

УДК 519.7

**В. П. Кобринец**, кандидат технических наук, доцент (БГТУ);  
**Д. С. Карпович**, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации  
 производственных процессов и электротехники (БГТУ); **Е. В. Братаус**, магистрант (БГТУ)

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СУШКИ ТВЕРДЫХ ЖЕЛАТИНОВЫХ КАПСУЛ

В статье описана математическая модель процесса сушки твердых желатиновых капсул, позволяющая оптимизировать данный процесс. В соответствии с технологической целью процесса выбран критерий оптимальности динамических режимов, составлен алгоритм оптимизации с применением принципа максимума по критерию максимального быстродействия. Реализована программа решения данной задачи в пакете MATLAB. Получены расчетные оптимальные режимы процесса.

This article describes a mathematical model of drying hard gelatin capsules with optimizing the process. According to the technological purpose of process the criterion of an optimality of dynamic conditions is chosen, the algorithm of optimization with maximum principle application by criterion of maximum speed is made. The program of a solution of the given problem in program MATLAB is realized. The calculated optimal modes of the process.

**Введение.** «Классические» модели сушки коллоидных тел, к числу которых относится и процесс сушки твердых желатиновых капсул (ТЖК), представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, решение которых и использование в целях оптимизации представляют собой значительные трудности. Реальный процесс сушки ТЖК является многозонным, отличается значительной продолжительностью, что приводит к уменьшению его производительности и значительным затратам энергоресурсов. Цель работы – создание упрощенной математической модели процесса, постановка задачи оптимизации динамических режимов сушки ТЖК и разработка алгоритмов решения данной задачи с применением ЭВМ.

**Основная часть.** Процесс сушки ТЖК происходит в конвективной сопловой сушилке непрерывного действия.

Математическое описание процессов тепло- и массопереноса в канонической форме, характерных для сушки ТЖК, предложено в [1]. Такого рода описанию соответствует система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \rho}{c} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= a' \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + a' \delta \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $t$  – температура материала,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\varepsilon$  – критерий фазового превращения (безразмерная величина);  $\rho$  – удельная теплота фазового перехода,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  $c$  – теплоемкость тела,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $u$  – влагосодержание тела,  $\text{кг}/\text{кг}$ ;  $a'$  – коэффициент диффузии влаги,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\delta$  – термоградиентный коэффициент,  $\text{К}^{-1}$ .

Выполним некоторые замены:

$$b = \frac{\varepsilon \rho}{c}, \quad (2)$$

$$a^* = \frac{a'}{a \left[ 1 + \frac{\varepsilon \rho a' \delta}{ac} \right]}, \quad (3)$$

$$b^* = \frac{a' \delta}{a \left[ 1 + \frac{\varepsilon \rho a' \delta}{ac} \right]}, \quad (4)$$

$$F_0 = \frac{a \tau}{R^2}, \quad (5)$$

$$l = \frac{x}{R}, \quad (6)$$

где  $F_0$  – критерий Фурье;  $R$  – характерный размер (в нашем случае толщина стенки капсулы),  $\text{м}$ .

Подставив выражения (2)–(6) в систему (1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t(l, F_0)}{\partial F_0} &= \frac{\partial^2 t(l, F_0)}{\partial l^2} + b \frac{\partial u(l, F_0)}{\partial F_0}, \\ \frac{\partial u(l, F_0)}{\partial F_0} &= a^* \frac{\partial^2 u(l, F_0)}{\partial l^2} + b^* \frac{\partial t(l, F_0)}{\partial F_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим симметричную задачу нестационарного тепло- и массообмена с граничными условиями третьего рода. Краевые условия в этом случае запишутся для первого уравнения системы (7):

$$\begin{aligned} - \frac{\partial t(l, F_0)}{\partial l} \Big|_{l=1} + Bi [t_c - t(l, F_0)] \Big|_{l=1} &= 0, \\ \frac{\partial t(l, F_0)}{\partial l} \Big|_{l=0} + Bi [t_c - t(l, F_0)] \Big|_{l=0} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

и для второго уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(l, F_0)}{\partial l} \Big|_{l=1} + Bi'[u(l, F_0) - u_c] \Big|_{l=1} &= 0, \\ -\frac{\partial u(l, F_0)}{\partial l} \Big|_{l=0} + Bi'[u(l, F_0) - u_c] \Big|_{l=0} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $Bi$  – теплообменный критерий Био;  $t_c$  – температура окружающей среды, °C;  $Bi'$  – массообменный критерий Био;  $u_c$  – равновесное влагосодержание тела, кг/кг.

