ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

В. М. Марченко, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики (БГТУ); **И. К. Асмыкович**, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

Рассматривается проблема аналитического представления решений линейных дескрипторных систем с запаздывающим аргументом. При некоторых предположениях дескрипторная система сводится к гибридной системе специального вида, что позволяет получить интегральное представление решений дескрипторной системы. Дается представление решений рассматриваемой дескрипторной системы в виде ряда по решениям определяющих уравнений соответствующей гибридной системы.

The paper considers the problem of an analytical representation for solutions of linear descriptor time-delay systems. Under some assumptions, we reduce such a system to a special hybrid system with delay and, as a result, we obtain an integral representation for solutions of the descriptor system. Using the defining equation techniques developed for the hybrid system, we give a series representation for solutions of the descriptor system under consideration.

Введение. Активное изучение в качественной теории управления динамическими системами математических моделей, в которых наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости, продолжается в течение последних 30 лет. Системы, которые описывают такие процессы, носят различные наименования, из которых выделим сингулярные [2, 3, 8, 12], дескрипторные [5, 7, 10, 15] и дифференциально-алгебраические (DAE) [6, 11, 13]. Теория таких систем в регулярном случае развита достаточно полно, им посвящено более 1000 работ. Для них предложены различные формы явной и неявной записи решений, изучена зависимость решений от начальных условий и разобраны классы совместимых начальных условий для регулярных систем, рассмотрены задачи управляемости, наблюдаемости и двойственности [8]. Большое число работ посвящено исследованию структуры дескрипторных систем [4, 8, 15], в частности задачам стабилизации, модального управления, расщепимости, регуляризации и нормализации, и изучению влияния линейной обратной связи на качественные характеристики систем. Необходимость учета влияния эффекта запаздывания, часто возникающего в прикладных задачах, приводит к дескрипторным системам с запаздыванием [2–14], которые изучены гораздо слабее. Вопрос об аналитическом представлении их решений был поставлен в монографии [1], где было отмечено существенное отличие таких систем от невырожденного случая. Для дескрипторных систем в конкретных частных случаях описаны представления решения [2, 3, 6, 8, 13], в частности, для гибридных систем [6], рассмотрены задачи стабилизации [5, 7, 14], особенно подробно для двумерных систем [7]. Был разработан специальный разрешающий оператор [13], позволяющий свести систему к обыкновенной, и предложен алгоритм вычисления переходной матрицы-функции [12].

Постановка задачи. Предварительные результаты. Рассмотрим объект управления, описываемый дескрипторной дифференциально-разностной системой с запаздыванием вида

$$S\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), \qquad (1)$$

где S – постоянная $n \times m$-матрица с $\det S = 0$, если $n = m$; $x(t) \in R^m$ – фазовый вектор, $t \in [t_0, +\infty)$, $\tau > 0$; $f(t, x, y, z)$ есть отображение $R^+ \times R^m \times R^m \times R^r \to R^n$; $u(t) \in R^r$ – управляющее воздействие, достаточное число раз дифференцируемое. Начальные условия заданы таким

*Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/00.2011).

образом, чтобы система имела единственное решение. Поскольку в практических исследованиях обычно систему линеаризуют вдоль изучаемых режимов, то в общем случае получаем линейную дескрипторную функционально-дифференциальную систему с последействием нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-\int_{-h}^{0} d_s G(t,s)x(t+s)\right)= \\ =\int_{-h}^{0} d_s A(t,s)x(t+s)+ \\ +\int_{-h}^{0} d_s B(t,s)u(t+s),\ t\ge t_0. \tag{2}$$

Здесь $G(t,s)$, $A(t,s)$, $B(t,s)$ – матрицы-функции соответствующих размеров с ограниченным изменением по второму аргументу на промежутке $[-h,0]$; h – некоторое положительное число; $u(\cdot)$ – управляющее внешнее воздействие.

В работе [8] изучен вопрос о разрешимости дескрипторной системы с запаздыванием в простейшей форме

$$S\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-h)+f(t) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x_{t_0}=\varphi(\tau)\in C([-h,0],R^n),\ \ \tau\in[-h,0), \tag{4}$$

где S – постоянная $n\times n$ особая матрица с $rank S=m$; A, A_1 – постоянные матрицы, $h>0$.

Эта система является гибридной, т. е. обычно она содержит как дифференциально-разностные, так и алгебраические уравнения.

Выполнив правые и левые элементарные преобразования над матрицей S, можно получить ее каноническую форму Смита в виде

$$T_1SG_1=\begin{bmatrix} I_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

где T_1, G_1 – невырожденные матрицы.

Тогда умножив систему (3) слева на матрицу T_1 одновременно с заменой переменных $x=G_1y$, получим следующую формулу:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\dot{y}(t)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}+ \\ +\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t-h)\\ y_2(t-h)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Выполнив аналогичные преобразования с матрицей A_{22} и матрицей в правом нижнем углу новой системы при $z_3(t-h)$, запишем исходную систему в виде [8]

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{z}_1(t)\\ \dot{z}_2(t)\\ \dot{z}_3(t)\\ \dot{z}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\ B_{21} & I_2 & 0 & 0\\ B_{31} & 0 & 0_3 & 0\\ B_{41} & 0 & 0 & 0_4\end{bmatrix}\times \\ \times\begin{bmatrix} z_1(t)\\ z_2(t)\\ z_3(t)\\ z_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24}\\ C_{31} & C_{32} & I_3 & 0\\ C_{41} & C_{42} & 0 & 0_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t-h)\\ z_2(t-h)\\ z_3(t-h)\\ z_4(t-h)\end{bmatrix}+ \\ +\begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ f_3(t)\\ f_4(t)\end{bmatrix}, \tag{6}$$

где векторы $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$ имеют размерности m_1, m_2, m_3, m_4, а все подматрицы имеют соответствующие согласованные размеры. Аналогичным преобразованиям подвергаются начальные условия исходной системы.

