УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Для решения граничных задач с пограничным слоем предлагается вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки. Этот метод позволяет перейти от исходной граничной задачи к совокупности задач Коши. Для решения задач Коши в настоящее время существует целый арсенал хорошо работающих методов. Для каждой задачи Коши получена оценка погрешности. Эти оценки погрешности используются для получения оценки погрешности искомого решения и его градиента.

In the present work boundary problems with small parametre are considered at the senior derivative and with boundary thus boundary or internal transitive layers. For the decision of these problems the variant of a method of differential orthogonal prorace is offered. This method allows to pass from an initial boundary problem to set of problems of Koshi. For the decision of problems of Koshi now there is a whole arsenal of well working methods. For each problem of Koshi the error estimation is received. These estimations of an error are used for reception of an estimation of an error of the required decision and its gradient.

Введение. Область применения граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями все время расширяется: они широко распространены в механике, физике, динамике жидкостей и т. д. Эти задачи очень сложны в вычислительном отношении, кроме того, они требуют более детальной информации о поведении решения вблизи граничных точек. Для решения этих задач нужны методы с хорошими возможностями настройки и регулировки вычислений и с более общими предположениями на входные данные задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что задача (1) имеет один, а задача (2) – два пограничных слоя.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных им физических явлений. Диффузионным членом является член, включающий производную второго порядка, а конвективный член включает производную первого порядка. Задачи такого вида называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости численного процесса.

Для численного решения граничных задач вида (1), (2) с пограничным слоем предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки [1]. Этот метод дает возможность применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

Алгоритм метода дифференциальной ортогональной прогонки.

1. Рассмотрим, например, граничную задачу вида (2). Представим ее в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(x)}{\varepsilon} + \dfrac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \quad 0 < x < 1, \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{3}$$

с граничными условиями вида

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \tag{4}$$

2. При решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) используем процедуру введения множителей $m_2(x, \varepsilon) > 0$, $m_1(x, \varepsilon) > 0$, регулирующих поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$, т. е. самого решения и градиента решения вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и особенно градиент решения неограниченно возрастают [1].

3. Исходную граничную задачу представляем в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $\nu(x)$, причем для функций $Q(x)$ и $u(x)$ имеет место прямой ход прогонки, а для функции $\nu(x)$ – обратный:

$$Q' = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2}\sin 2Q - \left(\frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon} + \frac{m_1}{m_2}\right)\cos^2 Q, \tag{5}$$

$$Q(0) = \frac{\pi}{2};$$

$$u' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2}\cos^2 Q\right]u - \\ - m_2\frac{f}{\varepsilon}\cos Q, \\ u(0) = Am_1(0,\varepsilon); \tag{6}$$

$$\nu' = \left[-\frac{m_2'}{m_2}\sin 2Q + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\cos 2Q + 2\frac{m_1}{m_2}\cos^2 Q - \\ -\frac{m_1}{m_2}\right]u + \left[\frac{m_2'}{m_2}\sin^2 Q - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\sin 2Q\right]\nu + m_2\frac{f}{\varepsilon}\sin Q, \\ \nu(1) = \frac{1}{\cos Q(1)}\left[B - \sin Q(1)\right]u(1),\ \cos Q(1) \neq 0. \tag{7}$$

Оценки погрешности. Интерес представляет получение ошибки, возникающей при численном решении граничных задач типа (1), (2) с пограничным слоем по схеме предлагаемого метода дифференциальной ортогональной прогонки с введением регулирующих множителей $m_1(x,\varepsilon)$ и $m_2(x,\ \varepsilon)$.

При этом каждая задача Коши вида (5)–(7) решается по формулам известных численных методов, например, Рунге-Кутта, Адамса, а также В-устойчивых и Д-устойчивых методов [2]. Получение оценок погрешности при решении уравнений прямого хода (5), (6) не представляет затруднений.

Однако уравнение обратного хода (7) решается уже в новых условиях: вспомогательные функции уже будут вычислены в точках отрезка с ошибками, и весь вопрос сводится к накоплению этих ошибок.

