Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Республики Беларусь по химико-технологическому образованию в качестве учебно-методического пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Минск 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальности 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств». Оно содержит действующую программу курса «Уравнения математической физики», краткий теоретический материал, вопросы для самоконтроля и контрольные задания.

Курс «Уравнения математической физики» ориентирован на применение математических методов в прикладных задачах. Инженер по автоматизации обязан владеть основами математического моделирования и его реализации в компьютерных информационных технологиях, чтобы быть конкурентоспособным на рынке труда и выдерживать темпы научно-технического прогресса.

Курс «Уравнения математической физики» предназначен для ознакомления студентов с классическими методами интегрирования уравнений в частных производных второго порядка, к которым приводит ряд конкретных физических и технических задач. Как правило, каждое из таких уравнений имеет бесчисленное множество частных решений, и задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

В структуру пособия входят введение, три главы, заключение. Во введении определяются основные понятия курса, приводится классификация дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваются вопросы приведения уравнений к каноническому виду, дается постановка основных краевых задач. Глава 1 посвящена уравнениям гиперболического типа, глава 2 – уравнениям параболического типа, глава 3 – уравнениям эллиптического типа.

Для самостоятельной работы студентов как одной из форм обучения и более глубокого изучения теоретического материала в конце каждой главы предусмотрены подробные примеры решения задач.

В конце пособия приведен справочный материал, включающий необходимые сведения из курса высшей математики, даны правила выполнения и оформления контрольной работы, а также представлен список рекомендуемой литературы.

ПРОГРАММА КУРСА
«УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Введение

Основные понятия курса «Уравнения математической физики». Примеры. Основные физические процессы и их уравнения. Постановка краевых задач. Понятие корректной постановки задачи. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных с двумя переменными второго порядка. Характеристическое уравнение. Основные уравнения.

1. Гиперболические уравнения

Вывод уравнения поперечных колебаний струны. Постановка основных краевых задач. Решение задачи Коши для уравнения колебания струны методом характеристик. Формула Даламбера. Физический смысл формулы Даламбера. Общая формальная схема метода разделения переменных решений смешанных задач для гиперболических уравнений. Решение смешанных задач методом разделения переменных (метод Фурье). Задача Штурма–Лиувилля.

2. Параболические уравнения

Вывод уравнения теплопроводности. Постановка краевых задач. Теорема о максимальном и минимальном значениях решений уравнения теплопроводности. Общая формальная схема метода разделения переменных решений смешанных задач для параболических уравнений. Функция источника.

3. Эллиптичесие уравнения

Определение и свойства гармонических функций. О единственности решений задач Дирихле и Неймана. Функция Грина. Метод функции Грина. Решение задач Дирихле и Неймана. Физический смысл функции Грина. Метод фиктивных зарядов построения функции Грина задач Дирихле.

ВВЕДЕНИЕ: КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В курсе будут изучаться дифференциальные уравнения (ДУ) с частными производными (ЧП), т.е. уравнения, содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные.

ДУ с ЧП находят широкое применение в прикладных науках: квантовая механика, электродинамика, термодинамика, теория тепло- и массопереноса и др. при математическом описании и моделировании различных физических процессов. Поэтому такие уравнения в теории ДУ с ЧП объединяются под общим названием уравнений математической физики. Они, как правило, имеют бесчисленное множество решений. При исследовании конкретной физической задачи необходимо из этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям*. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Совокупность граничных и начальных условий называют *краевыми* условиями задачи. Краевая задача уравнения математической физики считается *поставленной корректно*, если решение задачи, удовлетворяющее краевым условиям, существует, единственно и устойчиво, т.е. малые изменения любого из исходных данных задачи вызывают соответственно малое изменение решения. Это важно для приложений ДУ с ЧП, поскольку реальные данные прикладной задачи часто получены из опыта и, таким образом, содержат некоторую погрешность. Поэтому необходимо, чтобы малые погрешности в данных задачи приводили к малым изменениям в ее решении.

Дифференциальным уравнением с частными производными (ДУ с ЧП) называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных (ФНП) и ее частных производных. Наивысший порядок частных производных (существенно входящих в уравнение) называется порядком этого уравнения.

ДУ вида

$$F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},...,\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}},...\right)=0 \qquad (1)$$

относительно неизвестной функции $u=u(x)$, где $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ представляет *общий вид* ДУ с ЧП, если хотя бы одна из частных производных функции u существенно входит в (1). Здесь целочисленный вектор $\alpha=\{\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n\}$, $\alpha_i\ge 0$ называется мультииндексом, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n\le m$, где m – порядок уравнения.

Точное определение того, какие зависимости F являются допустимыми, в общем случае требует отдельного рассмотрения.

Уравнение вида

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1{}^m}=f(x_1,...,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},...,\frac{\partial^{m-1}z}{\partial x_1{}^{m-1}},\frac{\partial z}{\partial x_2},...,\frac{\partial^m z}{\partial x_2{}^m},...,\frac{\partial z}{\partial x_n},...,\frac{\partial^m z}{\partial x_n{}^m}) \qquad (2)$$

относительно неизвестной функции $z=z(x)=z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется ДУ с ЧП порядка m, разрешенным относительно старшей производной $\dfrac{\partial^m z}{\partial x_1{}^m}$.

ДУ с ЧП называется линейным (ЛДУ с ЧП), если неизвестная функция и ее производные входят в это ДУ линейно (в первой степени). Так, уравнение

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u}_{\text{младшая часть}}=f(x) \qquad (3)$$

описывает общий вид ЛДУ с ЧП второго порядка с n переменными (относительно неизвестной функции $u=u(x)=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$). Если правая часть $f(x)\equiv 0$ в рассматриваемой области, ЛДУ с ЧП (3) называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Если главная часть в (3) отсутствует, получаем ЛДУ с ЧП первого порядка.

ДУ с ЧП называется линейным относительно старших производных, если старшие производные входят в него в первой степени (линейно). Например:

$$\underbrace{a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}}=\underbrace{F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{младшая часть}},$$

где $(x;y)\in R^2$. Если a, b, c зависят еще от $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Примеры ДУ с ЧП, как уже отмечалось, широко используются для математического моделирования и описания различных физических задач. Эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями математической физики. Основные типы этих уравнений:

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\Delta U$ – волновое уравнение, где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $U=u(x,y,z)$, a – скорость распространения волны в среде;

$\frac{\partial T}{\partial t}=a\cdot\Delta T$ – уравнение теплопроводности;

$\Delta\varphi=0$ – уравнение Лапласа;

$\Delta\varphi=-\rho$ – уравнение Пуассона, основное дифференциальное уравнение электростатики, где φ – электрический потенциал, $\rho=\rho(x,y,z)$ – известное распределение зарядов в пространстве;

$\square\varphi=-\rho$ – уравнение Даламбера, где $\square=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta$ – оператор Даламбера или волновой оператор;

$\Delta\psi+(E-U)\psi=0$ – уравнение Шредингера, основное дифференциальное уравнение квантовой механики, где ψ – волновая функция, U – потенциальная энергия, заданная условиями задачи и E – полная энергия частицы, играющая роль параметра.

Определенная в области D задания уравнения (1) действительная функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется ***регулярным решением***. Наряду с регулярными решениями в теории дифференциальных уравнений с частными производными важное значение имеют решения, перестающие быть регулярными в изолированных точках.

Однако существуют ДУ с ЧП, множества решений которых весьма узки и в некоторых случаях пусты. Например, уравнение $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 0$ имеет множество действительных решений $u(x) = const$, а уравнение $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений.

Качественные особенности решений уравнений (1) выявляются уже при изучении простейших случаев.

Рассмотрим уравнение первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ для функции $u = u(x, y)$. Решением такого уравнения является любая дифференцируемая функция, не зависящая от x, зависимость от y может быть любой, поэтому уравнение $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ имеет бесконечное множество решений вида $u(x, y) = C(y)$, где $C(y)$ — произвольная функция своего аргумента.

Рассмотрим ДУ первого порядка $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \varphi(x) + \psi(y)$, $(x, y) \in (a,b)\times(c,d)$, где функции φ, ψ берутся из класса C^0 (здесь и далее символ C^k означает множество k раз непрерывно дифференцируемых функций). Интегрируя уравнение по x, получаем его решение в виде

$$z = z(x, y) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt + x\psi(y) + C(y),$$

где $x_0 \in (a,b)$; $C(y)$ – произвольная функция класса C^1.

Решение уравнения второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ получается последовательным интегрированием по переменным x и y: $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$, и $u = \int f(y)dy + C_1(x) = C_1(x) + C_2(y)$ содержит произвольные функции $C_1(x)$ и $C_2(y)$. Такие решения принято называть *общими*, или *представлениями решения*. Таким образом, общие решения уравнений с частными производными, как и обыкновенных дифференциальных уравнений, не определяются однозначно, но, в отличие от последних, включают уже не произвольные постоянные, а некоторые функции.

Рассмотрим ДУ с ЧП (2), где $x=(x_1,...,x_n)$. Пусть далее заданы начальная точка $(x_{10},...,x_{n0})$ и начальные функции $\varphi_0(x_2,...,x_n),...,\ \varphi_{m-1}(x_2,...,x_n)$. Тогда *начальная задача Коши* означает нахождение решения ДУ с ЧП (2), удовлетворяющего следующим *начальным условиям*:

$$z(x_{10},x_2,...,x_n)=\varphi_0(x_2,...,x_n),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}(x_{10},x_2,...,x_n)=\varphi_1(x_2,...,x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{m-1} z}{\partial {x_1}^{m-1}}(x_{10},x_2,...,x_n)=\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n).$$

Задачу Коши можно рассматривать не во всей области, а только в окрестности точки $(x_{20},...,x_{n0})$.

Теорема Коши – Ковалевской. Если

1) правая часть f ДУ (2) является аналитической функцией своих аргументов в некоторой окрестности начальных данных $x_{10},...,x_{n0}$:

$$z_0=\varphi_0(x_{20},...,x_{n0}),\ \frac{\partial z}{\partial x_1}|_0=\varphi_1(x_{20},...,x_{n0}),...,\ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial {x_1}^{m-1}}|_0=\varphi_{m-1}(x_{20},...,x_{n0});$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}|_0=\frac{\partial z}{\partial x_2}(x_{20},...,x_{n0}),\ ...,\ \frac{\partial^{m} z}{\partial {x_n}^{m}}|_0=\frac{\partial^{m} z}{\partial {x_n}^{m}}(x_{20},...,x_{n0});$$

2) функции $\varphi_0(x_2,...,x_n),\dots,\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $(x_{20},...,x_{n0})$,

то существует окрестность начальной точки $(x_{10},...,x_{n0})$, в которой решение задачи Коши существует, единственно, причем является функцией аналитической.

Замечание 1. Функция $\varphi(y,z)$ двух переменных считается аналитической в окрестности точки (y_0,z_0), если в этой окрестности функция раскладывается в соответствующий ряд Тейлора:

$$\varphi(y,z)=\sum_{i+j=0}^{+\infty} a_{ij}(y-y_0)^i(z-z_0)^j;$$

$$a_{ij}=\frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial y^i \partial z^j}(y_0,z_0),\ i=0,1,\ldots;\ j=0,1,\ldots\ .$$

Замечание 2. График решения ДУ с ЧП принято называть интегральной поверхностью (в соответствующем пространстве). Тогда в геометрической интерпретации в задаче Коши $u(x_0,y)=\varphi(y)$ для ДУ первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,y,\dfrac{\partial u}{\partial y})$ требуется найти такую интегральную поверхность $u=u(x,y)$, которая проходит через заданную кривую $x=x_0, u=\varphi(y)$.

