УДК 517.968.73

С.К. Зарипов, канд. физ.-мат. наук
(ТНУ, г. Душанбе, Таджикистан)

РЕШЕНИЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегро-дифференциальное уравнение

$$y' + \int_a^x \left[P_0 + P_1\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right] \frac{y(t)}{(t-a)^2} dt = f(x), \qquad (1)$$

где P_0, P_1 - заданные постоянные числа, $f(x)$ - заданная функция на Γ, $y(x)$ - искомая функция.

Проблеме исследования интегро-дифференциальных уравнений вольтеровских типов с сингулярным и сверхсингулярным ядром и проблеме выяснения граничных задач для таких уравнений посвящены работы [1-5]

Прежде всего через $C_x'(\overline{\Gamma})$ обозначим класс таких функций, которые имеют непрерывное производное первого порядка и в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$y(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_1}\right], \ \gamma_1 > 2,$$

и решение интегро-дифференциального уравнения (1) будем искать в этом классе.

Легко можно видеть, что однородное уравнение (1) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda + \frac{P_0}{\lambda - 1} + \frac{P_1}{\lambda - 2} = 0, \qquad (2)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (2) решение уравнения (1) получено в явном виде.

Например, имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты такие, что корни характеристического уравнения (4) являются вещественными и разными и* $2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x)$ *при* $x \to a$ *обращается в нуль с асимптотическим поведением*

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_2}\right], \ \gamma_2 > \lambda_3 - 1.$$

Тогда однородное уравнение (1) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x)\in C'_x(\overline{\Gamma})$ *разрешимо и его общее решение содержит три произвольных постоянных, которое даётся по формуле*

$$y(x)=(x-a)^{\lambda_1}c_1+(x-a)^{\lambda_2}c_2+(x-a)^{\lambda_3}c_3+$$
$$+\frac{1}{\Delta_0 P_1}\int_a^x\sum_{i=1}^{3}\Delta_i(\lambda_i-2)(\lambda_i-1)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_i}f(t)dt,$$

где c_1, c_2, c_3 *- произвольные постоянные числа.*

Замечание 1. *Найдено случаи, когда общее решение неоднородного уравнения (1) содержит две произвольные постоянные; одну произвольную постоянную или имеет только единственное решение.*

Замечание. *Подобные утверждение получены и в случае, когда корни характеристического уравнения (2) являются вещественно равные или комплексно сопряженные.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Деваштич, 2007, 221с.
2. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Репин О.А. – Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, №3, с. 1-10.
3. Зарипов С.К. – Вестник Таджикского национального университета, 2015, №1/3(164), с. 27-32.
4. Зарипов С.К. – Вестник Таджикского национального университета, 2015, №1/4(168), с. 54-57.
5. Зарипов С.К. – Вестник Таджикского национального университета, 2015, №1/6(191), с. 33-36.