УДК 62.50

И. Ф. Кузьмицкий, И. К. Асмыкович, А. В. Лапето
Белорусский государственный технологический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЛОЖЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЭЛЕМЕНТАМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Работа посвящена матричным методам синтеза устройства управления непрерывными объектами. Рассматривается необходимая последовательность математических преобразований для формирования совокупности желаемых законов управления.

Теория вложения разработана в качестве математического аппарата для систем уравнений, в которых отсутствуют отклоняющиеся аргументы по каналам управления. Для объектов управления, описываемых линейными динамическими моделями с отклоняющимися аргументами по каналам управления, предлагается вначале использовать передаточные матрицы, содержащие звенья запаздывания. Затем каждый из элементов дискретной передаточной матрицы преобразуется в дробно-рациональную дискретную передаточную функцию, что дает возможность исключить в явной форме звенья запаздывания.

Применительно к преобразованной математической модели объекта управления используется технология вложения, которая позволяет согласовать матричные уравнения с различной формой и размерностью матриц. Далее формируются желаемые дискретные передаточные матрицы.

Поскольку дискретные передаточные функции формируются относительно переменных состояния, а их размерность увеличена за счет преобразования моделей звеньев запаздывания, то возникает дополнительная проблема в получении информации о части переменных состояния. Для решения этой задачи предложено использовать алгоритм наблюдателя Люенбергера.

Ключевые слова: запаздывание, объект управления, модель, матрица, наблюдатель.

I. F. Kuz’mitskiy, I. K. Asmykovich, A. V. Lapeto
Belarusian State Technological University

USING THE EMBEDDING TECHNOLOGY IN THE SYNTHESIS OF LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH DELAY ELEMENTS

The work is devoted to the matrix methods of synthesis of control systems. The sequence of mathematical transformations necessary to generate the desired set of control laws was considered.

The embedding theory is designed as a mathematical instrument for systems of equations, in which there are no divergent arguments control channels. To control the objects described by linear dynamic models with deviating arguments for control channels is proposed first to use the transfer matrix containing the delay units. Then convert the original transfer matrix. Each of the discrete elements of the transfer matrix is converted to a fractional rational discrete transfer function, which eliminates explicit delay units.

With respect to the transformed mathematical model of the control object the attachment technology that allows you to align the matrix with different shape and dimension of the matrix is used. The next step is the formation of the desired discrete transfer matrices.

Since the discrete transfer functions are formed with respect to the state variables and their dimension is increased due to the conversion of units of delay models, there is the additional problem of obtaining information about the state of the variables. To solve this problem it is proposed to use Luenberger’s observer algorithm.

Key words: delay, control object, model, matrix, observer.

Введение. Непрерывные технологические объекты содержат значительное количество распределенных в пространстве управляющих устройств.

При описании таких объектов сосредоточенной линейной моделью имеем запаздывания по каналам управления, что можно представить в виде передаточной матрицы:

$$W_0(p)=\begin{bmatrix} W_{1,1}(p)e^{-\tau_{1,1}p} & \cdots & W_{1,s}e^{-\tau_{1,s}p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m,1}(p)e^{\tau_{m,1}} & \cdots & W_{m,s}e^{-\tau_{m,s}p} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где m, s – размерности вектора выхода и вектора управляющих воздействий соответственно; $\tau_{i,j}$ – величины запаздывания соответствующих пар управляющих и выходных переменных.

При использовании такого подхода возникает ряд трудностей в нахождении законов управления из-за наличия звеньев запаздывания в составе объекта управления. Рассмотрим алгоритм решения подобных задач для дискретных систем управления.

Основная часть. При переходе к дискретному аналогу этой модели имеем:

$$W_0(z) = \begin{bmatrix} W_{1,1}(z) z^{-q_{1,1}} & \cdots & W_{1,s} z^{-q_{1,s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m,1}(z) z^{-q_{m,1}} & \cdots & W_{m,s} z^{-q_{m,s}} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Расширим модели дискретных передаточных функций передаточной матрицы $W_0(z)$ путем включения в их модели элементов запаздывания:

$$W_0 = \begin{bmatrix} W_{1,1}(z) & \cdots & W_{1,s}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m,1}(z) & \cdots & W_{m,s}(z) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Например, передаточную функцию

$$\frac{z^{-1}}{1 + 2 \cdot z^{-1}} \cdot z^{-2}$$

подставим в виде

$$\frac{0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + z^{-3}}{1 + 2 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3}}.$$

В пространстве переменных состояния модель объекта управления примет следующий вид:

$$\begin{gathered} z \cdot x(z) = A \cdot x(z) + B \cdot v(z), \\ y(z) = C \cdot x(z), \\ x \in R^n,\ v \in R^s,\ y \in R^m, \end{gathered} \quad (4)$$

где x – вектор состояния; v – входной вектор; y – выходной вектор.