ДУ с ЧП различаются порядком, видом: линейные, нелинейные, квазилинейные, и типом, например, гиперболические, параболические, эллиптические, смешанные и т.д.

Классификация и приведение к каноническому виду ДУ с ЧП второго порядка с двумя переменными

Рассмотрим ДУ с ЧП, линейное относительно старших производных с двумя переменными:

$$a(x,y)u''_{xx}+2b(x,y)u''_{xy}+c(x,y)u''_{yy}=F\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right), \qquad (4)$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ – дважды дифференцируемые функции, предполагаем, что $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль.

Классификация уравнения (4) производится по знаку дискриминанта $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)$.

Классификация ДУ (4). ДУ (4) относится к:

– *гиперболическому типу*, если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$ (примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение);

– *параболическому типу*, если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$

(примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности);

– *эллиптическому типу*, если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$ (примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа).

Преобразование ДУ с ЧП путем замены переменных. Введем вместо (x,y) новые независимые переменные (ξ,η). Пусть $\xi=\xi(x,y)$ и $\eta=\eta(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$ в области D. В новых переменных уравнение (4) запишется в виде

$$L(u)=A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \tag{5}$$

где $A=A(\xi,\eta)=a(x,y)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+c(x,y)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$;

$$C=C(\xi,\eta)=a(x,y)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2;$$

$$B=B(\xi,\eta)=a(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+b(x,y)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+c(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что $B^2-AC=\left(b^2-ac\right)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$. Таким образом, преобразование независимых переменных не меняет типа уравнений.

Функции $\xi=\xi(x,y)$ и $\eta=\eta(x,y)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий:

1) $A=0,\ C=0$;

2) $A=0,\ B=0$;

3) $A=C,\ B=0$,

что позволяет упростить (записать в каноническом виде) ДУ с ЧП (4).

ДУ с ЧП (5) имеет ***канонический*** вид, если:

$L(u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ либо $L(u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ для гиперболического типа;

$L(u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ либо $L(u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ для параболического типа;

$L(u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ для эллиптического типа.

Теорема. Для каждого типа ДУ (4) найдется невырожденное преобразование $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, при котором уравнение (4) приводится к каноническому виду этого типа.

Для того, чтобы привести уравнение (4) к каноническому виду, следует составить уравнение (характеристик)

$$a(dy)^2-2b\,dx\,dy+c(dx)^2=0, \tag{6}$$

которое распадается на два уравнения:

$$a\,dy-\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0;\quad a\,dy-\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0, \tag{7}$$

и найти их общие интегралы.

Уравнения гиперболического типа: $b^2-ac>0$.

Общие интегралы $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$ уравнений (7) будут вещественными и различными, они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Вводя вместо (x,y) новые независимые переменные (ξ,η):

$$\xi=\varphi(x,y);\eta=\psi(x,y)$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду.

Уравнения параболического типа: $b^2-ac=0$.

Уравнения (7) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x,y)=C$.

В этом случае, полагая

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=x\end{cases}\text{(в случае, когда }\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0\text{)}$$

или

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = y \end{cases} \text{(в случае, когда } \frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0\text{)},$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду.

Уравнения эллиптического типа: $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы уравнений (7) — комплексно сопряженные, они определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл первого из уравнений (7) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – вещественные функции.

Тогда, полагая $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, приведем уравнение (4) к каноническому виду.

В случае эллиптического уравнения мы считаем, что коэффициенты a, b и c – аналитические функции.

Отметим, что производные по старым переменным выражаются через производные по новым переменным по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Замечание. Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (4) принадлежит различным типам. Точки параболичности уравнения (4) характеризуются равенством

$$b^2 - ac = 0. \tag{8}$$

Предположим, что множество точек области D, которое описывается уравнением (8), является простой гладкой кривой. Эта кривая называется линией *параболического вырождения*. Если кривая σ

делит область D на две части, в одной из которых уравнение (4) принадлежит эллиптическому типу, а в другой – гиперболическому типу, то в области D, уравнение (4) – *смешанного типа*.

Например, уравнение Трикоми $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. При $y>0$ – эллиптический тип, при $y<0$ – гиперболический тип, $y=0$ – линия параболичности.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+5u=0.$$

Здесь $a=3$, $2b=-10\Rightarrow b=-5$, $c=3$, $b^2-ac=25-9=16>0$, следовательно, это уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости. Составляем уравнение характеристик $3(dy)^2+10dxdy+3(dx)^2=0$, решаем его:

$$dy_{1,2}=\frac{-5dx\pm\sqrt{(-5dx)^2-9(dx)^2}}{3}.$$

Получаем два дифференциальных уравнения $dy=-\frac{1}{3}dx$ и $dy=-3dx$, интегрируя: $y=-\frac{1}{3}x+C_1$, $y=-3x+C_2$. Уравнения двух семейств характеристик:

$$\begin{cases} y+\frac{1}{3}x=C_1 \\ y+3x=C_2 \end{cases}.$$

С помощью характеристик делаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi=y+\frac{1}{3}x \\ \eta=y+3x \end{cases}.$$

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{3}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{1}{3}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}3\right)=\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставим в данное дифференциальное уравнение найденные для вторых производных выражения, получим

$$3\left(\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-10\left(\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+$$

$$+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}+5u=0;$$

$$-\frac{64}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}+5u=0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{64}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{9}{64}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{15}{64}u=0,$$

т.е. уравнение приведено к каноническому виду.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Здесь $a=4$, $b=2$, $c=1$, $b^2-ac=4-4=0$, следовательно, это уравнение параболического типа во всех точках плоскости. Составляем уравнение характеристик $4(dy)^2-4dxdy+(dx)^2=0$, решаем его: $dy=\frac{dx}{2}$. Интегрируя, получим $y-\frac{1}{2}x=C$. Полученная функция имеет непрерывные частные производные и ее первые производные не обращаются одновременно в нуль. Сделаем замену переменной

$$\begin{cases}\xi=-\frac{1}{2}x+y\\ \eta=x\end{cases}.$$

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}.$$

Подставим в данное дифференциальное уравнение найденные для вторых производных выражения, получим

$$4\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+4\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

После преобразования имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{11}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{11}{8}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

т.е. уравнение приведено к каноническому виду.

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Δ Здесь $a=5$, $b=2$, $c=1$, $b^2-ac=4-5=-1$, следовательно, это уравнение эллиптического типа во всех точках плоскости. Составляем уравнение характеристик $5(dy)^2-4dxdy+(dx)^2=0$, решаем его: $dy=\frac{2}{5}dx\pm i\frac{1}{5}dx$. Интегрируя $dy=\frac{2}{5}dx+i\frac{1}{5}dx$, получим $\frac{2}{5}x-y+i\frac{1}{5}x=C$.

Сделаем замену переменной $\begin{cases}\xi=\frac{2}{5}x-y\\ \eta=\frac{1}{5}x\end{cases}$.

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = -\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}.$$

Подставим в дифференциальное уравнение найденные для вторых производных выражения, получим

$$5\left(\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + 4\left(-\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Преобразуем

$$\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{8}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{7}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 7\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

т.е. уравнение приведено к каноническому виду.

Постановка основных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка

Различие в типах уравнений второго порядка тесно связано с различием физических процессов, описываемых этими уравнениями. Уравнение нестационарной теплопроводности является уравнением параболического типа; волновое уравнение, уравнение Даламбера относятся к гиперболическому типу.

Для дифференциальных уравнений второго порядка известны три типа краевых задач: задача Коши, краевая задача, смешанная задача.

Задача Коши ставится для уравнений гиперболического и параболического типов, если область совпадает со всем пространством, граничные условия отсутствуют, задаются только начальные условия. Например, для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9}$$

задача Коши в области D ставится так: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению (9) и начальным условиям

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \tag{10}$$

где $(x, y, z) \in D$.

Краевая* (или *граничная) задача ставится для уравнений эллиптического типа. Начальные условия отсутствуют, задаются граничные условия. По виду граничных условий различают краевые задачи первого, второго, третьего родов и т.д. Например, для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, где $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D \subset R^3$, краевая задача первого рода ставится так: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри области и граничным условиям $u(x, y, z)\big|_L = f(x, y, z)$, на границе L области D.

Краевая задача первого рода для уравнения Лапласа называется *задачей Дирихле*.

Смешанная задача ставится для уравнений гиперболического и параболического типов, когда область исследования ограничена, задаются начальные и граничные условия. Примером задачи смешанного типа для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad (11)$$

является следующая: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению (11), начальным условиям

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x, y) \qquad (12)$$

и граничным условиям

$$u\big|_L = 0. \qquad (13)$$

Глава 1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний, например, задача о колебаниях струны, мембраны, газа, электромагнитных колебаний и т.п. Характерной особенностью процессов, описываемых такими уравнениями, является конечная скорость их распространения.

Основным уравнением гиперболического типа является волновое уравнение.

§ 1. Уравнение поперечных колебаний струны

Пусть упругая гибкая струна длиной l находится под действием равномерного натяжения T, расположена на участке $0 \le x \le l$ и закреплена на ее концах. Считаем струну однородной с линейной плотностью ρ. Если в начальный момент времени струну вывести из положения равновесия, она будет совершать колебания, которые описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.1}$$

где $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$; $f(x,t) = \dfrac{g(x,t)}{\rho}$; $g(x,t)$ – внешние силы .

Уравнение (1.1) называется *уравнением колебаний струны*, или *одномерным волновым уравнением*.

Если внешняя сила отсутствует, то мы имеем $g(x,t) = 0$ и получим уравнение свободных колебаний струны $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$.

Уравнение (1.1) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (1.1) недостаточно для полного определения движения струны; нужны еще некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи.

Из динамики точки известно, что для определения движения точки нужно знать ее начальное положение и начальную скорость. Для уравнения колебаний струны естественно задавать в начальный момент времени $t = 0$ положение и скорость всех точек струны:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \quad (1.2)$$

Условия (1.2) называются *начальными условиями* ($\varphi(x)$ – начальное смещение, $\psi(x)$ – начальная скорость).

Далее, так как струна ограничена, нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах мы должны иметь

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \quad (1.3)$$

при всяком $t \geq 0$. Условия (1.3) называются *краевыми* или *граничными условиями*. Возможны и другие граничные условия.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: найти такое решение уравнения (1.1), которое удовлетворяло бы начальным условиям (1.2) и граничным условиям (1.3).

Можно рассматривать колебания *полубесконечной* или *бесконечной* струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба этих случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй – рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остается требование $u\big|_{x=0} = 0$, а во втором граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть в этих случаях заданы соответственно для всех $0 \leq x < +\infty$ или для всех $-\infty < x < +\infty$.

Смешанные задачи описывают колебания ограниченных или полуограниченных струн. Для этого помимо условий (1.2) в конечных граничных точках добавляется одно из трех дополнительных условий:

$$u\big|_{x=x_0} = \eta(t),\ t > t_0 \text{ – граничное условие I рода} \quad (1.4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \nu(t),\ t > t_0 \text{ – граничное условие II рода} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + k(x)u\big|_{x=x_0} = \mu(t),\ t > t_0 \text{ – граничное условие III рода.} \quad (1.6)$$

Смешанные задачи и задачи Коши являются корректными: их решение существует, оно единственно и устойчиво.

