УДК 532.517

А. М. Волк, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Исследование механики движения вязкой жидкости в пространстве, ограниченном проницаемыми поверхностями, имеет научное и практическое значение. Структура потока в пространстве между поверхностями и в пограничном слое играет важную роль при решении задач тепло- и массообмена и разделении гетерогенных систем. В данной работе выполнено математическое моделирование и исследованы гидродинамические характеристики движения сплошных потоков между движущимися горизонтальными проницаемыми плоскостями. Получено точное решение для уравнения Навье – Стокса, описывающего рассматриваемое движение при постоянной скорости в нормальном направлении, а также зависимости для оценки пограничного слоя и гидродинамические характеристики движения в основном потоке. Найдены интегральные характеристики течения, показано, что направление и интенсивность движения жидкости через проницаемую поверхность имеют существенное значение.

The research of mechanics of viscous fluid motion in the space limited to permeable surfaces has scientific and practical value. The stream structure in the space between surfaces and in the interface is of high importance for the problems solving of heat-and-mass transfer and divisions of heterogeneous systems. The mathematical modeling has been carried out and hydrodynamic characteristics of movement of solid streams between moving horizontal permeable planes have been investigated in this work. The exact solution for the Navier – Stoks equation has been received. This equation is to describe motion under study at constant speed in a normal direction. The relations for estimation of interface and hydrodynamic characteristics of movement in the main flow have been received. The integral characteristics of stream have been found, it has been shown that the direction and intensity movement of fluid through permeable surfaces is of an high value.

Введение. Исследование механики движения вязкой жидкости в пространстве, ограниченном проницаемыми поверхностями, имеет научное и практическое значение. Структуру потока в пространстве между поверхностями и в пограничном слое важно учитывать при решении задач тепло- и массообмена и разделении гетерогенных систем.

При математическом моделировании процессов переноса необходимо принимать во внимание гидродинамические факторы, взаимодействие потоков с ограничивающими поверхностями, отток среды через проницаемую поверхность.

Теоретически исследуются только автомодельные течения с постоянным отсосом или вдувом по всей поверхности.

В работе [1] исследование течения на плоской проницаемой поверхности и в трубе рассматривается в соответствии с теорией пограничного слоя, изложенной Шлихтингом в его монографии [2].

Аналитические решения имеют предпочтение по сравнению с экспериментальными результатами. Они позволяют получить интегральные характеристики течения [3]:

– толщину вытеснения

$$\delta_1 = \int_0^h \left(1 - \frac{W_x}{W_h}\right) dy;$$

– толщину потери импульса

$$\delta_2 = \int_0^h \frac{W_x}{W_h}\left(1 - \frac{W_x}{W_h}\right) dy;$$

– толщину потери энергии

$$\delta_3 = \int_0^h \frac{W_x}{W_h}\left(1 - \frac{W_x}{W_h}\right)^2 dy.$$

Точное аналитическое решение для продольного обтекания плоской пластины с равномерным оттоком исследовано в работах [1, 2]. Движение потока с осевой скоростью U в зависимости от поперечной координаты y описано уравнением

$$U_0 \frac{dU}{dy} = \nu \frac{d^2U}{dy^2}. \quad (1)$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение при известных скоростях оттока U_0 и на бесконечности U_∞:

$$U = U_\infty \left(1 - e^{\frac{U_0 y}{\nu}}\right), \quad U_0 < 0. \quad (2)$$

Для толщины вытеснения и толщины потери импульса соответственно получены значения:

$$\delta_1 = \frac{\nu}{-U_0},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\frac{\nu}{-U_0}.$$

Касательное напряжение τ_0 на стенке не зависит от вязкости:

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{dU}{dy}\right)\Bigg|_{y=0} = \rho(-U_0)U_\infty.$$

Отмечается, что отток значительно увеличивает силу трения с поверхностью, оказывает стабилизирующее действие на ламинарный пограничный слой, вызывает перераспределение профиля скорости, уменьшает степень турбулентности потока. При сильном оттоке силы трения на поверхности не зависят от вязкости, профили скорости становятся близкими к плоским, может наблюдаться полный отток массы, вблизи оси канала появляется зона обратных токов [1, 2].