Пусть вспомогательное уравнение (5) решено, и в точках $x_m = mh$ получены приближенные значения величин $Q_m = Q(x_m)$, и пусть погрешности R_m, с которыми найдены эти значения, известны. Искомые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при решении задач по данной схеме рассчитываются по формулам

$$m_1(x,\varepsilon)y_1(x) = \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)\nu(x), \\ m_2(x,\varepsilon)y_2(x) = \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)\nu(x). \tag{8}$$

Для нахождения функции $u(x)$ решается задача Коши (6) в направлении от 0 до 1; а $\nu(x)$ – в обратном направлении от 1 до 0.

Обозначим

$$\varphi(x,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2}\cos^2 Q\right], \\ \phi(x,\varepsilon) = -m_2\frac{f(x)}{\varepsilon}\cos Q; \tag{9}$$

следовательно, уравнение (6) примет вид

$$u' = \varphi(x,\varepsilon)u + \phi(x,\varepsilon), \\ u(0) = Am_1(0,\varepsilon). \tag{10}$$

Считаем, что приближенные значения величин $u(x_m)$ вычислены, а значения u_{m+1} рассчитываются по следующей формуле:

$$u_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} a_{-\lambda}u_{m-\lambda} + h\sum_{\lambda=0}^{k} b_{-\lambda}\left\{\varphi_{m-\lambda}u_{m-\lambda} + \phi_{m-\lambda}\right\}.$$

Погрешность $\varepsilon_m = u(x_m) - u_m$ известна. Это погрешность, с которой вычисляются значения u_m. Она зависит от погрешности последней формулы, погрешности округления и погрешности начальных данных.

Введем в рассмотрение формулу

$$\tilde{u}_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} a_{-\lambda}\tilde{u}_{m-\lambda} + h\sum_{\lambda=0}^{k} b_{-\lambda}\left\{\tilde{\varphi}_{m-\lambda}\tilde{u}_{m-\lambda} + \tilde{\phi}_{m-\lambda}\right\},$$

где $\tilde{\varphi}_{m-\lambda}$ и $\tilde{\phi}_{m-\lambda}$ будут рассчитываться с систематическими ошибками. Интересен процесс накопления этих ошибок в решении $u(x)$. Пусть $\gamma_m = \tilde{u}_m - u_m$, $\Gamma_m = u(x_m) - \tilde{u}_m$, $\varepsilon_m = u(x_m) - u_m$. Справедливой будет оценка

$$\left|\Gamma_m\right| \le \left|\varepsilon_m\right| + \left|\gamma_m\right|. \tag{11}$$

Эта оценка будет очевидной при предварительном нахождении оценки γ_m.

Если $n = 1$, то получим $\gamma_1 = h\Delta_1$.

Если $n = 2$, то имеем

$$\gamma_2 = A(1)\beta_1 h\Delta_1 + h\sum_{\nu=1}^{2} a_\nu(2)\Delta_\nu.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\gamma_n = h\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(n)\Delta_1 + \\ + h\sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\nu_1\ldots\nu_q} A(\nu_{q-1} - \nu_q)\beta_{\nu_1}\ldots\beta_{\nu_q}\sum_{\nu=1}^{\nu_q} a_\nu(\nu_q)\Delta_j.$$

Пусть $\left|A(n-\tau) \le A\right|$, $\left|\beta_\tau\right| \le \beta$. Для получения суммы, аналогичной внутренней предыдущей сумме, воспользуемся оценкой М. Р. Шура-Бура:

$$\sum_{\nu<\nu_q<\ldots\nu_1<n}^{n} \left|A(n-\nu_1)\ldots A(\nu_{q-1} - \nu_q)\,\beta_{\nu_q}\right| \le C_{m-\nu}^{q} A^q \beta^q, \tag{12}$$

$$\Delta_\nu = \sum_{\lambda=0}^{k} b_{-\lambda}\left\{\tilde{u}_{\nu-\lambda-1}C_{\nu-\lambda-1} + D_{\nu-\lambda-1}\right\}, \tag{13}$$

$$\left|a_\nu(m)\right| \le \vec{a}, \quad \left|\Delta_\nu\right| \le \Delta. \tag{14}$$

Погрешности C_ν и D_ν получаются в результате накопления ошибок при решении задач Коши вида (5), (6).