Тепло- и массообменные критерии Био рассчитываются по следующим формулам:

$$Bi = \frac{aR}{\lambda}, \quad Bi' = \frac{a'R}{\lambda'}, \quad (10)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);  $\lambda'$  – коэффициент массопроводности, кг/(м · °М).

Поскольку рассматриваемая группа тонких материалов имеет достаточно малые размеры тела, то и достаточно малы будут соответствующие критерии  $Bi$ ,  $Bi'$ , т. е. задачу с распределенными параметрами можно свести к задаче с сосредоточенными параметрами, что, по существу, соответствует рассмотрению двух первых корней характеристического уравнения.

Введем понятие средней температуры и среднего влагосодержания:

$$\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 t(l, F_0) dl, \quad W = \frac{1}{2} \int_0^1 u(l, F_0) dl. \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнения системы (7) в пределах от 0 до 1, при этом используем крайние условия (8), (9) и выражения (11), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dF_0} &= Bi(t_c - \theta) + b \frac{dW}{dF_0}, \\ \frac{dW}{dF_0} &= -Bi'a^*(W - u_c) + b^* \frac{d\theta}{dF_0}, \\ \theta|_{F_0=0} &= \theta_0, \quad W|_{F_0=0} = W_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если считать, что материал до того, как попасть в зону тепло- и массопереноса, находился в некотором равновесном состоянии со средой, соответствующей начальным условиям, то математическое описание будет отвечать некоторому исходному состоянию среды:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= t_c^0 \\ W_0 &= u_c^0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad F_0 = 0. \quad (13)$$

Далее материал попадает в зону тепло- и массообмена, где переменные окружающей среды получают соответствующие приращения:

$$\Delta u_c = u_c - u_c^0, \quad \Delta t_c = t_c - t_c^0. \quad (14)$$

Следовательно, переменные системы также получат приращения:

$$\Delta \theta = \theta - \theta_0, \quad \Delta W = W - W_0. \quad (15)$$

Подставим (15) в систему (12), учитывая (13), (14), получим:

$$\frac{d\Delta \theta}{dF_0} = Bi(\Delta t_c - \Delta \theta) + b \frac{d\Delta W}{dF_0}, \quad (16)$$

$$\frac{d\Delta W}{dF_0} = -Bi'a^*(\Delta W - \Delta u_c) + b^* \frac{d\Delta \theta}{dF_0}, \quad (17)$$

$$\Delta \theta|_{F_0=0} = \theta_0, \quad \Delta W|_{F_0=0} = W_0. \quad (18)$$

Это система линейных дифференциальных уравнений, устанавливающих зависимость между температурой, влагосодержанием материала и влажностью окружающей среды, т. е. теплоносителя. Если считать в линейном приближении:

$$\Delta W_c = k'' \Delta t_c, \quad (19)$$

то систему уравнений (16)–(18) можно свести к уравнению второго порядка:

$$\begin{aligned} (1 - b^*b) \frac{d^2 \Delta W}{dF_0^2} + (a^*Bi^* + Bi) \frac{d\Delta W}{dF_0} + \\ + a^*Bi^*Bi\Delta W = (Bi b^* - a^*Bi^*k'') \times \\ \times \frac{d\Delta t_c}{dF_0} - k'' a^*Bi^*Bi\Delta t_c. \end{aligned} \quad (20)$$

Если полагать, что уравнение (20) имеет нулевые граничные условия, тогда оно переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1 - b^*b) \frac{d^2 \Delta W}{dF_0^2} + (a^*Bi^* + Bi) \frac{d\Delta W}{dF_0} + \\ + a^*Bi^*Bi\Delta W = -Bi^2b^*t_c. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя соотношение (5), перейдем снова к дифференцированию по времени:

$$a_1 \Delta W'' + a_2 \Delta W' + \Delta W = -kt_c. \quad (22)$$

Численные значения коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $k$  равны соответственно:

$$a_1 = \frac{R^4(1 - b^*b)}{a^2 a^* Bi^* Bi} = 78,598, \quad (23)$$

$$a_2 = \frac{R^2(a^*Bi^* + Bi)}{a a^* Bi^* Bi} = 261,166, \quad (24)$$

$$k = \frac{Bi b^*}{a^* Bi^*} = 0,0103. \quad (25)$$

Таким образом, уравнение (22) принимает вид

$$78,598 \frac{d^2 \Delta W}{d\tau^2} + 261,166 \frac{d\Delta W}{d\tau} + \Delta W = -0,0103t_c. \quad (26)$$

Решим задачу по минимизации времени сушки. Для ее решения применим принцип максимума [2]. Поскольку уравнение, описывающее систему, имеет второй порядок, то переключений будет два. Численно решим уравнение (26), т. е. промоделируем процесс сушки капсул при максимальном, минимальном и равновесном значении температуры сушильного агента (управление) и найдем моменты переключения управления, которые обеспечат максимально быстрый выход на желаемое влагосодержание. Моделирование будем производить в математическом пакете MATLAB.