Математическая модель. Рассмотрим стационарное движение вязкой жидкости в пространстве между проницаемыми плоскостями. Декартовую систему координат *x*, *y* свяжем со второй плоскостью, через которую происходит отток жидкости. Пусть первая плоскость находится на расстоянии *h* от второй и движется с относительной скоростью $\vec{W}_h = \vec{W}_1 - \vec{W}_2$. Ось *x* направим параллельно вектору $\vec{W}_h$, а ось *y* – по нормали к поверхности. Считаем, что движение жидкости в нормальном направлении происходит с постоянной скоростью W_0 (рис. 1).

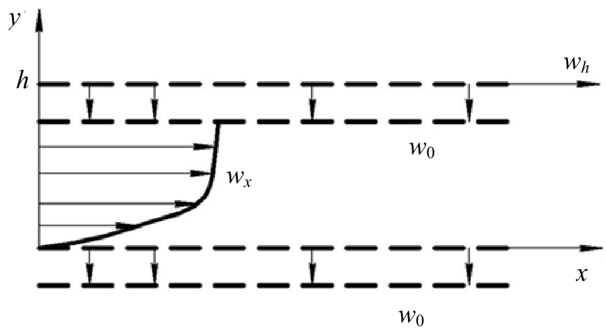

Рис. 1. Схема движения жидкости между проницаемыми плоскостями

В данной системе координат $W_0 < 0$. Уравнение Навье – Стокса для рассматриваемого движения принимает вид [3, 4]

$$W_0 \frac{dW_x}{dy} = \nu \frac{d^2W_x}{dy^2}. \quad (3)$$

Находим его общее решение:

$$W_x = c_1 + c_2 \exp\left(\frac{W_0 y}{\nu}\right). \quad (4)$$

Из граничных условий $W_x\big|_{y=0} = 0$; $W_x\big|_{y=h} = W_h$ определяем произвольные постоянные и получаем

$$W_x = \frac{W_h}{1-\exp\left(\frac{W_0 h}{\nu}\right)}\left[1-\exp\left(\frac{W_0 y}{\nu}\right)\right]. \quad (5)$$

Безразмерный комплекс $\mathrm{Re}_y = |W_0|h/\nu$ является числом Рейнольдса и связывает зависимость продольного течения жидкости с ее движением в нормальном к плоскостям направлении.

Интегрируя распределение скорости, получаем среднее значение продольной составляющей скорости жидкости в пространстве между проницаемыми плоскостями:

$$\overline{W}_x = W_h\left[\frac{1}{1-\exp(-\mathrm{Re}_y)} - \frac{1}{\mathrm{Re}_y}\right]. \quad (6)$$

Находим производную продольной скорости и касательные напряжения сил трения:

$$\frac{dW_x}{dy} = -\frac{W_0 W_h}{\nu[1-\exp(-\mathrm{Re}_y)]}\exp\left(\frac{W_0 y}{\nu}\right), \quad (7)$$

$$\tau = \eta\frac{dW_x}{dy} = -\frac{\rho W_0 W_h}{1-\exp(-\mathrm{Re}_y)}\exp\left(\frac{W_0 y}{\nu}\right). \quad (8)$$

На поверхности с оттоком

$$\tau = -\frac{\rho W_0 W_h}{1-\exp(-\mathrm{Re}_y)}. \quad (9)$$

Если $\mathrm{Re}_y > 5$, то можем принять

$$W_x = W_h\left[1-\exp\left(\frac{W_0 y}{\nu}\right)\right] \text{ и } \overline{W}_x \cong W_h\left(1-\mathrm{Re}_y^{-1}\right).$$

При больших значениях Re_y продольное течение на поверхности с оттоком характеризуется большим градиентом скорости:

$$\frac{dW_x}{dy}\bigg|_{y=0} = -\frac{\rho W_0 W_h}{\nu},$$

а касательные напряжения сил трения незначительно зависят от вязкости.

В этом случае $\tau\big|_{y=0} = -\rho W_0 W_h$.