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны имеет следующий вид:

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x,y,t),$$

где мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны; $\rho(x,y)$ – поверхностная плотность мембраны, $p(x,y,t)$ – внешняя сила, действующая на мембрану. В случае однородной мембраны $\rho(x,y) = const$ уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{1.7}$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho(x,y)}}$, $f(x,y,t) = \frac{p(x,y,t)}{\rho(x,y)}$.

Если внешняя сила отсутствует, т.е. $p(x,y,t) = 0$, то из (1.7) получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u.$$

Краевые задачи ставятся аналогично.

§ 2. Решение задачи Коши для уравнения колебаний струны методом характеристик. Формула Даламбера

Решение задачи Коши методом Даламбера состоит в определении общего решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ x \in R,\ t > 0, \tag{1.8}$$

и удовлетворении начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ x \in R, \tag{1.9}$$

путем подстановки найденного общего решения в начальные условия.

Осуществим это в несколько этапов.

I этап. Уравнение (1.8) – это уравнение гиперболического типа, оно имеет две действительные характеристики. Решая уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ для (1.8), получаем характеристики вида

$$x + at = C_1,\quad x - at = C_2,\quad \forall C_1, C_2 \in R.$$

Преобразование координат

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at, \end{cases} \tag{1.10}$$

приводит уравнение (1.8) к виду $u''_{\xi\eta} = 0$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$, откуда $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$ или $\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = w(\xi)$, где $w(\xi)$ – произвольная функция аргумента ξ. Рассматривая η как параметр и интегрируя полученное уравнение по ξ, имеем: $u = \int w(\xi)d\xi + h(\eta) = g(\xi) + h(\eta)$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем общее решение уравнения (1.8) в виде

$$u(x,t) = g(x + at) + h(x - at), \tag{1.11}$$

где $g(\xi)$ и $h(\eta)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Решение (1.11) называют решением Даламбера, а метод получения этого решения *методом Даламбера* или методом характеристик, или методом бегущих волн.

II этап. Рассмотрим задачу Коши (1.9). Положим в (1.11) $t = 0$:

$$u(x,0) = g(x) + h(x) \overset{(1.9)}{=} \varphi(x)$$

$$u'_t = g'_\xi(x + at)\cdot\xi'_t + h'_\eta(x - at)\cdot\eta'_t = g'(x + at)\cdot a + h'(x - at)\cdot(-a) =$$
$$= ag'(x + at) - ah'(x - at)$$

$$u'_t\big|_{t=0} = a\big(g'(x) - h'(x)\big) \overset{(1.9)}{=} \psi(x).$$

Таким образом, функции g и h удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} g(x)+h(x)=\varphi(x) \\ a\cdot g'(x)-a\cdot h'(x)=\psi(x) \end{cases},\ x\in R.$$

Проинтегрируем второе равенство:

$$a\big(g(x)-h(x)\big)=\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau + C, \text{ где } C=g(0)\cdot a-h(0)\cdot a.$$

Имеем $\begin{cases} g(x)+h(x)=\varphi(x) \\ g(x)-h(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau+\dfrac{1}{a}C \end{cases}$, откуда находим g и h:

$$2g(x)=\varphi(x)+\frac{1}{a}\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{a}C.$$

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau+\dfrac{1}{2a}C, \\ h(x)=\varphi(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau-\dfrac{1}{2a}C. \end{cases} \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.11), будем иметь

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{C}{2a}+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau-\frac{C}{2a}$$

или окончательно

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) дает решение задачи Коши (1.9), если $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ – до первого. Задача Коши (1.8), (1.9) поставлена корректно.

Пример. Найти форму бесконечной струны, определяемую уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент времени $\dfrac{\pi}{2}$ при начальных условиях

$u(x,0)=\sin x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos x$.

Исходя из условий задачи $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=\cos x$. Найдем форму струны в момент времени t:

$$u(x,t)=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\cos\tau d\tau=\sin x\cos t+\frac{1}{2}\sin\tau\Big|_{x-t}^{x+t}=$$

$$=\sin x\cos t+\sin t\cos x=\sin(x+t).$$

Полагая $t=\dfrac{\pi}{2}$, получаем $u\left(x,\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

§ 3. Физическая интерпретация решений волнового уравнения

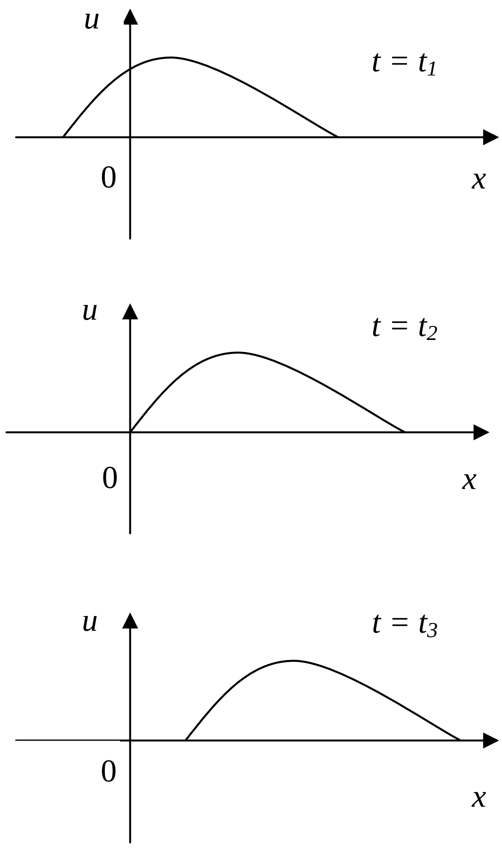

Рис. 1.1. Графики функции $u_1=h(x-at)$ при различных значениях t: $t_1<t_2<t_3$

Выясним физический смысл решения (1.11), которое представим так:

$$u(x,t)=u_1+u_2;$$

$$u_1=h(x-at);$$

$$u_2=g(x+at). \quad (1.14)$$

Если $g(x+at)=0$, то $u(x,t)=u_1=h(x-at)$. При фиксированном значении t график функции $u=h(x-at)$ является формой колеблющейся струны в момент времени t (рис.1.1). Для точки x_0 при $t=0$ отклонение выразится формулой $u(x_0,0)=h(x_0)$.

Предположим, что по оси Ox из положения x_0 движется точка в положительном направлении этой оси со скоростью a (a – параметр, входящий в уравнение (1.8) и функцию (1.11)). Закон этого движения выражается формулой $x = x_0 + at$. Так как в этом случае $x - at = x_0$, то через момент времени t для точки x получаем отклонение $u = h(x - at) = h(x_0) = u(x_0, 0)$. Это значит, что отклонение для точки x через момент времени t будет тем же, что и для точки x_0 в момент $t = 0$.

Следовательно, если мысленно перемещаться вдоль оси *Ox* в положительном направлении этой оси с постоянной скоростью a, то отклонение струны все время будет казаться постоянным.

Построим графики функции $u_1 = h(x - at)$ при различных значениях *t*: $t_1 < t_2 < t_3$ (рис. 1.1). Каждый последующий из них получается сдвигом предыдущего вдоль оси *Ox* на определенную величину. Если эти рисунки по очереди проектировать на неподвижные экран, то первый график «побежит» вправо. Процесс передвижения отклонения вдоль прямой, на которой находилась струна в положении равновесия, называется *волной*. Скорость распространения волны равна a, где a определяется формулой $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho(x, y)}}$ и входит в уравнение (1.8). Волна распространяется в положительном направлении оси *Ox*. Явление, описываемое функцией $u_1 = h(x - at)$, называется *распространением прямой волны*.

Второе слагаемое формулы (1.11), т.е. функция $u_2 = g(x + at)$, представляет аналогичный процесс, но только волна будет распространяться влево (в отрицательном направлении оси *Ox*) с той же скоростью a (рис.1.1. будет отображать моментальные снимки этой волны, если на него смотреть снизу вверх, т.е. считать $t_3 < t_2 < t_1$). Явление, описываемое функцией $u_2 = g(x + at)$, называется *распространением обратной волны*.

Следовательно, решение (1.11) представляет сумму прямой и обратной волн. Отсюда вытекает следующий графический способ построения формы струны в любой момент времени *t*. Строим графики функций $u_1 = h(x)$, $u_2 = g(x)$, изображающие прямую и обратную волны в начальный момент времени $t = 0$. Не изменяя формы построенных графиков, передвигаем их со скоростью a вдоль оси *Ox*; первый – вправо, второй – влево. Чтобы получить график струны, достаточно построить алгебраические суммы ординат точек раздвинутых графиков.

§ 4. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны

Метод Фурье или метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решений уравнений с частными производными. Рассмотрим задачу о колебаниях ограниченной струны, закрепленной на концах: найти решение $u = u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.15}$$

при граничных условиях

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \tag{1.16}$$

и начальных условиях

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{1.17}$$

($\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции, определенные на отрезке $[0,l]$).

Будем сначала искать частные решения уравнения (1.15), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{1.18}$$

удовлетворяющие граничным условиям (1.16). Подставляя (1.18) в уравнение (1.15) , получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.19}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от t, а правая – только от x, и равенство возможно лишь в том случае, если и левая, и правая части не зависят ни от x, ни от t, т.е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через λ. Тогда из равенства (1.19) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{1.20}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \qquad (1.21)$$

Чтобы получить нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю решения вида (1.18), удовлетворяющие граничным условиям (1.16), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (1.21), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0)=0,\ X(l)=0. \qquad (1.22)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых уравнение (1.21) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющие граничным условиям (1.22) .

Значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи (1.21), (1.22), называются ***собственными значениями***, а соответствующие решения – ***собственными функциями*** этой краевой задачи.

Характеристическое уравнение для уравнения (1.21) имеет вид $r^2+\lambda=0$. Найдем теперь собственные значения и собственные функции задачи (1.21), (1.22). Здесь нужно рассмотреть отдельно три случая, когда $\lambda>0$, $\lambda=0$ или $\lambda<0$.

При $\lambda<0$ общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (1.22), получим

$$C_1+C_2=0,\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0.$$

Определитель этой однородной системы относительно неизвестных C_1 и C_2 отличен от нуля:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}=e^{-\sqrt{-\lambda}l}-e^{\sqrt{-\lambda}l}\neq 0,$$

поэтому система имеет единственное нулевое решение $C_1=0, C_2=0$. Следовательно, $X(x)\equiv 0$ и нетривиальных решений нет.

При $\lambda=0$ общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$X(x)=C_1+C_2x.$$

Граничные условия (1.22) дают:

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 + C_2 l = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0, C_2 = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$, и в этом случае нетривиальных решений нет.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.22), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из первого уравнения следует $C_1 = 0$, а из второго – $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Мы должны считать $C_2 \neq 0$, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, т.е. $\sqrt{\lambda}l = \pi k, k \in Z$, $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi k}{l}, k \in Z$. Следовательно, нетривиальные решения задачи (1.21), (1.22) возможны лишь при значениях $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2, k = 1, 2, 3, \ldots$.

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что положительные и отрицательные значения *k*, равные по абсолютной величине, дают собственные значения $\lambda_{-k} = \lambda_k$, а собственные функции отличаются лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для *k* брать только целые положительные значения.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (1.20) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1.15) и граничным условиям (1.16) при любых a_k и b_k.

В силу линейности и однородности уравнения (1.15), любая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{1.23}$$

если он равномерно сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Поскольку каждое слагаемое в ряде (1.23) удовлетворяет граничным условиям (1.16), то этим условиям будет удовлетворять сумма ряда, т.е. функция $u(x,t)$. Остается определить постоянные a_k и b_k так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (1.17).