Вначале приведем уравнение (22) к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \Delta W = y_1, \Delta W' = y_1' = y_2, \\ \Delta W'' = -\frac{a_2}{a_1} y_2 - \frac{1}{a_1} y_1 - \frac{k}{a_1} t_c. \end{cases} \quad (27)$$

Подставим коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$  и  $k$  в уравнения (27). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \Delta W = y_1, \\ \Delta W' = y_1' = y_2, \\ \Delta W'' = y_2' = -0,0127y_1 - \\ - 3,31y_2 - 1,307 \cdot 10^{-4}t_c. \end{cases} \quad (28)$$

Влагосодержание материала при попадании в зону сушки составляет 0,5 кг/кг, а влагосодержание сухой капсулы – 0,15 кг/кг. Максимально возможная температура теплоносителя для производственной линии достигает 50°C, минимальная температура равна 25°C. Известно, что температурой, равновесной для влагосодержания желатина 0,15 кг/кг, является температура 29,3°C [3]. Таким образом,  $W_{нач} = 0,5$  кг/кг,  $W_{кон} = 0,15$  кг/кг,  $t_{max} = 50^\circ\text{C}$ ,  $t_{равн} = 29,3^\circ\text{C}$ ,  $t_{min} = 25^\circ\text{C}$ .

Для применения модели в приращениях (26) необходимо использовать значения переменных  $W_{нач}$ ,  $W_{кон}$ ,  $t_{max}$ ,  $t_{равн}$ ,  $t_{min}$  в приращениях относительно  $W_{кон}$  для влагосодержания и  $t_{равн}$  для температуры теплоносителя. Тогда  $\delta W_{нач} = 0,35$  кг/кг,  $\delta W_{кон} = 0,0$  кг/кг,  $\delta t_{max} = 20,7^\circ\text{C}$ ,  $\delta t_{равн} = 0^\circ\text{C}$ ,  $\delta t_{min} = -4,3^\circ\text{C}$ .

На рис. 1 приведены результаты численного решения системы уравнений (26) с двумя переключениями управляющего воздействия ( $t_{max} \rightarrow t_{min} \rightarrow t_{равн}$ ).

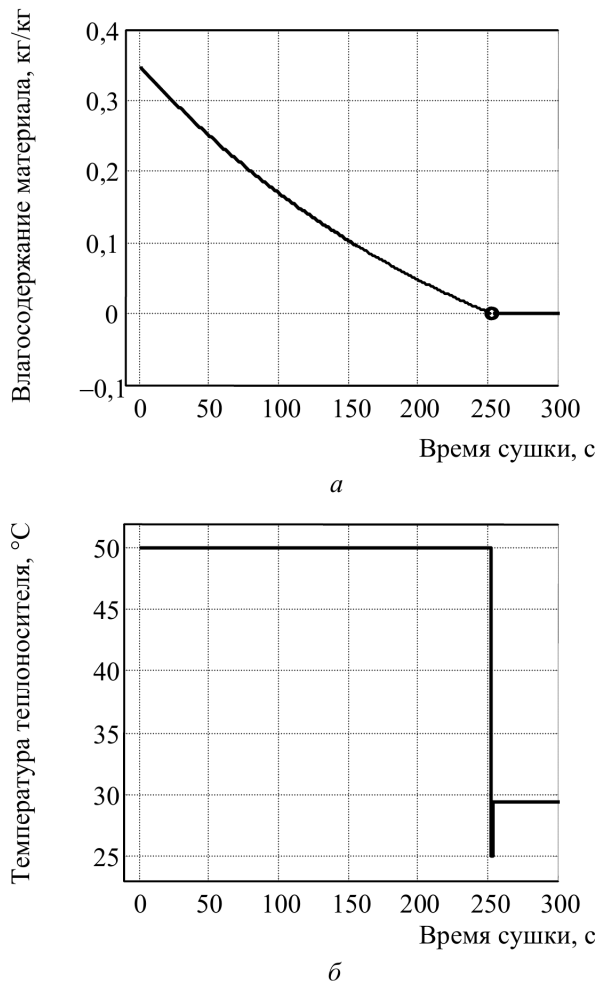


Рис. 1. Изменение влагосодержания материала (а) и температуры сушильного агента (б) при двух переключениях управляющего воздействия

Из графиков на рис. 1 видно, что переключения управляющего воздействия происходит в следующие моменты времени: первое переключение –  $\tau_1 = 253$  с, второе переключение –  $\tau_2 = 254$  с. Таким образом, расчетный период сушки при минимальном значении температуры длится около 1 с. Очевидно, что вследствие большой инерционности тепловых процессов, а также несовершенства технологического оборудования, реализовать на практике такое быстрое переключение уровней управляющего воздействия в виде изменения температуры не представляется возможным. Целесообразно отказаться от первого переключения на минимальное значение температуры, а реализовать только переключение управления на равновесную температуру.