Принимая $\dfrac{dW_x}{dy}\bigg|_{y=\delta} = 0{,}01$, получим оценку для толщины пограничного слоя:

$$-\frac{W_0 W_h}{\nu}\exp\left(\frac{W_0\delta}{\nu}\right) = 0{,}01;\ \delta = -\frac{\nu}{W_h}\ln\left|\frac{100 W_0 W_h}{\nu}\right|.$$

Построим график скорости (рис. 2) воды в пространстве между движущимися с относительной скоростью 0,5 м/с плоскостями при расстоянии между ними 0,5 м. Нормальную скорость примем равной 0,01 м/с.

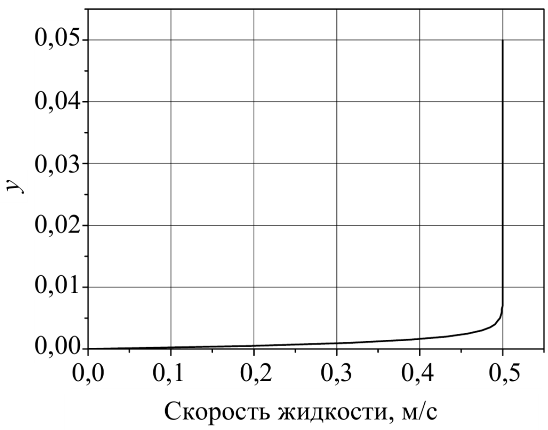

Рис. 2. Скорость жидкости в пространстве между проницаемыми плоскостями

Анализируя полученные результаты можем сделать вывод, что распределение продольной составляющей скорости жидкости в пограничном слое близко к линейному:

$$W_x \cong -\frac{W_0 W_h y}{\nu},$$

а в основном потоке является равномерным: $\bar{W}_x \cong W_h$.

Выполнив интегрирование, находим:

1) толщину вытеснения

$$\delta_1 = -\frac{\nu}{W_0} = \frac{h}{\mathrm{Re}_y};$$

2) толщину потери импульса

$$\delta_2 = -\frac{\nu}{2W_0} = \frac{h}{2\,\mathrm{Re}_y};$$

3) толщину потери энергии

$$\delta_3 = -\frac{5}{6}\frac{\nu}{W_0} = \frac{5h}{6\,\mathrm{Re}_y}.$$

Применяя теорему энергии для плоского ламинарного пограничного слоя, получаем изменения потока энергии на единицу длины в пограничном слое:

$$\frac{d}{dx}\left(W_0^3 \delta_3\right) = 2\nu \int_0^h \left(\frac{\partial W_x}{\partial y}\right)^2 dy \cong \frac{2W_0^2 W_h^2}{\nu}.$$

Такое же значение получается и при использовании теоремы энергии для турбулентного течения в пограничном слое:

$$\frac{d}{dx}\left(W_0^3 \delta_3\right) = 2\int_0^h \frac{\tau}{\rho}\left(\frac{\partial W_x}{\partial y}\right) dy \cong \frac{2W_0^2 W_h^2}{\nu}.$$

Это означает, что возникающие при оттоке жидкости силы трения вызывают большие затраты энергии на нагревание. Данные затраты характеризуют потери, вызванные разделением потоков при относительном движении проницаемых плоскостей и движением среды в нормальном направлении.

Заключение. Полученное точное решение уравнения движения вязкой жидкости в пространстве между проницаемыми плоскостями и найденные гидродинамические характеристики течения показывают, что направление и интенсивность движения жидкости через проницаемую поверхность имеют существенное значение.

Характер течения у поверхности с притоком и в основном потоке определяется вязкостью жидкости, зависит от линейной скорости этой поверхности и интенсивности движения в нормальном направлении. Течение у поверхности с оттоком характеризуется большим градиентом скорости, наличием пограничного слоя. Силы трения на этой поверхности, вообще говоря, не зависят от вязкости жидкости.

Полученная математическая модель с учетом реологических факторов может применяться для анализа процессов разделения многофазных потоков в пространстве, ограниченном проницаемыми поверхностями.

Литература

1. Козлов, Л. Ф. Ламинарный пограничный слой при наличии отсасывания / Л. Ф. Козлов. – Киев: Наукова думка, 1968. – 195 с.

2. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 742 с.

3. Лойтянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойтянский. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

4. Ландау, Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 123 с.

Поступила 28.02.2011