Пусть линейный регулятор имеет вид

$$v = G \cdot u - K \cdot y,\ U \in R^l, \quad (5)$$

где G – матрица связей предкомпенсатора; u – вектор управления на входе систем; K – матрица связей регулятора.

При условии физической наблюдаемости переменных состояния x можем записать вектор состояния:

$$x(z) = W_x^u(z) \cdot u(z). \quad (6)$$

Требуется выбрать матрицы обратных связей регулятора $K(z)$ и предкомпенсатора $G(z)$, чтобы одна или некоторая совокупность передаточных функций приняла желаемое значение $W_{x,ж}^u(z)$. Традиционными методами [1, 2] решение ограничено большим числом разных условий.

На основе технологии вложения систем [1] имеем:

$$\begin{gathered} (z \cdot I_n - A) \cdot x - B \cdot v = 0, \\ -C \cdot x + y = 0, \\ K(z) \cdot y + v - G(z) \cdot u = 0, \\ u = u_1, \end{gathered} \quad (7)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} z \cdot I_n - A & 0 & -B & 0 \\ -C & I_m & 0 & 0 \\ 0 & K(z) & I_s & -G(z) \\ 0 & 0 & 0 & I_e \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Основные соотношения технологии вложения:

$$\begin{gathered} \Omega = \Sigma \cdot \Xi,\ \alpha = \Sigma \cdot \delta, \\ \beta = \pi \cdot \Xi,\ W_ж = \pi \cdot \delta, \end{gathered} \quad (9)$$

где Σ, Ξ – обратимые (полные) матрицы; α, β – матрицы вложения; π, δ – дополнительные матрицы собственных размеров.

Для нашей модели:

$$\begin{gathered} \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}^T, \\ \beta = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{gathered} \quad (10)$$

В результате подстановки и преобразований получаем:

$$\begin{gathered} \pi_x \cdot B \cdot K(z) \cdot C = I_n - \pi_x \cdot (I_n - A), \\ \pi_x \cdot B \cdot G(z) = W_x^u(z). \end{gathered} \quad (11)$$

Задавая некоторую дробно-рациональную матрицу π_x, можно найти $K(z)$ и $G(z)$.

Если учесть, что часть переменных недоступна измерению, то можно дополнить модель системы наблюдателем состояния Люенбергера:

$$\begin{gathered} z \cdot \tilde{x}(z) = A \cdot \tilde{x}(z) + L \cdot (y - \tilde{y}) + B \cdot v, \\ \tilde{y} = C \cdot \tilde{x},\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,\ \tilde{x} \in R^n, \end{gathered} \quad (12)$$

где $\tilde{x}$ – оценка состояния объекта; L – матрица обратных связей наблюдателя; $\tilde{x}_0$ – начальное значение $\tilde{x}$.

Модель регулятора перепишем в виде

$$v = G \cdot u - K \cdot \tilde{x},\ u \in R^l. \quad (13)$$

Исходная система уравнений движения системы выглядит так:

$$\begin{gathered} (z \cdot I_n - A) \cdot x - B \cdot v = x_0, \\ (z \cdot I_n - A) \cdot \tilde{x} - L(z) \cdot y + L(z) \cdot \tilde{y} - B \cdot v = x_0, \\ -C \cdot x + y = 0, \\ -C \cdot \tilde{x} + \tilde{y} = 0, \\ K(z) \cdot \tilde{x} + v - G(z) \cdot u = 0, \\ u = v. \end{gathered} \quad (14)$$

Проматрица данной системы имеет вид

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_n - A & 0 & 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & z \cdot I_n - A & -L(z) & L(z) & -B & 0 \\ -C & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & K(z) & 0 & 0 & I_s & -G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Матрицы вложения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}^T, \\ \beta &= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{16}$$

В результате преобразования получаем:

$$\begin{aligned} (\pi_x + \pi_{\tilde{x}}) \cdot B \cdot K(z) &= I_n - (\pi_x + \pi_{\tilde{x}}) \cdot (z \cdot I_n - A), \\ (\pi_x + \pi_{\tilde{x}}) \cdot B \cdot G(z) &= W^u_{ж,x}(z). \end{aligned} \tag{17}$$

Задавая дополнительную матрицу $(\pi_x + \pi_{\tilde{x}})$, можно найти $K(z)$ и $G(z)$.