На рис. 2 приведены результаты моделирования с одним переключением управляющего воздействия ( $t_{max} \rightarrow t_{равн}$ ). Из рис. 2 видно, что момент переключения управляющего воздействия  $\tau_1 = 252,988$  с. При этом обеспечивается заданное влагосодержание материала.

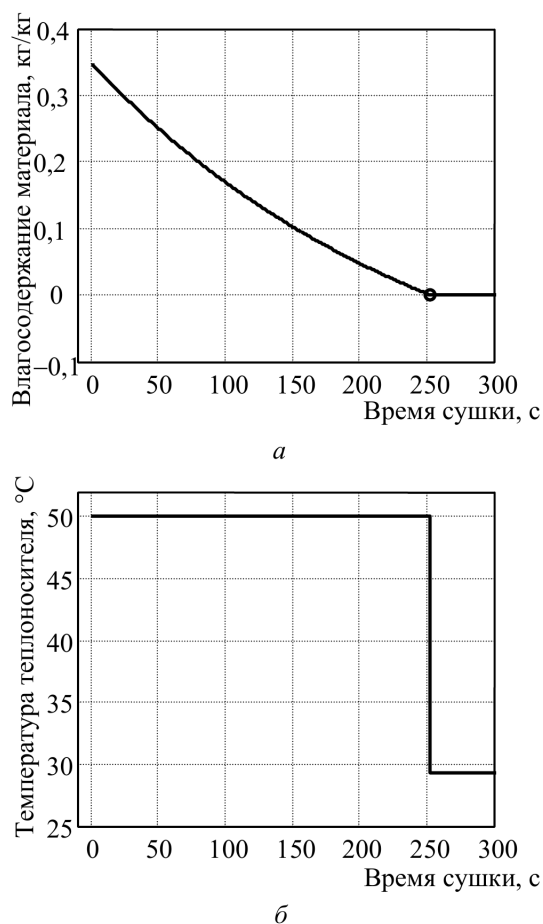


Рис. 2. Изменение влагосодержания материала (а) и температуры сушильного агента (б) при одном переключении управляющего воздействия

Сравнивая процессы изменения влагосодержания материала при управлении с двумя переключениями (рис. 1) и управлении с одним переключением (рис. 2), видно, что результаты данных управлений практически совпадают. Поэтому для практической реализации целесообразно выбрать более простой в реализации вариант с одним переключением.

Из графика на рис. 2 видно, что расчетное время сушки при оптимальном режиме управ-

ления процессом составляет приблизительно 250 с, что позволяет сократить продолжительность сушки ТЖК вдвое по сравнению с реальным временем сушки, которое составляет порядка 600 с.

**Заключение.** Сушка ТЖК – сложный массообменный процесс, характеризующийся многозонностью, большой продолжительностью и значительными энергозатратами. Для улучшения показателей работы данного процесса проведена разработка математической модели упрощенного вида с целью оптимизации динамического режима протекания процесса. Выбран метод оптимизации с использованием принципа максимума, разработан алгоритм и проведен расчет оптимального режима процесса по критерию максимального быстродействия с однократным переключением управляющего воздействия. Это позволит существенно сократить время сушки ТЖК и повысить производительность данного процесса.

#### Литература

1. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 469 с.
2. Бояринов, А. И. Метод оптимизации в химической технологии / А. И. Бояринов, В. В. Кофаров. – М.: Химия, 1969. – 425 с.
3. Розенталь, Е. О. Исследование процесса сушки желатина: автореф. дис. канд. техн. наук / Е. О. Розенталь; Москов. технол. ин-т пищ. пром-сти. – М., 1955. – 14 с.
4. Никитина, Л. М. Таблицы коэффициентов массопереноса влажных материалов / Л. М. Никитина. – Минск: Наука и техника, 1964. – 55 с.
5. Исследование и моделирование температурно-влажностных режимов основных зон процесса сушки твердых желатиновых капсул / В. П. Кобринец [и др.] // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2010. – Вып. XVIII. – С. 146–149.

Поступила 25.02.2011