Продифференцируем ряд (1.23) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi at}{l}+b_k\cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{1.24}$$

Полагая в (1.23) и (1.24) $t=0$, получим, в силу начальных условий (1.17):

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{1.25}$$

Формулы (1.25) представляют собою разложения заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,l)$. Коэффициенты разложений (1.25) вычисляются по известным формулам

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{1.26}$$

Таким образом, решение задачи (1.15) – (1.17) задается рядом (1.23), где a_k и b_k определяются формулами (1.26).

Теорема. Если $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[0;l]$ непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяет условиям

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0, \tag{1.27}$$

а $\psi(x)$ имеет на этом отрезке непрерывную производную второго порядка и удовлетворяет условиям

$$\psi(0)=\psi(l)=0, \qquad (1.28)$$

то функция $u(x,t)$, определяемая рядом (1.23), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (1.15), а также граничным и начальным условиям (1.16), (1.17). При этом возможно почленное дифференцирование ряда (1.23) по x и t до двух раз включительно, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0 \le x \le l$ и любом t.

Алгоритм построения решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения методом Фурье.

1. Из начальных условий задачи определяем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

2. По формулам (1.26) находим a_k и b_k.

3. Найденные значения a_k и b_k подставляем в формулу (1.23), получаем решение задачи для $0 \le x \le l$, $t > 0$.

Пример 1. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент форму параболы $u=\left(4h/l^2\right)x(l-x)$ (рис. 1.2). Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.
Здесь
$\varphi(x)=\left(4h/l^2\right)x(l-x)$, $\psi(x)=0$.

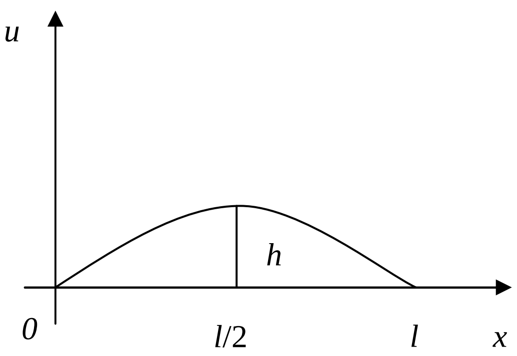

Рис.1.2. Форма струны в начальный момент

Находим коэффициенты ряда, определяющего решение уравнения колебаний струны:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx=\frac{8h}{l^3}\int_0^l\left(lx-x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \quad b_k=0.$$

Для нахождения коэффициента a_k дважды интегрируем по частям:

$$u_1=lx-x^2,\ dv_1=\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ du_1=(l-2x)dx,\ v_1=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = -\frac{8h}{l^3}\left(lx - x^2\right)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

т.е. $a_k = \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx;$

$$u_2 = l - 2x,\ dv_2 = \cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ du_2 = -2dx,\ v_2 = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l = -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Подставляя выражения для a_k и b_k в равенство (1.23), получим

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Если $k = 2n$, то $1-(-1)^k = 0$, а если $k = 2n+1$, то $1-(-1)^k = 2$, поэтому окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Пример 2. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = 5$, $u(0,t) = 0, u(5,t) = 0$, имеет в начальный момент времени форму $u(x,0) = x(x-5)$, точкам струны сообщена начальная скорость $u_t'(x,0) = x$. Найти отклонение струны, определяемое уравнением $u_{tt}'' = 25u_{xx}''$ для любого момента времени.

Имеем первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt}'' = 25u_{xx}''$, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow a^2 = 25\right)$, на отрезке с начальными условиями $u(x,0) = x(x-5)$, $u_t'(x,0) = x$ и граничными условиями $u(0,t) = 0, u(5,t) = 0$.

Решение ищем в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\pi t+b_k\sin k\pi t\right)\sin\frac{k\pi x}{5}.$$

Определяем коэффициенты по формулам (1.26), используем метод интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\begin{vmatrix}\varphi(x)=x(x-5)\\ l=5\end{vmatrix}=\frac{2}{5}\int_0^5 x(x-5)\sin\frac{k\pi x}{5}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x(x-5) & du=(2x-5)dx\\ dv=\sin\frac{k\pi x}{5}dx & v=-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{5}x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{5}\left(-\frac{5x(x-5)}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{5}x\Big|_0^5+\frac{5}{k\pi}\int_0^5(2x-5)\cos\frac{k\pi}{5}x\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\left(-\frac{25(5-5)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{5}\cdot 5\right)+\frac{0(0-5)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{5}\cdot 0\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{5}\frac{5}{k\pi}\int_0^5(2x-5)\cos\frac{k\pi}{5}x\,dx=\frac{2}{k\pi}\int_0^5(2x-5)\cos\frac{k\pi}{5}x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2x-5 & du=2dx\\ dv=\cos\frac{k\pi}{5}xdx & v=\frac{5}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{5}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left(\frac{(2x-5)\cdot 5}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big|_0^5-\frac{10}{k\pi}\int_0^5\sin\frac{k\pi x}{5}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left(\frac{25}{k\pi}\sin k\pi+\frac{25}{k\pi}\sin 0+\frac{50}{k^2\pi^2}\cos\frac{\pi x}{5}\Big|_0^5\right)=\begin{vmatrix}\sin k\pi=0\\ \sin 0=0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{100}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-\cos 0)=\begin{vmatrix}\cos k\pi=(-1)^k\\ \cos 0=1\end{vmatrix}=\frac{100}{k^3\pi^3}\left((-1)^k-1\right).$$

Таким образом, получили $a_k = \frac{100}{k^3\pi^3}\left((-1)^k - 1\right)$.

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \left|\begin{array}{l} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ \psi(x) = x \\ l = 5 \end{array}\right| = \frac{2}{5k\pi}\int_0^5 x\sin\frac{k\pi x}{5}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{k\pi x}{5}dx & v = -\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{5}x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{5k\pi}\left(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5}\Big|_0^5 + \frac{5}{k\pi}\int_0^5 \cos\frac{k\pi x}{5}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{5k\pi}\left(-\frac{25}{k\pi}\cos k\pi + 0\cdot\cos 0 + \frac{5}{k\pi}\int_0^5 \cos\frac{k\pi x}{5}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{5k\pi}\left(-\frac{25}{k\pi}(-1)^k + \frac{25}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big|_0^5\right) = \frac{10}{k^2\pi^2}(-1)^{k+1} + \frac{10}{k^3\pi^3}(\sin k\pi - \sin 0) =$$

$$= \frac{10}{k^2\pi^2}(-1)^{k+1}.$$

Таким образом, получили $b_k = \frac{10}{k^2\pi^2}(-1)^{k+1}$.

Подставляя выражения для a_k и b_k в равенство (1.23), получаем решение задачи для $0 \le x \le 5$, $t > 0$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{100}{k^3\pi^3}\left((-1)^k - 1\right)\cos k\pi t + \frac{10}{k^2\pi^2}(-1)^{k+1}\sin k\pi t\right)\sin\frac{k\pi x}{5} =$$

$$= \frac{10}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{10}{k^3\pi}\left((-1)^k - 1\right)\cos k\pi t + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\sin k\pi t\right)\sin\frac{k\pi x}{5}.$$

Глава 2. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

§ 1. Уравнение теплопроводности в пространстве

Если некоторое тело неравномерно нагрето, то тепло начнет распространяться от более нагретых участков к менее нагретым. Обозначим температуру тела в точке $M(x,y,z)$ через u. Температура будет зависеть от координат x, y, z и времени t, т.е. $u=u(x,y,z,t)$.

Множество точек, в которых функция $u=u(x,y,z,t)$ принимает одно и то же значение C в фиксированный момент времени $t=t_0$, называется *изотермической поверхностью*. Изотермическая поверхность определяется уравнением

$$u(x,y,z,t_0)=C \text{ или } u(x,y,z)=C_1. \tag{2.1}$$

Форма и расположение изотермической поверхности меняется с течением времени t.

Направление наибольшей скорости изменения температуры совпадает с направлением градиента функции $u=u(x,y,z,t)$ при данном значении t, т.е. с направлением вектора

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

В точках изотермической поверхности градиент направлен по нормали $\vec{n}$ к этой поверхности в сторону возрастания u, причем $|\operatorname{grad} u|=\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Пусть в объеме V имеются источники тепла с плотностью их распределения $F(x,y,z,t)$, тогда уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+\frac{1}{c\rho}F, \tag{2.2}$$

где $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$, $a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$

(k – коэффициент теплопроводности, который будем считать постоянным; c – удельная теплоемкость, ρ – плотность) называется *уравнением теплопроводности в пространстве*.

Если тепловые источники отсутствуют, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u \text{, или } \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Отметим частные случаи этого уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) является уравнением распространения тепла в пластинке, уравнение (2.4) – уравнением распространения тепла в стержне.

§ 2. Начальное и краевые условия для уравнения теплопроводности в пространстве

Начальное условие для уравнения теплопроводности в пространстве определяется равенством

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z), \tag{2.5}$$

оно задает температуру каждой точки тела в начальный момент времени $t_0=0$ ($f(x,y,z)$ – известная функция).

Пусть на поверхности Γ, ограничивающей некоторое тело, происходит теплообмен с окружающей средой. Предположим, что в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$ границы Γ тело имеет температуру $u=u(\xi,\eta,\zeta,t)$, а окружающая среда — $\tilde{u}=\tilde{u}(\xi,\eta,\zeta,t)$, разность $u-\tilde{u}$ называется *перепадом температур*. Теплообмен протекает по закону: поток тепла изнутри тела через любую часть поверхности Γ пропорционален перепаду температур $u-\tilde{u}$, т.е. $Q=h(u-\tilde{u})$, где h – коэффициент теплообмена; h может меняться от точки к точке, но в случае однородности тела и среды $h=const$.

Выделим часть Γ_1 поверхности Γ. Тепловой поток через Γ_1 за время Δt выразится формулой

$$Q_1 = \Delta t \iint_{\Gamma_1} h\left(u - \tilde{u}\right) d\sigma .$$

С другой стороны, в соответствии с формулой $Q = \Delta t \iint_{\sigma} a_n d\sigma$ получаем

$$Q_2 = \Delta t \iint_{\Gamma_1} a_n d\sigma .$$

Так как тепловой поток, уходящий в окружающее пространство, равен тепловому потоку, подходящему изнутри тела, то $Q_1 = Q_2$, т.е.

$$\iint_{\Gamma_1} a_n d\sigma = \iint_{\Gamma_1} h\left(u - \tilde{u}\right) d\sigma .$$

Это равенство выполняется для любой части Γ_1 границы Γ. Следовательно, на границе Γ должно выполняться условие $a_n = h\left(u - \tilde{u}\right)$.

Поскольку $a_n = \vec{a}\,\vec{n} = \left(-k \operatorname{grad} u\right)\vec{n} = -k\dfrac{\partial u}{\partial n}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции u в точке границы по направлению внешней нормали к поверхности Γ, то последнее равенство можно записать так:

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = h\left(u\big|_{\Gamma} - \tilde{u}\right). \tag{2.6}$$

Отметим два важных частных случая краевого условия (2.6).

1. Коэффициент теплообмена равен нулю, $h = 0$ (на границе тела нет теплообмена с окружающей средой); в этом случае краевое условие принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0 . \tag{2.7}$$

2. Коэффициент теплообмена является достаточно большим. Перепишем условие (2.6) в виде

$$-\frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial n} = u\big|_{\Gamma} - \tilde{u} ,$$

откуда при $h \to \infty$ получаем

$$u\big|_{\Gamma} - \tilde{u} = 0 \text{ или } \quad u\big|_{\Gamma} = \tilde{u} . \tag{2.8}$$

Краевое условие (2.8) означает, что на границе Γ поддерживается постоянная температура.