Если задать передаточную матрицу относительно начальных условий x_0 к состоянию x системы, то образ системы будет $W^0_{ж,x}(z)$ и матрицы вложения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha &= [I_n \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \beta &= [I_n \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned} \tag{18}$$

Используя $W^0_{ж,x}(z)$, запишем уравнение для определения матрицы $K(z)$:

$$\begin{aligned} &W^0_{ж,x}(z) \cdot B \cdot K(z) \cdot C = \\ &= I_n - W^0_{ж,x}(z) \cdot (z \cdot I_n - A). \end{aligned} \tag{19}$$

Объединив (17) и (19), получим систему уравнений для нахождения матриц $K(z)$ и $G(z)$:

$$\begin{aligned} &W^0_{ж,x}(z) \cdot B \cdot K(z) \cdot C = I_n - W^0_{ж,x}(z) \times \\ &\times (z \cdot I_n - A), \\ &W^0_{ж,x}(z) \cdot B \cdot G(z) = W^u_{ж,x}(z). \end{aligned} \tag{20}$$

Вид решения определяется способом факторизации проматрицы. Можно осуществить факторизацию проматрицы в виде

$$\Omega = \Omega \cdot I_{n+m+s+l}. \tag{21}$$

В этом случае роль матрицы Σ играет сама проматрица, а матрица Ξ представляет собой единичную матрицу. С учетом предложенной факторизации получаем новую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &(z \cdot I_n - A) \cdot W^0_{ж,x}(z) + B \cdot K^*(z) \times \\ &\times C \cdot W^0_{ж,x}(z) = I_n, \\ &(z \cdot I_n - A) \cdot W^0_{ж,x}(z) - B \cdot G^*(z) + \\ &+ B \cdot K^*(z) \cdot C \cdot W^u_{ж,x}(z) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Результаты исследований [3] показывают, что матрицы $K(z) = K^*(z)$ и $G(z) = G^*(z)$.

Можно преобразовать уравнения (22), домножив слева на $(W^0_{ж,x}(z))^{-1}$, что приводит к более удобному виду:

$$\begin{aligned} B \cdot K(z) \cdot C &= \left(W^0_{ж,x}(z)\right)^{-1} - \left(z \cdot I_n - A\right), \\ B \cdot G(z) &= \left(W^0_{ж,x}(z)^{-1}\right) \cdot W^u_{ж,x}(z). \end{aligned} \tag{23}$$

Во многих случаях желаемые матричные передаточные функции можно отразить через матрицы $A_ж$ и $B_ж$:

$$\begin{aligned} W^0_{ж,x}(z) &= (z \cdot I_n - A_ж)^{-1}, \\ W^u_{ж,x}(z) &= (z \cdot I_n - A_ж)^{-1} \cdot B_ж. \end{aligned} \tag{24}$$

Подставляя их в систему уравнений (23), получаем:

$$\begin{aligned} B \cdot K(z) \cdot C &= A - A_ж, \\ B \cdot G(z) &= B_ж. \end{aligned} \tag{25}$$

Для существования их решения необходимо выполнение тождества [1]:

$$\begin{aligned} \overline{B^L} \cdot (A - A_ж) &= 0, \\ (A - A_ж) \cdot \overline{C^R} &= 0, \\ \overline{B} \cdot B_ж &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\overline{B^L}$, $\overline{C^R}$ – левый и правый делитель нуля матриц B и C соответственно. Наличие $\overline{C^R}$ свидетельствует о наличии недоступных для измерения переменных состояния, что ограничивает желаемую матрицу $A_ж$.

При решении задач с наблюдателем система уравнений (26) не содержит матрицы наблюдателя $L(z)$. Если использовать желаемую передаточную матрицу $W^0_{ж,x}(z)$, то имеем систему уравнений, включающих матрицу L:

$$\begin{aligned} \left(W^0_{ж,x}(z) + \pi_{\tilde{x}}\right) \cdot \left(z \cdot I_n - A + B \cdot K(z)\right) &= I_n, \\ \pi_{\tilde{x}} \cdot L(z) \cdot C &= W^0_{ж,x}(z) \cdot (z \cdot I_n - A) - I_n. \end{aligned} \tag{27}$$

Объединив уравнения (27) и (26), получим:

$$\begin{aligned} &\left(W^0_{ж,x}(z) + \pi_{\tilde{x}}\right) \cdot B \cdot K(z) = I_n - \\ &-\left(W^0_{ж,x}(z) + \pi_{\tilde{x}}\right) \cdot \left(z \cdot I_n - A\right), \\ &\left(W^0_{ж,x} + \pi_{\tilde{x}}\right) \cdot B \cdot G(z) = W^u_{ж,x}(z), \\ &\left(W^0_{ж,x}(z) + \pi_{\tilde{x}}\right) \cdot \left(p \cdot I_n - A + B \cdot K(z)\right) = I_n, \\ &\pi_{\tilde{x}} \cdot L(z) \cdot C = W^0_{ж,x} \cdot \left(z \cdot I_n - A\right) - I_n, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\pi_{\tilde{x}}$ – вспомогательная неизвестная матрица размера $n \times n$.

