования в полученном повторном интеграле, можем представить интеграл типа Коши в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{0} e^{-t \operatorname{ch} u} du \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau u}}{\tau - z} d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} u} du \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau u}}{\tau - z} d\tau.$$

В зависимости от того, в какой полуплоскости лежит z, возможны два случая:

1) пусть $\operatorname{Im} z > 0$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} u + iuz} du\, dt;$$

2) пусть $\operatorname{Im} z < 0$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{0} e^{-t \operatorname{ch} u + iuz} du\, dt.$$

Поскольку интеграл типа Коши представляет собой аналитическую функцию в плоскости с разрезом по действительной оси, то функции, определенные по формулам

$$F^+(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} u + iuz} du\, dt, \qquad (18)$$

$$F^-(z) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{0} e^{-t \operatorname{ch} u + iuz} du\, dt, \qquad (19)$$

будут аналитическими соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Кроме того, справедливы формулы Сохоцкого:

$$F^+(x) - F^-(x) = F(x), \qquad (20)$$

$$F^+(x) + F^-(x) = i\widehat{F}(x). \qquad (21)$$

Введем следующие два класса функций:

$$(KL)^{\pm} = \left\{ F^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) \int_{0(-\infty)}^{\infty(0)} e^{-t \operatorname{ch} u + iux} du\, dt \right\},$$

где $f(t)$ из класса функций (4).

Теорема 2. Для того чтобы заданная на действительной оси функция $F(x)$ из (KL) принадлежала классу $(KL)^+$ $\left((KL)^-\right)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\int_0^{\infty} f(t) \int_{-\infty(0)}^{0(\infty)} e^{-t \operatorname{ch} u + iux} du\, dt = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \qquad (22)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $F(x) \in (KL)^+$. Тогда

$$F(x) = F^+(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} u + iux} du\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} F(x) + \frac{i}{2} \widehat{F}(x).$$

Отсюда имеем: $F(x) = i\widehat{F}(x)$, и из второй формулы Сохоцкого (21) следует, что $F^-(x) = 0$, т. е. выполняется условие (22).

Достаточность. Если выполняется условие (22), тогда из первой формулы Сохоцкого (20) следует, что функция $F^+(x) = F(x)$ принадлежит классу $(KL)^+$. Теорема доказана.

4. Постановка задачи. Пусть $t > 0$. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$f(t) + (f * m_1)(t) + (f \,\widehat{*}\, m_2)(t) = g(t) \quad (23)$$

в классе функций

$$L_2(\mathbf{R}_+) \cap L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+) \cap L_{\mu,2}(\mathbf{R}_+), \quad (24)$$

где $1/2 < \nu < 1,\ 1 \le \mu < 1 + \varepsilon_0,\ \ \varepsilon_0 > 0,$ а свертки $(f * m_1)$ и $(f \,\widehat{*}\, m_2)$ определяются по формулам (8) и (10) соответственно.

Пусть $M_k(x) = K_{i\tau}[m_k]$ − преобразование (1) функций $m_k(t),\ \ k = 1, 2.$ Предположим, что $M_2(x) \in L_1\left(xe^{(\pi-\delta)x};\ \mathbf{R}_+\right),\ \ 0 \le \delta < \pi/2,$ и

$$1 + M_1(x) \pm iM_2(x) \ne 0. \quad (25)$$

5. Решение задачи. Используя свойства сверток (8), (10), леммы 1, 2, 3, формулы (9), (14), применим преобразование Конторовича – Лебедева (1), (13) к уравнению (23) и сведем его при $-\infty < x < \infty$ к виду

$$F(x) + M_1(x)F(x) + M_2(x)\widehat{F}(x) = G(x) \quad (26)$$

в классе функций

$$KL\left(L_2(\mathbf{R}_+) \cap L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+) \cap L_{\mu,2}(\mathbf{R}_+)\right), \quad (27)$$

где $1/2 < \nu < 1,\ 1 \le \mu < 1 + \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0.$

Уравнения (23) и (26) равносильны, так как оператор Конторовича – Лебедева, действующий из пространства (24) в пространство (27), можно рассматривать как сужение прежнего оператора $K_{i\tau}[f] : L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+) \to KL\left(L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)\right),$ $0 < \nu < 1,$ и обратный оператор может быть определен по формуле (6) со сходимостью по норме пространства $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Введем кусочно аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит решение уравнения (26):