Таким образом, задача о распространении тепла в пространстве (для однородного тела без тепловых источников) формулируется следующим образом.

Найти решение $u = u(x, y, z, t)$ уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$, удовлетворяющее начальному условию (2.5) и краевому условию (2.6) (в частном случае условию (2.7) или (2.8)).

В теории ДУ с ЧП доказывается, что при некоторых предположениях относительно соответствующих функций поставленная задача имеет единственное решение.

§ 3. Первая краевая задача. Теорема о максимуме и минимуме

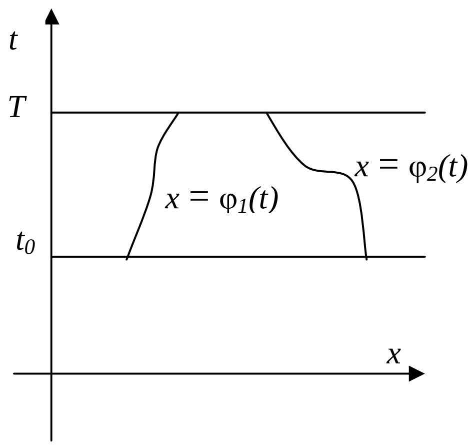

Рис.2.1. Область G

Типичной краевой задачей для параболических уравнений является следующая задача. Обозначим через G криволинейный четырехугольник на плоскости (t, x), ограниченный отрезками прямых $t = t_0$ и $t = T$ $(T > t_0)$ и кривыми $x = \varphi_1(t)$ и $x = \varphi_2(t)$, где φ_1 и φ_2 – непрерывные функции и $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$ при $t_0 \le t \le T$ (рис. 2.1).

Часть границы области G, состоящую из отрезка прямой $t = t_0$ и кривых $x = \varphi_1(t)$ и $x = \varphi_2(t)$, обозначим через Γ. Требуется найти непрерывную в области G и на ее границе функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую внутри G уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и принимающую на Γ значения заданной на Γ непрерывной функции f.

Поставленная задача называется первой краевой задачей для уравнения теплопроводности. В том случае, когда область G является прямоугольником $Q: 0 < x < l, 0 < t < T$, к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности приводит, например, задача о нахождении температуры $u(t,x)$ в теплоизолированном стержне, если известна его начальная температура при $t = 0$ и известна температура на концах стержня в последующее время. При решении этой задачи существенно, что решение ищется при $t > 0$. Аналогичная задача для отрицательных значений t не имеет решения. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в противоположность уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ существенно меняется при замене t на $-t$. Это типичное уравнение необратимого процесса.

Теорема о максимуме и минимуме. Всякое решение $u(t,x)$ уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, определенное и непрерывное в криволинейном четырехугольнике G и на его границе, принимает наибольшее и наименьшее значения на границе Γ, т.е. или на нижнем основании криволинейного четырехугольника G, или на его боковых сторонах.

Следствие 1. Решение первой краевой задачи в криволинейном четырехугольнике G единственно.

Следствие 2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности непрерывно зависит от функций, заданных на боковых сторонах и на нижнем основании криволинейного четырехугольника G.

§ 4. Теплопроводность в стержне, концы которого теплоизолированы

Для уравнения (2.4) начальное условие (2.5) принимает вид $u(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$, где $f(x)$— заданная функция $(0 \le x \le l)$ (l – длина стержня), а краевое условие (2.7) запишется так:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0.$$

Задача о распространении тепла в стержне, концы которого теплоизолированы, состоит в следующем: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.9}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{2.10}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{2.11}$$

Уравнение принимает более простой вид, если ввести новую переменную $\tau = a^2 t$.

С учетом того, что $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}a^2$, $a^2\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.12}$$

Начальное и краевые условия останутся прежними, так как при $t = 0$ $\tau = 0$, а условия (2.11) от τ не зависят.

Решение уравнения (2.12), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0} = f(x) \tag{2.13}$$

и краевым условиям (2.11), будем искать с помощью метода Фурье в виде произведения двух функций

$$u(x,\tau) = X(x)T(\tau), \tag{2.15}$$

где $X(x)$ – функция только от x; $T(\tau)$ – функция только от τ.

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial \tau} = X(x)T'(\tau)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(\tau)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(\tau)$, то подстановка соответствующих выражений в уравнение (2.12) приводит к соотношению

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau) \text{ или } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)}.$$

Так как функция (2.14) является решением уравнения (2.12), то последнее равенство должно выполняться для всех x и τ (из соответствующей области их изменения). Это возможно лишь в случае, когда обе части последнего равенства равны постоянной, ибо левая часть может зависеть только от x, а правая – только от τ. Обозначим эту постоянную c, тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = c,$$

откуда

$$T'(\tau) - cT(\tau) = 0; \tag{2.15}$$

$$X''(x) - cX(x) = 0. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.15) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln T(\tau) = c\tau + \ln C,\ T(\tau) = e^{c\tau + \ln C},\ T(\tau) = Ce^{c\tau}.$$

Поскольку температура не может неограниченно возрастать с течением времени (источники тепла отсутствуют), то функция $T(\tau)$ обладает тем же свойством. Следовательно, в последней формуле c может быть только отрицательным, т.е.

$$c = -\lambda^2 \quad (\lambda \neq 0). \tag{2.17}$$

Итак, функция $T(\tau)$ выражается формулой

$$T(\tau) = Ce^{-\lambda^2 \tau}. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.16) с учетом (2.17) принимает вид $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет решение

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \tag{2.19}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя функции (2.18) и (2.19) в формулу (2.14), получаем

$$u = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}, \tag{2.20}$$

где $\alpha = CC_1$; $\beta = CC_2$.

Частная производная этой функции по x выражается формулой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(-\alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}.$$

Числа α, β, λ выберем так, чтобы удовлетворялись условия (2.11):

$$\begin{cases} \lambda(-\alpha \sin 0 + \beta \cos 0) e^{-\lambda^2 \tau} = 0, \\ \lambda(-\alpha \sin \lambda l + \beta \cos \lambda l) e^{-\lambda^2 \tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 0, \\ -\alpha \sin \lambda l + \beta \cos \lambda l = 0. \end{cases}$$

Из последних уравнений следует, что $\beta = 0$, $\sin \lambda l = 0$. Следовательно, $\lambda l = n\pi \, (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l} \, (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.21}$$

Взяты только положительные значения n, так как $\cos \lambda x = \cos(-\lambda x)$, $(-\lambda)^2 = \lambda^2$. Поскольку $\beta = 0$, функция (2.21) принимает одинаковые значения при λ и $-\lambda$; далее, $\lambda \neq 0$ в соответствии с условием (2.20). Итак, функция (2.21) принимает вид

$$u_n(x, \tau) = \alpha_n \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 \tau}$$

или, учитывая (2.22), получаем *собственные функции*, соответствующие собственным значениям (2.22),

$$u_n(x, \tau) = \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \tau}. \tag{2.22}$$

Решением уравнения (2.12), удовлетворяющим краевым условиям (2.11), является сумма ряда, составленного из функций (2.22), т.е. ряда

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \tau}. \tag{2.23}$$

Коэффициенты α_n этого ряда выберем так, чтобы функция $u(x, \tau)$ удовлетворяла также и начальному условию (2.13):

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0}=f(x),\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\pi nx}{l}=f(x).$$

Последнее равенство означает, что функцию $f(x)$ в промежутке $[0,l]$ необходимо разложить в ряд Фурье по косинусам, коэффициенты такого разложения определяются формулой

$$\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\ (n=1,2,3,\ldots). \qquad (2.24)$$

Следовательно, функция (2.23), для которой α_n определены формулой (2.24), является решением уравнения (2.12), удовлетворяющим начальному условию (2.13) и краевым условиям (2.11). Принимая во внимание равенство $\tau=a^2t$, заключаем, что функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}, \qquad (2.25)$$

для которой α_n определены формулой (2.24), является решением уравнения (2.9), удовлетворяющим начальному условию (2.10) и краевым условиям (2.11).

Рассмотрим теперь ***задачу об определении температуры изолированного стержня*** длины l в любой момент t при заданной начальной температуре и нулевой температуре на концах: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \qquad (2.26)$$

удовлетворяющее начальному и однородным граничным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x), \qquad (2.27)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0. \qquad (2.28)$$

Рассуждая аналогично, получим решение уравнения (2.26) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t} \qquad (2.29)$$

(при условии, что ряд равномерно сходится к $u(x,t)$ при $x\in[0,l], t>0,$ дифференцируем по t и дважды по x). Коэффициенты α_n в (2.29) определяются по формулам

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \; (n=1,2,3,...) \qquad (2.30)$$

Пример 1. Концы тонкого однородного изолированного стержня длиной 3 м, начальная температура которого $\varphi(x)=x(3-x)$, поддерживаются при нулевой температуре. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

Распределение температуры в стержне описывается одномерным уравнением теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Температура стержня зависит от его начальной температуры $u(x,0)=\varphi(x)=x(3-x)$.

По формуле (2.30) определяем α_n:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x(3-x) & du=(3-2x)dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3x(3-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3 + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 (3-2x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 3-2x & du=-2dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{3(3-2x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3 + \frac{6}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx \right) = -\frac{12}{n^2\pi^2}\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3 =$$

$$= -\frac{36}{(n\pi)^3}(\cos n\pi - 1) = -\frac{36}{(n\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{72}{(2n-1)^3\pi^3}.$$

Найденные значения α_n подставляем в (2.29), тогда решение задачи имеет вид:

$$u(x,t)=\frac{72}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{3}e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{3}\right)^2 t}.$$

Пример 2. Для тонкого однородного изолированного стержня длиной l, ось которого совпадает с осью Ox, температура $u=u(x,t)$ в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t=9u''_{xx}$, $u(0,t)=u(7,t)=0$. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{7}, 0\le x\le\dfrac{7}{2}\\ 7-x, \dfrac{7}{2}<x\le 7\end{cases}$.

Имеем задачу о распространении тепла в стержне, концы которого теплоизолированы.