Вычислив значения функций $Q(x)$ и $u(x)$ как решение задач Коши в прямом ходе метода дифференциальной ортогональной прогонки, будем находить функцию $\nu(x)$ как решение задачи Коши, но уже для обратной прогонки.

Повторяя аналогичные рассуждения, получим уравнение (7) в виде

$$\nu' = \eta(x,\varepsilon)\nu + \xi(x,\varepsilon)$$

с начальными условиями

$$\nu(1) = \frac{1}{\cos Q(1)}\left[B - \sin Q(1)\right]u(1),\ \cos Q(1) \neq 0.$$

Считаем, что приближенные значения ν_m величин $\nu(x_m)$ вычисляются по формуле

$$\nu_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} a_{-\lambda}\nu_{m+\lambda} + h\sum_{\lambda=0}^{k} b_{-\lambda}\left\{\eta_{m+\lambda}\nu_{m+\lambda} + \xi_{m+\lambda}\right\}.$$

Пусть оценка ошибки $\varepsilon_m^* = \nu(x_m) - \nu_m$ известна. Обозначим $\tilde{\delta} = \tilde{\nu}_m - \nu_m$, где $\tilde{\nu}_m$ рассчитываются по последней формуле, в которой величины $\tilde{\eta}_{m+\lambda}$ и $\tilde{\xi}_{m+\lambda}$ уже найдены с ошибками. Тогда справедлива оценка

$$\left|\Delta_m\right| \le \left|\varepsilon_m^*\right| + \left|\delta_m^*\right|.$$

Для оценки δ_m проводятся те же рассуждения, что для функции $u(x)$ и для оценки γ_m. На основании этого получим

$$\left|\delta_m\right| \le \frac{\vec{a}}{\eta A}\left[(1+\eta A h)^m - 1\right]\delta,$$

где $\delta_{N-m-k} = \tilde{\delta}_m, \left|\eta(x,\varepsilon)\right| \le \eta, \left|\delta_\nu\right| \le \delta$. И уравнение, аналогичное формуле (13), примет следующий вид:

$$\Delta_\nu = \sum_{\lambda=0}^{k} b_{-\lambda}\left\{\tilde{\nu}_{\nu-\lambda-1}C^*_{\nu-\lambda-1} + D^*_{\nu-\lambda-1\}}\right\}.$$

Окончательно запишем

$$\left|\Delta_{N-k-m}\right| \le \left|\varepsilon^*_{N-k-m}\right| + \left|\delta_m^*\right|.$$

Таким образом, получены оценки: для значений $Q(x,\varepsilon)$ – оценка R_m; для значений $u(x,\varepsilon)$ – оценка Γ_m и, наконец, для значений $\nu(x,\varepsilon)$ – оценка Δ_m. Осталось найти погрешности для значений $\tilde{y}_{1,m}$ и $\tilde{y}_{2,m}$ по формулам (8):

$$E_m = \tilde{y}_m - \tilde{y}(x_m,\varepsilon) =$$
$$= 2\sin\frac{R_m}{2}\left[y_1(x_m,\varepsilon)\sin\frac{R_m}{2} + y_2(x_m,\varepsilon)\cos\frac{R_m}{2}\right] +$$
$$+ \Gamma_m \sin\tilde{Q}_m + \Delta_m\cos\tilde{Q}_m + \rho_m,$$
$$E'_m = \tilde{y}'_m - \tilde{y}'(x_m,\varepsilon) =$$
$$= 2\sin\frac{R_m}{2}\left[y_1(x_m,\varepsilon)\cos\frac{R_m}{2} + y_2(x_m,\varepsilon)\sin\frac{R_m}{2}\right] +$$
$$+ \Gamma_m \cos\tilde{Q}_m - \Delta_m\sin\tilde{Q}_m + \rho'_m.$$

Здесь ρ_m и ρ'_m – погрешности округлений при вычислении значений $\tilde{y}_{1,m}$ и $\tilde{y}_{2,m}$.

Заключение. Предложенная модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки достаточно перспективна для решения граничных задач с пограничным слоем.

Литература

1. Соловьева, И. Ф. Решение систем линейных о. д. у. второго порядка с различными расположениями пограничных слоев // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 1999. – Вып. VII. – С. 24–29.

2. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.

Поступила 02.03.2011