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \quad (28)$$

Согласно формулам (18), (19), теореме 2, предельные значения функции $F(z)$ принадлежат классам $(KL)^+$ и $(KL)^-$. Внося значения $F(x)$ и $\widehat{F}(x)$ из (20), (21) в уравнение (26) и решая его относительно $F^+(x)$, получим, что кусочно аналитическая функция $F(z)$ должна являться решением краевой задачи Римана:

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (29)$$

$$D(x) = \frac{1 + M_1(x) + iM_2(x)}{1 + M_1(x) - iM_2(x)}, \quad H(x) = \frac{G(x)}{1 + M_1(x) - iM_2(x)}. \quad (30)$$

Уравнение (26) и задача (29) равносильны в следующем смысле: если $F(z)$, представимая в виде (18), (19), есть общее решение краевой задачи (29), то функция $F(x)$ из (20) есть решение уравнения (26); обратно, если $F(x)$ − общее решение уравнения (26), то интеграл типа Коши (28) есть решение задачи Римана (29), представимое в виде (18), (19).

Краевая задача Римана подробно изучена в [4]. Пусть κ − индекс задачи (29). Учитывая, что выполнено условие нормальности (25), выпишем все необходимые формулы:

$$F(z) = X(z)\left[\Psi(z) + \frac{P_{\kappa-1}(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right], \quad (31)$$

где $P_{\kappa-1}(z)$ − многочлен степени $\kappa - 1$,

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}, \quad (32)$$

$$\Gamma^{\pm}(z) = \pm\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\gamma(t)\int_{0(-\infty)}^{\infty(0)} e^{iuz - t\,\mathrm{ch}\,u}\,du\,dt, \quad (33)$$

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau) K_{i\tau}(x) \ln\left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^{-\kappa} D(\tau)\right] d\tau, \quad (34)$$

$$\Psi^{\pm}(z) = \pm\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\psi(t)\int_{0(-\infty)}^{\infty(0)} e^{iuz - t\,\mathrm{ch}\,u}\,du\,dt, \quad (35)$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int_0^{\infty} \tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau K_{i\tau}(x)\frac{H(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau. \quad (36)$$

В работе [3] показано, что функция, представимая интегралом Конторовича – Лебедева (1), исчезает на бесконечности и является бесконечно дифференцируемой функцией и, следовательно, удовлетворяет условию Гёльдера [5] с любым показателем $\lambda \le 1$. Используя результаты задачи Римана для полуплоскости в классе исчезающих на бесконечности функций [5], сформулируем следующий результат исследования.

Теорема 3. Если индекс задачи

$$\kappa = \mathrm{Ind}\,\frac{1 + M_1(x) + iM_2(x)}{1 + M_1(x) - iM_2(x)}$$

положителен, то однородное уравнение (23) $(g=0)$ имеет ровно κ линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо и его решение зависит от κ произвольных комплексных постоянных.

В случае $\kappa \le 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\kappa = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Если индекс задачи отрицателен, то условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{X^{+}(t)} \frac{dt}{(t+i)^{m}} = 0,$$
$$m = 1, \ldots, |\kappa|,$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородного уравнения.

Во всех случаях, когда решение уравнения (23) существует, его можно найти по формулам (6), (7), если $g(\tau) = F^{+}(\tau) - F^{-}(\tau)$, где $F^{+}(x)$, $F^{-}(x)$ – предельные значения построенного по формулам (31)–(36) решения задачи (29).

Заключение. Построено решение для интегрального уравнения второго рода с двумя ядрами типа свертки Конторовича – Лебедева с достаточными условиями разрешимости. Установлена связь между интегралом типа Коши и интегралом Конторовича – Лебедева. Получены аналоги формул Сохоцкого.

Литература

1. Лебедев Н. Н. Сингулярные интегральные уравнения, связанные с интегральными представлениями математической физики // Доклады АН СССР. 1949. Т. 65, № 1. С. 621−624.

2. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Vol. 287. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. 336 p.

3. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.

4. Яроцкая Л. Д. Об одной интегральной свертке, связанной с преобразованием Конторовича – Лебедева // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 31–33.

5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

References

1. Lebedev N. N. Some singular integral equations connected with the integral representations of mathematical physics. *Doklady AN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1949, vol. 65, no. 1, pp. 621−624 (In Russian).

2. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Vol. 287. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1994. 336 p.

3. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore, World Scientific Publ., 1996. 252 p.

4. Yarotskaya L. D. On one integral convolution related to the Kontorovich – Lebedev transform. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 31–33 (In Russian).

5. Gakhov F. D. *Kraevyye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.

Информация об авторе

Яроцкая Людмила Дмитриевна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

Information about the authors

Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила 10.03.2016