По формуле (2.30) определяем α_n, находим интегралы по частям:

$$\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{7}\left(\int_0^{\frac{7}{2}}\frac{2x^2}{7}\sin\frac{n\pi x}{7}dx+\int_{\frac{7}{2}}^{7}(7-x)\sin\frac{n\pi x}{7}dx\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}u=\dfrac{2x^2}{7} & du=\dfrac{4x}{7}dx\\ dv=\sin\dfrac{\pi nx}{7}dx & v=-\dfrac{7}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{7}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u=7-x & du=-dx\\ dv=\sin\dfrac{\pi nx}{7}dx & v=-\dfrac{7}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{7}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{7}\left(-\frac{2x^2}{7}\cdot\frac{7}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{7}\Bigg|_0^{\frac{7}{2}}+\frac{7}{\pi n}\int_0^{\frac{7}{2}}\frac{4x}{7}\cos\frac{\pi nx}{7}dx\right)-$$

$$-\frac{2}{7}\left(\frac{7(7-x)}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{7}\Bigg|_{\frac{7}{2}}^{7}+\frac{7}{\pi n}\int_{\frac{7}{2}}^{7}\cos\frac{\pi nx}{7}dx\right)=\frac{2}{7}\left(-\frac{2}{\pi n}\frac{49}{4}\cos\frac{\pi n}{2}\right)+$$

$$+\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{7}dx & v=\frac{7}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{7}\end{vmatrix}-\frac{2}{7}\left(-\frac{49}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{49}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{7}\Bigg|_{\frac{7}{2}}^{7}\right)=$$

$$=\frac{2}{7}\left(-\frac{49}{2}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{\pi n}\left(\frac{7}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{7}\Bigg|_0^{\frac{7}{2}}-\frac{7}{\pi n}\int\limits_0^{\frac{7}{2}}\sin\frac{\pi nx}{7}dx\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{7}\left(\frac{49}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{49}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{7}\Bigg|_{\frac{7}{2}}^{7}\right)=\left|\sin\pi n=0\right|=$$

$$=\frac{2}{7}\left(\frac{4}{\pi n}\left(\frac{49}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{7}{\pi n}\frac{7}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{7}\Bigg|_0^{\frac{7}{2}}\right)+\frac{49}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{7}\left(\frac{98}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{4\cdot 49}{\pi^3 n^3}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{4\cdot 49}{\pi^3 n^3}+\frac{49}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{42}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{56}{\pi^3 n^3}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right).$$

Найденные значения α_n подставляем в (2.29), получаем решение задачи для $0\le x\le 7$, $t>0$, $a^2=9\Rightarrow a=3$.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{42}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{56}{\pi^3 n^3}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{7}e^{-\frac{9\pi^2 n^2}{49}t}.$$

Замечание. Аналогично решается задача о распространении тепла в стержне, на концах которого поддерживается постоянная температура. Эта задача о нахождении решения уравнения (2.26), удовлетворяющего начальному условию (2.27) и следующему краевому условию:

$$u\big|_{x=0}=u_0,\; u\big|_{x=l}=u_l. \tag{2.31}$$

Предварительно задачу необходимо свести к задаче с однородными краевыми условиями, т.е. с условиями, которым удовлетворяет тривиальное решение $(u\equiv 0)$. Условия (2.31) при $u_0\ne 0$ и $u_l\ne 0$ не являются однородными. При неоднородных условиях сумма и разность двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уже не будут решениями, удовлетворяющими этим условиям. В частности, не является решением $u_1(x,t)-u_1(x,t)\equiv 0$. Последнее обстоятельство затрудняет построение общего решения (2.29).

Приведение к задаче с однородными краевыми условиями можно осуществить с помощью новой функции

$$\omega(x,t)=u(x,t)+(u_0-u_l)\frac{x}{l}-u_0.$$

Для этой функции уравнение (2.26) остается прежним, начальное условие примет вид

$$\omega(x,t)\big|_{t=0}=u(x,t)\big|_{t=0}+(u_0-u_l)\frac{x}{l}-u_0=f_1(x),$$

а краевые условия станут однородными:

$$\omega(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=0}+(u_0-u_l)\frac{x}{l}\bigg|_{x=0}-u_0=u_0-u_0=0;$$

$$\omega(x,t)\big|_{x=l}=u(x,t)\big|_{x=l}+(u_0-u_l)\frac{x}{l}\bigg|_{x=l}-u_0=u_l+(u_0-u_l)-u_0=0.$$

§ 5. Решение первой смешанной задачи методом разделения переменных. Функция источника

Рассмотрим следующую задачу: найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0, \qquad (2.32)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0 \qquad (2.33)$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x). \qquad (2.34)$$

Решение ищем в виде ряда $u=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)$, где $X_k=\sin\frac{\pi k}{l}x, k\in N$ и $T_k(t)=\varphi_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}+\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau$.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}+\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi k}{l}x. \qquad (2.35)$$

Интегральное представление решения:

$$u(x,t)=\int\limits_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}\xi\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x\right)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi k}{l}\xi\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Полагая $G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}\xi\sin\frac{\pi k}{l}x,$ (2.36)

получим

$$u(x,t)=\int\limits_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,t)d\xi d\tau. \qquad (2.37)$$

Решение первой смешанной задачи сводится к функции G.

G, определяемое формулой (2.36), называется функцией мгновенного ***точечного источника*** (или функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла). Физический смысл функции источника для временной переменной t: она указывает распределение температур для любой точки $x\in[0,l]$ и $\forall t>\tau$ при условиях, что

1) в момент времени $t=\tau$ в точке $x=\xi$ выделяется тепло $Q=c\rho$, а в других точках $Q=0$;

2) $\forall t>\tau$ на концах при $x=0$ и $x=l$ температура будет равна нулю.

Используя интегральное представление решения (2.37), можно показать, что смешанная задача (2.32)–(2.34) имеет классическое решение, которое задается формулой (2.35).

§ 6. Уравнение диффузии

Если среда заполнена газом с различной концентрацией, то происходит диффузия из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией. Аналогичное явление наблюдается и в растворах, если концентрация растворенного вещества для данного объема не является постоянной.

В задачах о диффузии неизвестной функцией является концентрация диффундирующего вещества, которую обозначают через c, $c = c(x, y, z, t)$.

Процесс диффузии во многом схож с процессом распространения тепла, поэтому в предположениях, аналогичных тем, которые были сделаны в § 1, получаем, что функция c должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right).$$

Постоянная D $(D > 0)$ называется *коэффициентом диффузии*.

Начальное условие $c(x, y, z, t)\big|_{t=0} = f(x, y, z)$, где $f(x, y, z)$ – заданная функция, определяет *начальную концентрацию*.

В качестве краевых условий рассматриваются главным образом следующие условия:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0; \qquad (2.38)$$

$$c(x, y, z, t)\big|_{\Gamma} = C_0, \qquad (2.39)$$

Γ – граница области, в которой происходит диффузия.

Условие (2.38) означает, что граница области для диффундирующего вещества является непроницаемой стенкой. Условие (2.39) определяет концентрацию на границе области.

Линейные задачи диффузии (т.е. задачи о диффузии в тонкой трубке с непроницаемой стенкой) состоят в следующем: найти решение $c = c(x, t)$ уравнения $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $c(x, t)\big|_{t=0} = f(x)$ и краевым условиям вида $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ или $c = c_0$ на конце или на концах трубки (первое условие на одном, второе – на другом конце; первое условие на обоих концах, второе условие на обоих концах). Эти задачи аналогичны задаче о распространении тепла в стержне и решаются с помощью методов, изложенных в § 4.

Глава 3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле

В предыдущей главе было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном теле, в случае отсутствия источников тепла, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{3.1}$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, т.е. что она не меняется с течением времени. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, и уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{3.2}$$

Таким образом, уравнению Лапласа (3.2) удовлетворяет установившаяся в однородном теле температура $u(x, y, z)$.

Уравнением Лапласа называется уравнение

$$\Delta u = 0, \tag{3.3}$$

где Δu – лапласиан, выражение которого в декартовых, цилиндрических и сферических координатах имеет соответственно вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнению Лапласа удовлетворяет потенциал стационарного электрического поля в области, где отсутствуют заряды, и потенциал поля тяготения в области, где отсутствуют массы. К уравнению Лапласа приводят и другие задачи, однако при изучении этого уравнения представление функции $u(x, y, z)$ как температуры наглядно и удобно.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической*. Уравнение Лапласа имеет бесконечное множество решений. Какое-то конкретное решение определяется заданием некоторых дополнительных условий.

Для уравнения Лапласа ставится следующая краевая задача. Найти функцию $u = u(x, y, z)$, гармоническую внутри области, ограниченной замкнутой поверхностью Γ, и удовлетворяющую граничному условию

$$H \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = u\big|_{\Gamma} - \tilde{u},$$

где H и $\tilde{u}$ – функции, заданные на границе Γ. В случае задачи о стационарном распределении температуры $H = -\dfrac{k}{h}$, $\tilde{u}$ – температура окружающей среды на границе тела.

Важный частный случай краевой задачи получается при $H = 0$, соответствующий случаю $h = \infty$, т.е. заданию температуры тела на границе Γ: $u\big|_{\Gamma} = \tilde{u}$. Эта краевая задача называется *задачей Дирихле*.

Задача Дирихле в пространстве формулируется следующим образом.

Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности Γ уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и принимающую на границе Γ заданные значения

$$u\big|_{\Gamma} = \tilde{u}. \tag{3.4}$$

То, что задача Дирихле всегда имеет решение (при некоторых весьма общих предположениях относительно Γ и $\tilde{u}$), можно считать очевидным, по физическим соображениям. Действительно, если каждая точка границы тела постоянно поддерживается при определенной температуре (которая может быть разной в разных точках границы), то в каждой точке тела установится в конце концов своя температура, которая и дает решение задачи Дирихле при данных граничных значениях. По тем же соображениям это решение будет единственным.

Задача Дирихле может интерпретироваться и в терминах диффузии: ее решением будет стационарная концентрация при условии, что концентрация на границе известна.

Если функция u зависит только от двух переменных (декартовых или полярных координат точки), то уравнение Лапласа имеет соответственно вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ или } \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0.$$

Задача Дирихле на плоскости состоит в следующем. Найти функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри области, ограниченной замкнутой кривой Γ, и принимающую на границе Γ заданные значения $\tilde{u}=\tilde{u}(x,y)$: $u\big|_{\Gamma}=\tilde{u}$.

Эта задача также имеет единственное решение. К ней приводят физические задачи двух типов. Первый тип задачи возникает при рассмотрении стационарного распределения тепла в тонкой однородной пластинке, параллельной оси Oxy, нижняя и верхняя поверхности которой теплоизолированы. Пластинка предполагается настолько тонкой, что можно пренебречь изменением температуры по толщине (температура в этом случае будет функцией только x и y). Край пластинки Γ поддерживается при определенной температуре $\tilde{u}$.

Второй тип задачи относится к стационарному распределению температуры в бесконечном однородном цилиндре, у которого образующие параллельны оси Oz, направляющая Γ лежит в плоскости Oxy. Температура u остается постоянной на любой прямой, проходящей внутри цилиндра параллельно оси Oz, поэтому $u=u(x,y)$. Боковая поверхность цилиндра поддерживается при определенной температуре $\tilde{u}$.

Задача Дирихле решается очень просто в одномерном случае, т.е. когда в соответствующей системе координат неизвестная функция u зависит только от одной из координат.

В случае декартовых координат уравнение Лапласа принимает вид $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ и его решениями являются линейные функции $u=Ax+B$ (стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью всегда линейно). Задача Дирихле имеет в этом случае решение $u=\frac{u_l-u_0}{l}x+u_0$, где $u_0=u\big|_{x=0}$, $u_l=u\big|_{x=l}$.

Трехмерные и двумерные задачи Дирихле могут быть точно решены только для сравнительно простых областей.

§ 2. Задача Дирихле для круга. Интеграл Пуассона

Задача Дирихле для круга состоит в следующем. Найти функцию, гармоническую внутри круга и принимающую на его границе заданные значения. Введем полярные координаты r и φ, полюс поместим в центре данного круга, радиус которого обозначим через R. Двумерный оператор Лапласа выражаем в полярных координатах. Уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (3.5)$$

Найдем функцию $u=u(r,\varphi)$, удовлетворяющую уравнению (3.5) при $r<R$ и принимающую на границе Γ круга радиуса R заданные значения $u=f(\varphi)$:

$$u(r,\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi). \qquad (3.6)$$

Решением уравнения (3.5) является

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)r^n. \qquad (3.7)$$

Коэффициенты a_n, b_n определятся из условия (3.6):

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)R^n;$$

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n\cos n\varphi+b_nR^n\sin n\varphi\right).$$

Последнее равенство представляет разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье. Как известно:

$$R^na_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt;$$

$$R^nb_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt. \qquad (3.8)$$

Подставив выражение (3.8) в формулу (3.7), получим искомое решение задачи Дирихле для круга.