Пример. Имеем два конвейера с одним управляющим устройством. Транспортные запаздывания на каждом конвейере совпадают с периодом квантования. Соответствующая модель в пространстве состояний имеет вид (4), где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Матрица B обладает левым делителем нуля $\overline{B^L} = [\eta \quad 0]$, где η – произвольный полином.

Пусть компоненты вектора состояния доступны измерению, т. е.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

и потребуем, чтобы динамика системы определялась желаемыми матрицами $A_ж$ и $B_ж$ вида:

$$A_ж = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, B_ж = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Желаемая матричная передаточная функция замкнутой системы по входному воздействию (24) имеет вид

$$W^u_{ж,x}(z) = \left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z+5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2 + 5 \cdot z + 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Решая вышеприведенные уравнения (28), определяем матрицу K и G:

$$K = [1 \quad 5], \quad G = 1. \tag{32}$$

Пусть доступна измерению первая координата C = [1 0], первый делитель нуля $\overline{C^R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}$, а μ – произвольный полином.

Подставляя исходные данные в уравнения (22), находим K = 1, G = 1.

Условия (6) не выполняются, и подставляем полученные значения K и G в уравнение

$$W_x^u(z) = (z \cdot I_n - A + B \cdot K \cdot G)^{-1} B \cdot G = \frac{1}{z^2 + 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}, \tag{33}$$

которое не соответствует ранее найденной желаемой функции

$$\frac{1}{z^2 + 5 \cdot z + 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}.$$

Следовательно, поставленную задачу можно решить введением в состав системы наблюдателя.

Заключение. Рассмотрена необходимая последовательность математических преобразований для формирования совокупности желаемых законов управления.

Для объектов управления, описываемых линейными динамическими моделями с отклоняющимися аргументами по каналам управления, необходимо вначале использовать передаточные матрицы, содержащие звенья запаздывания. После чего каждый из элементов дискретной передаточной матрицы преобразуется в дробно-рациональную дискретную передаточную функцию, что позволяет исключить в явной форме звенья запаздывания.

Применительно к преобразованной математической модели объекта управления используется технология вложения, которая позволяет согласовать матричные уравнения с различной формой и размерностью матриц. Далее формируются желаемые дискретные передаточные матрицы.

Поскольку дискретные передаточные функции формируются относительно переменных состояния, а их размерность увеличена за счет преобразования моделей звеньев запаздывания, то возникает потребность в получении информации о части переменных состояния. Для решения этой задачи необходимо использовать алгоритм наблюдателя Люенбергера.

Литература

1. Буков В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.

2. Буков В. Н., Косьянчук В. В., Рябченко В. Н. Вложение систем. Управление при неполной информации // АиТ. 2001. № 8. С. 3–20.

3. Буков В. Н., Сизых В. Н. Условия оптимальности в вырожденной задаче аналитического конструирования регуляторов // АиТ. 2001. № 7. С. 61–71.

References

1. Bukov V. N. *Vlozheniye sistem. Analiticheskiy podkhod k analizu i sintezu matrichnykh sistem* [Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems]. Kaluga, Izdatel'stvo nauchnoy literatury N. F. Bochkarevoy, 2006. 720 p.

2. Bukov V. N., Kos'yanchuk V. V., Ryabchenko V. N. System embedding. Control under incomplete information. *AiT* [Automation and Remote Control], 2001, no. 8, pp. 3–20 (In Russian).

3. Bukov V. N., Sizykh V. N. Optimally conditions in the degenerate problem of analytical controller design. *AiT* [Automation and Remote Control], 2001, no. 7, pp. 61–71 (In Russian).

Информация об авторах

Кузьмицкий Иосиф Фелицианович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kuzmicki@tut.by

Асмыкович Иван Кузьмич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: asmik@tut.by

Лапето Александр Васильевич − ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: AVLapeto@gmail.com

Information about the authors

Kuz'mitskiy Iosif Felitsianovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kuzmicki@tut.by

Asmykovich Ivan Kuz'mich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: asmik@tut.by

Lapeto Aleksandr Vasil'yevich – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: AVLapeto@gmail.com

Поступила 15.12.2016