УДК 517.966

В.В. Игнатенко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);
В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук;
Г.П. Размыслович, канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x - n -$ вектор состояния, $A - n \times n -$ матрица, b, x_0 - заданные n-векторы, $u -$ скалярное управление.

Определение 1. (Калмана). Система (1) называется управляемой, если для любого начального состояния x_0 найдутся момент времени $t_1, 0 < t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), 0 \le t \le t_1$ такие, что состояние системы (1), соответствующее этому управлению, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

В классическом определении управляемости (по Калману) входной сигнал выбирается из класса кусочно-непрерывных функций на всем интервале управления. Представляет интерес возможность управления системой с помощью функций из более узкого класса, который легко технически реализуем.

Мы в качестве управления $u(t)$ будем рассматривать выход

$$u(t) = c^T y(t) \tag{2}$$

линейной сингулярной системы

$$D_0 \dot{y}(t) = D\, y(t),\ y(t_0) = y_0 \tag{3}$$

(здесь: $c, y, y_0 \in R^n, D, D_0 - n \times n -$ матрицы, $\det D_0 = 0$), которую назовем сингулярным динамическим регулятором или просто динамическим регулятором[1] . При управлении, с помощью динамического регулятора, достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале.

Определение. Система (1) называется управляемой динамическим регулятором (4), если найдется момент времени $t_1, 0 < t_1 < +\infty$ такой, что для любого начального состояния x_0 найдется начальное состояние y_0 регулятора (3), при котором решение системы (1), соответствующее управлению (3), удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Считаем в дальнейшем, что система (3) является регулярной, т. е. найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det(\lambda_0 D_0 - D) \ne 0$ и кроме этого матрицы D_0 и D удовлетворяют условию $D_0 D = D D_0$ Последнее условие не является ограничением для регулярной системы (3), ибо это условие выполняется [2] после умножения системы (3) на матрицу$\left(\lambda_0 D_0 - D\right)^{-1}$.

Доказан неявный критерий управляемости системы (1) сингулярным динамическим регулятором (3).

Теорема 1. Система (1) управляема сингулярным динамическим регулятором (3) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$rank\left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} bc^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} D_0 D_0^d d\tau\right) = n.$$

Из теоремы 1 получен параметрический критерий управляемости.

Теорема 2. Для управляемости системы (1) сингулярным динамическим регулятором (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$rank\left[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\right] = n, \tag{4}$$

$$rank\left[c^T D_0^d D_0, c^T D_0^d K D_0, \ldots, c^T D_0^d K^{n-1} D_0\right] = n, \tag{5}$$

где $K = D D_0^d$.

Условие (4) означает, что система (1) управляема по Калману. Условие (5) означает, что сингулярный динамический регулятор (3) наблюдаем по выходу (2) [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В.В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора. / Игнатенко В.В. // Вестник БГУ. Сер.1 «2. 1976. С.56 – 58.

2. Campbell S.L. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients. / Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J. // SIAM J. Appl. Math., V.31. № 3. 1976. P. 411 – 425.

3. Игнатенко В.В. К проблеме наблюдаемости непрерывных дифференциально- разностных систем. / В.В.Игнатенко, В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович // Материалы Международной научно-технической конференции «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». - Мн: БГТУ, 2012. - с. 262-263.