Подставляя выражения для коэффициентов a_n, b_n в формулу (3.7), получаем

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(t-\varphi) \right] f(t)\,dt. \qquad (3.9)$$

После преобразования полученное решение примет вид

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} f(t)\,dt. \qquad (3.10)$$

Функция (3.10) дает решение задачи Дирихле для круга. Интеграл (3.10) называется *интегралом Пуассона*, а выражение $\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\varphi)}$ – ядром Пуассона для круга.

Пример. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиуса 5, верхняя половина границы которой поддерживается при температуре $20°C$, а нижняя – при $0°C$.

Задача сводится к задаче Дирихле для круга. Граничное условие $f(\varphi) = \begin{cases} 20, & 0 \le \varphi < \pi \\ 0, & \pi \le \varphi < 2\pi \end{cases}$. Находим коэффициенты по формулам (3.8):

$$a_0 = \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi = 20;$$

$$a_k = \frac{20}{\pi 5^k} \int_0^{\pi} \cos k\varphi\, d\varphi = \frac{20}{\pi k\, 5^k} \sin k\varphi \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$b_k=\frac{20}{\pi\,5^k}\int_0^\pi \sin k\varphi\,d\varphi=-\frac{20}{\pi k\,5^k}\cos k\varphi\Big|_0^\pi=\frac{20}{\pi k\,5^k}\left(\cos k\pi-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{40}{\pi\left(2k-1\right)5^{2k-1}},\ k-\textit{нечетное}\\ 0,\quad k-\textit{четное}\end{cases}.$$

Решение задачи находим по формуле (3.7):

$$u\left(r,\varphi\right)=10+\frac{40}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2k-1\right)\varphi}{5^{2k-1}\left(2k-1\right)}r^{2k-1}.$$

§3. Метод функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай)

Метод функции Грина базируется на формуле Грина, являющейся следствием формулы Остроградского – Гаусса:

$$\oiint\limits_S a_n d\sigma=\iiint\limits_V div\,a\,dv, \tag{3.11}$$

где S – граница области V; $\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ – единичный вектор внешней нормали к S; $a_n=\vec{a}\cdot\vec{n}$ – проекция вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$.

Пусть $u=u\left(x,y,z\right)$ и $v=v\left(x,y,z\right)$– две любые дважды дифференцируемые функции и $a=u\,grad\,v-v\,grad\,u$.

Тогда $a_n=\left(u\,grad\,v-v\,grad\,u\right)\vec{n}=u\,grad\,v\cdot\vec{n}-v\,grad\,u\cdot\vec{n}$.

Поскольку скалярное произведение градиента функции на единичный вектор равно производной функции по направлению этого вектора, то

$$gradv\cdot\vec{n}=\frac{\partial v}{\partial n},\ gradu\cdot\vec{n}=\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Поэтому выражения для a_n примет вид

$$a_n=u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Перейдем к вычислению $div\,a$:

$$div\, a = div\left(u\, grad\, v - v\, grad\, u\right) = div\left(u\, grad\, v\right) - div\left(v\, grad\, u\right).$$

Преобразуем каждое из выражений в правой части:

$$div\left(u\, grad\, v\right) = div\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + u\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + u\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right) = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = u\Delta v + grad\, u \cdot grad\, v\,.$$

Аналогично получаем $div\left(u\, grad\, v\right) = v\Delta u + grad\, v \cdot grad\, u$. Поэтому $div\, a = u\Delta v - v\Delta u$.

Подставляем выражения для a_n и $div\, a$ через u и v в формулу (3.11), получим формулу Грина

$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \iiint\limits_V \left(u\Delta v - v\Delta u\right) dv\,. \qquad (3.12)$$

Нам понадобится обобщение этой формулы на случай, когда область ограничена не одной, а двумя поверхностями. Пусть W ограничена снаружи замкнутой поверхностью S и изнутри замкнутой поверхностью S_1, лежащей целиком внутри S (так что W — это часть внутренности S, внешняя относительно S_1). Тогда формула Остроградского – Гаусса (3.11) запишется в виде

$$\iint\limits_{S_1} a_{n_1} d\sigma + \iint\limits_S a_n d\sigma = \iiint\limits_W div\, a dv\,,$$

где n_1– единичный вектор внешней нормали к S_1, т.е. вектор, направленный внутрь S_1 (внутренность S_1 не принадлежит W и поэтому является областью, внешней относительно W). Соответственно формула Грина (3.12) примет вид

$$\iint\limits_{S_1} \left(u\frac{\partial v}{\partial n_1} - v\frac{\partial u}{\partial n_1}\right) d\sigma + \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \iiint\limits_W \left(u\Delta v - v\Delta u\right) dv\,. \quad (3.13)$$

Эта формула и служит основой метода Грина решения задачи Дирихле в пространстве.

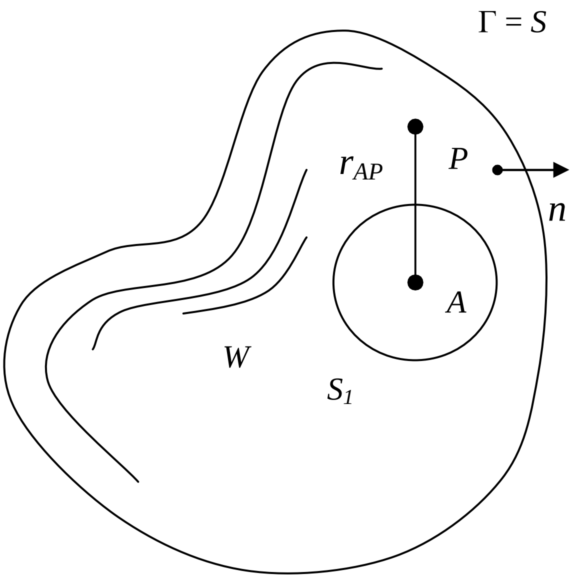

Рис. 3.1. Поверхности S, S_1, область W

Введем теперь определение самой функции Грина для трехмерного случая. В качестве поверхности S возьмем границу Γ области Ω, для которой мы решаем задачу Дирихле, и выберем внутри Γ произвольную, но фиксированную точку $A(x_0, y_0, z_0)$, которую окружим сферой S_1 радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в A. При этом мы предположим, что сфера S_1 целиком лежит внутри Γ. Тогда между S_1 и Γ мы имеем область W (рис.3.1). Обозначим через $P(x, y, z)$ любую точку области Ω, отличную от A, и через r_{AP} – расстояние между точками A и P:

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\,.$$

Функция $w = \dfrac{1}{r_{AP}}$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta w = 0$, во всех точках, кроме самой точки A, в которой она обращается в бесконечность.

Обозначим через w_1 решение задачи Дирихле для области Ω с краевым условием

$$w_1\big|_\Gamma = w\big|_\Gamma\,. \tag{3.14}$$

Согласно определению функция w_1 – гармоническая уже во всей области Ω, в то время как w – гармоническая только в области W, получаемой удалением из области Ω сферы S_1, содержащей точку A (таким образом, область W не содержит точки A).

Разность функций $w_1 - w$ называется функцией Грина для области Ω и обозначается обычно через

$$G = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = w_1 - w = w_1 - \frac{1}{r_{AP}}\,.$$

Функция Грина зависит как от координат x, y, z текущей точки P, так и от координат x_0, y_0, z_0 произвольно выбранной, но фиксированной точки A (последние входят в явном виде в w, но они войдут также через краевые значения и в w_1).

В силу условия (3.14) функция Грина на границе Γ обращается в нуль:

$$G\big|_{\Gamma} = 0. \tag{3.15}$$

Пусть теперь u – искомая гармоническая функция в области Ω, принимающая на границе Γ значения $\tilde{u}$, тогда формула

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \tag{3.16}$$

дает решение задачи Дирихле в пространстве, если известна функция Грина.

Метод Грина для задач Дирихле (двумерный случай) также основывается на формуле Грина. Функция

$$w = \ln \frac{1}{r_{AP}} = -\ln r_{AP}$$

является гармонической. Пусть w_1 – решение задачи Дирихле для области D с краевым условием $w_1\big|_{\Gamma} = w\big|_{\Gamma}$. Тогда функция Грина для области D будет иметь вид $G = G(x, y; x_0, y_0) = w_1 - w = w_1 - \ln \frac{1}{r_{AP}}$. Поэтому формула

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$$

дает решение задачи Дирихле на плоскости, если известна функция Грина.

§ 4. Задача Неймана

В приложениях встречается еще одна краевая задача для уравнения Лапласа, так называемая задача Неймана. Задача Неймана состоит в следующем: найти функцию u, удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности (или кривой) Γ уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и на границе Γ условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = u_1, \tag{3.17}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к Γ, а u_1 – функция, заданная на Γ.

Отметим, что функция u_1 на поверхности (или кривой) Γ не может быть задана произвольно.

Поэтому для любой функции u, гармонической в области V, ограниченной поверхностью Γ, должно выполняться равенство

$$\oiint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Следовательно, граничное значение производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на Γ– функция u_1 – должно удовлетворять условию

$$\oiint_{\Gamma} u_1 d\sigma = 0. \tag{3.18}$$

При соблюдении условия (3.18) задача Неймана всегда имеет решение. Вместе с любым решением u решением будет также $u + const$. Можно доказать, что других решений задача Неймана не имеет, т.е. что разность двух любых решений задачи Неймана постоянна. Это означает, что решение задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Задача Неймана играет важную роль в теории волновых процессов, в частности в теории электромагнетизма.

Метод функции Грина может быть применен и к решению задачи Неймана на основе формулы (3.13) (для пространства). Но функция Грина G для задачи Неймана должна быть определена иначе. По-прежнему полагаем $G = w_1 - w = w_1 - \frac{1}{r_{AP}}$ для пространства и $G = w_1 - w = w_1 - \ln\frac{1}{r_{AP}}$ для плоскости; однако на функцию w_1, гармоническую во всей области V, накладываем теперь краевое условие

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\Gamma} + K.$$

Применяя формулу (3.13), можно доказать, что если положить $K=\frac{4\pi}{S}$, где S – площадь поверхности Γ (или, в двумерном случае, $K=\frac{2\pi}{l}$, где l – длина кривой Γ), то интеграл от $\frac{\partial w_1}{\partial n}$, взятый по границе Γ области V, будет равен нулю. Тогда $\left.\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n}\right|_{\Gamma}=K$, и, рассуждая так же, как в § 3, мы придем к решению задачи Неймана в пространстве:

$$u(x_0,y_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\tilde{u}_1\tilde{G}\,d\sigma \tag{3.19}$$

и на плоскости

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\tilde{u}_1\tilde{G}\,ds; \tag{3.20}$$

функция u определяется с точностью до произвольной постоянной.

Задачу Дирихле часто называют *первой краевой задачей* для уравнения Лапласа, а задачу Неймана – *второй краевой задачей*. Рассматривается еще *третья краевая задача*: найти функцию u, удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности (или кривой) Γ уравнению Лапласа $\Delta u=0$ и на границе Γ условию

$$\tilde{\alpha}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}+\tilde{\beta}u\big|_{\Gamma}=\tilde{\gamma},$$

где $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ – функции, заданные на Γ. Очевидно, что задачи Дирихле и Неймана являются частными случаями этой задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения гиперболического и параболического типов возникают чаще всего при изучении *процессов, протекающих во времени* (мы рассматривали уравнения колебаний, распространения тепла, диффузии). В одномерном случае всегда участвовала одна координата x и время t.

Для задач, приводящих к таким уравнениям, дополнительные условия разделяются на начальные и краевые.

Начальные условия состоят в задании при $t=0$ значений искомой функции u и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае).

Краевые условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции $u(x,t)$ на концах интервала изменения координаты (в задаче о колебаниях струны это концы струны, в задаче о линейной теплопроводности это концы стержня и т.д.).

Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x (бесконечная струна, бесконечный стержень), то краевые условия отпадают и получается задача только с начальными условиями (*задача Коши*).

Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные, и краевые условия. Тогда говорят о *смешанной задаче*.

Уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании *стационарных процессов*. Время t в эти уравнения не входит, и обе независимые переменные являются координатами точки. Такими оказываются уравнения стационарного температурного поля, электростатического поля и уравнения многих других физических задач.

Для задач такого типа ставятся только краевые условия, т.е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области. Это может быть задача Дирихле, когда заданы значения самой функции; задача Неймана, когда заданы значения нормальной производной искомой функции, и, наконец, задача, когда на контуре задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

Таким образом, при постановке и решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными существенное значение имеет тип уравнения.

В основных задачах математической физики именно физические соображения подсказывали, какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса.

Дифференциальные уравнения с частными производными, как правило, имеют бесконечное число решений. Решение же физической проблемы, описываемой дифференциальным уравнением, по смыслу, должно быть однозначным; иначе оно не дает возможности прогнозировать соответствующее физическое явление и, значит, является малоценным для практики. Дополнительные условия (начальные и краевые) дают возможность выделить из бесконечной совокупности решений данного дифференциального уравнения *единственное* его решение, дающее закон функционирования рассматриваемого физического процесса.

Все выведенные уравнения носят идеализированный характер, т.е. отражают лишь наиболее существенные черты процесса. Функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно. Поэтому мы должны быть уверены, что решения задачи при приближенных исходных данных будут близки к тем решениям, которые получились бы при точных исходных данных. Таким образом, важно, *чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в ее решении во всей области, в которой эти решения рассматриваются*. В этом случае говорят *об устойчивости задачи относительно начальных и краевых условий*.

Все рассмотренные задачи принадлежат к типу задач, имеющих единственное решение, устойчивое относительно исходных данных. *Эти задачи поставлены корректно*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение дифференциального уравнения с частными производными, запишите его в общем виде.

2. Запишите линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка в общем виде.

3. Приведите примеры дифференциальных уравнений с частными производными, описывающие различные физические процессы.

4. Что называется регулярным решением дифференциального уравнения с частными производными?

5. Сформулируйте теорему Коши – Ковалевской.

6. Дайте классификацию уравнений с частными производными второго порядка. Приведите примеры.

7. Приведите постановку основных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

8. Запишите канонический вид уравнения гиперболического типа, уравнения параболического типа, уравнения эллиптического типа.

9. Выведите уравнение колебаний струны.

10. Сформулируйте краевую задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах.

11. Выведите формулу Даламбера для нахождения решения задачи Коши о колебаниях бесконечной струны.

12. В чем заключается идея метода Фурье для нахождения решения краевой задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах?

13. Выведите уравнение распространения тепла в стержне. Сформулируйте краевую задачу.

14. Изложите метод Фурье для нахождения решения уравнения теплопроводности.

15. Сформулируйте краевые задачи для уравнения Лапласа.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1–10. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение.

1. $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

2. $$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

4. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

5. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

6. $$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

7. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+2u=0$$

8. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

9. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+u=0$$

10. $$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

11–20. Однородная струна закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму $u(x,0)$, точкам струны сообщена начальная скорость u_t'. Найти отклонение струны для любого момента времени.

11. $u''_{tt} = u''_{xx}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u'_t(x,0) = x,\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$

12. $u''_{tt} = u''_{xx}, \quad 0 < x < 3/2, 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-3/2), \quad u'_t(x,0) = x,\ u(0,t) = 0, u(3/2,t) = 0$

13. $u''_{tt} = 4u''_{xx}, \quad 0 < x < 2, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-2), \quad u'_t(x,0) = x-2,\ u(0,t) = 0, u(2,t) = 0$

14. $u''_{tt} = 9u''_{xx}, \quad 0 < x < 3, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-3), \quad u'_t(x,0) = x-3,\ u(0,t) = 0, u(3,t) = 0$

15. $u''_{tt} = 1/16 u''_{xx}, \quad 0 < x < 1/4, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-1/4), \quad u'_t(x,0) = x, \quad u(0,t) = 0, u(1/4,t) = 0$

16. $u''_{tt} = 4/9 u''_{xx}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u'_t(x,0) = x-1,\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$

17. $u''_{tt} = 16u''_{xx}, \quad 0 < x < 2, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-2), \quad u'_t(x,0) = x, \quad u(0,t) = 0, u(2,t) = 0$

18. $u''_{tt} = 36u''_{xx}, \quad 0 < x < 5, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-5), \quad u'_t(x,0) = x-5,\ u(0,t) = 0, u(5,t) = 0$

19. $u''_{tt} = 1/4 u''_{xx}, \quad 0 < x < 3/2, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-3/2), \quad u'_t(x,0) = x,\ u(0,t) = 0, u(3/2,t) = 0$

20. $u''_{tt} = u''_{xx}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u'_t(x,0) = x-1,\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$

21–30. Для тонкого однородного изолированного стержня длиной l, ось которого совпадает с осью Ox, температура $u = u(x,t)$ в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t = a^2 u''_{xx}$, a – постоянная. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0)$.

21. $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ 3 - x, \dfrac{3}{2} < x \le 3 \end{cases},\ u(0,t) = u(3,t) = 0$$

22. $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, 1 < x \le 2 \end{cases}, u(0,t) = u(2,t) = 0$$

23. $u'_t = 25u''_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{5}, 0 \le x \le \dfrac{5}{2} \\ 5 - x, \dfrac{5}{2} < x \le 5 \end{cases}, u(0,t) = u(5,t) = 0$$

24. $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, 2 < x \le 4 \end{cases}, u(0,t) = u(4,t) = 0$$

25. $u'_t = 4u''_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{5}, 0 \le x \le \dfrac{5}{2} \\ 5 - x, \dfrac{5}{2} < x \le 5 \end{cases}, u(0,t) = u(5,t) = 0$$

26. $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{3}, 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ 3 - x, \dfrac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}, u(0,t) = u(3,t) = 0$$

27. $u_t' = 25u_{xx}''$, $0 < x < 9, t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{9}, 0 \le x \le \dfrac{9}{2} \\ 9 - x, \dfrac{9}{2} < x \le 9 \end{cases}, u(0,t) = u(9,t) = 0$$

28. $u_t' = 9u_{xx}''$, $0 < x < 2, t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, 1 < x \le 2 \end{cases}, u(0,t) = u(2,t) = 0$$

29. $u_t' = 4u_{xx}''$, $0 < x < 4, t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, 2 < x \le 4 \end{cases}, u(0,t) = u(4,t) = 0$$

30. $u_t' = 16u_{xx}''$, $0 < x < 8, t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, 0 \le x \le 4 \\ 8 - x, 4 < x \le 8 \end{cases}, u(0,t) = u(8,t) = 0$$

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала курса и внимательного разбора примеров, приведенных в данном пособии.

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться следующих правил.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, чернилами любого цвета, кроме красного.

2. На обложке тетради должны быть разборчиво написаны фамилия, имя и отчество студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер варианта, соответствующий последней цифре шифра.

3. В работу должны быть включены все задачи, строго по положенному варианту.

4. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

5. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения. При необходимости следует делать ссылки на вопросы теории с указанием формул, которые используются при решении данной задачи.

6. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

В случае незачета студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование. При повторном представлении работы на проверку к ней должна быть приложена и предыдущая работа.

Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица производных основных элементарных функций и простейших интегралов

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	1. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1$
2. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$	2. $\int \dfrac{1}{u}du = \ln\lvert u\rvert + C$
3. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u'$	3. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$
4. $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$	4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$	5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}du = \mathrm{tg}\, u + C$
7. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$	7. $\int \dfrac{1}{\sin^2 u}du = -\mathrm{ctg}\, u + C$
8. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$ $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$	8. $\int \dfrac{1}{u^2+a^2}du = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{u}{a} + C \end{cases}$
9. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$	9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \begin{cases} \arcsin\dfrac{u}{a} + C \\ -\arccos\dfrac{u}{a} + C \end{cases}$
10. $C' = 0$	10. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+u}{a-u}\right\rvert + C$
	11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a}\right\rvert + C$

Формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы.

Линейное относительно старших производных уравнение второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= F\left(x, y, u\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$$

Классификация уравнений второго порядка

1. Если $B^2 - AC > 0$ в области G, то уравнение *гиперболического* типа.

2. Если $B^2 - AC = 0$ – *параболического* типа

3. Если $B^2 - AC < 0$ – *эллиптического* типа

Канонический вид уравнения второго порядка

1. Каноническое уравнение *гиперболического* типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2. Каноническое уравнение *параболического* типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

3. Каноническое уравнение *эллиптического* типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Дифференциальное уравнение характеристик уравнения

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$$

есть

$$A(x,y)dy^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)dx^2=0.$$

Задача Коши для неограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$.

Решение:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$$

(формула Даламбера).

Колебания полуограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0<x<+\infty,t>0.$$

$$u\Big|_{x=0}=0,u\big|_{t=0}=\varphi(x),\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

Решение:

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\tau)d\tau,$$

где

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x>0\\-\varphi(-x),x<0\end{cases};\qquad\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),x>0\\-\psi(-x),x<0\end{cases}.$$

Метод Фурье для уравнения колебаний ограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l$$

Начальные условия: $u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$.

Граничные условия: $u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0$.

Решение:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;\ b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Уравнение теплопроводности для нестационарного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Распределение температуры в неограниченном стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty$$

Начальное условие: $u\big|_{t=0} = f(x)$.

Решение:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right)d\xi$$

(интеграл Пуассона).

Распределение температуры в ограниченном стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < l$$

Начальное условие: $u(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$.

Граничные условия: $u\big|_{x=0} = A, \ u\big|_{x=l} = B$.

Решение:

$$u(x,t) = A + \frac{B-A}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx - \frac{2}{\pi n}\left(A + (-1)^{n+1}B\right).$$

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ или } \Delta u = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Задача Дирихле для круга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u\big|_{r=R} = f(\varphi)$$

(φ, r – полярные координаты).

Решение:

$$u(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}dt$$

(интеграл Пуассона).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1999.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2003.
3. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М.: Физматлит, 1969.
4. Несис, Е. И. Методы математической физики / Е. И. Несис. – М.: Просвещение, 1977.
5. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М.: ГИТТЛ, 1966.
6. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001.
7. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Физматлит, 1961.
8. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970.

Дополнительная

1. Свешников, А. Г. Лекции по математической физике: учебное пособие для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – М.: Наука, 2004.
2. Сабитов, К. Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Высшая школа, 2003.
3. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В.П. Пикулин, С. И. Похожаев. – М.: МЦНМО, 2004.
4. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. – М.: Физматлит, 1982.
5. Зайцев, В. Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В. Ф. Зайцев, А.Д.Полянин. – М.: Физматлит, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