Выдвигая различные предположения о соотношениях между числами m_1, m_2, m_3, m_4, а также о конкретных видах матриц B_{ij}, C_{ij}, получен ряд достаточных условий существования решений системы (3), единственности решений, а также соотношения, обеспечивающие совместимость начальных условий (4) для разрешимости исходной системы. Например, пусть в (6)

$$m_3=0,\ m_4=0. \tag{7}$$

Тогда имеем систему

$$\begin{cases}\dot{z}_1(t)=B_{11}z_1(t)+B_{12}z_2(t)+C_{11}z_1(t-h)+\\ +C_{12}z_2(t-h)+f_1(t),\\ 0=B_{21}z_1(t)+z_2(t)+C_{21}z_1(t-h)+\\ +C_{22}z_2(t-h)+f_2(t),\end{cases} \tag{8}$$

и при выполнении условий совместимости

$$0=B_{21}\varphi_1(0)+\varphi_2(0)+C_{21}\varphi_1(-h)+ \\ +C_{22}\varphi_2(-h)+f_2(t_0) \tag{9}$$

данная система имеет единственное решение [8].

Аналогично могут быть записаны достаточные условия отсутствия непрерывно-дифференцируемого решения системы (6), а также требования к функции $f_i(t)$ и начальные условия, при которых такие решения существуют. Но данный метод обладает тем недостатком, что для получения вышеотмеченных условий необходимо проведение достаточно громоздких преобразований. Достоинством же предложенной методики является отсутствие любых предположений типа регулярности, а также возможность перенесения полученных результатов на системы со многими запаздываниями, а также на системы с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.

Основной результат. Получим явные формулы решения управляемой дескрипторной дифференциально-разностной системы с запаздыванием вида

$$H\dot{z}(t) = Az(t) + A_1 z(t-h) + Bu(t) \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$Hz(+0) = Hz(0) = Hz_0 \in R^n,\ A_1 z(\tau) = A_1\varphi(\tau),\quad \tau \in [-h, 0), \qquad (11)$$

где H – постоянная $l \times l$ особая матрица с $rankH = n, n < l;$ A, A_1, B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $h > 0.$ Эта система является гибридной, т. е. она содержит как дифференциально-разностные, так и алгебраические уравнения.

Известно [8], что существуют невырожденные матрицы S и P такие, что

$$SHP = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Умножим обе части системы (10) слева на матрицу S и выполним замену переменной $z(t) = Pw(t).$ Получим

$$SHP\dot{w}(t) = SAPw(t) + SA_1Pw(t-h) + SBu(t). \qquad (13)$$

Введем обозначения

$$w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},\ SAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix},\quad SA_1P = \begin{bmatrix} A^1{}_{11} & A^1{}_{12} \\ \overline{A}^1_{21} & \overline{A}^1_{22} \end{bmatrix}, SB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где $x(t) - n -$ вектор; $y(t) - l - n -$ вектор.

Перепишем систему (13) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + A^1{}_{11}x(t-h) + \\ + A^1{}_{12}y(t-h) + B_1u(t), \\ 0 = \overline{A}_{21}x(t) + \overline{A}_{22}y(t) + \overline{A}^1_{21}x(t-h) + \\ + \overline{A}^1_{22}y(t-h) + \overline{B}_2u(t). \end{cases} \qquad (15)$$

Допустим, что

$$\det \overline{A}_{22} \neq 0. \qquad (16)$$

Тогда получим гибридную систему [4, 6]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + A^1{}_{11}x(t-h) + \\ + A^1{}_{12}y(t-h) + B_1u(t), \\ y(t) = -\overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}_{21}x(t) - \overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}^1_{21}x(t-h) - \\ - \overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}^1_{22}y(t-h) - \overline{A}_{22}^{-1}\overline{B}_2u(t), \end{cases}$$

которую перепишем в нормальной форме [4, 6]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + A^1{}_{11}x(t-h) + \\ + A^1{}_{12}y(t-h) + B_1u(t), \\ y(t) = A_{21}x(t) + A^1{}_{21}x(t-h) + \\ + A^1{}_{22}y(t-h) + B_2u(t). \end{cases} \qquad (17)$$

Известно [4, 6], что система (17) при любых начальных условиях вида

$$x(+0) = x_0 \in R^n,\ x(\tau) = \varphi(\tau),\ y(\tau) = \psi(\tau),\quad \tau \in [-h, 0) \qquad (18)$$

имеет единственное решение.

Утверждение 1. Решение $x(t) = x(t, 0, x_0, \varphi, \psi, u),$ $t \geq 0,$ $y(t) = y(t, 0, x_0, \varphi, \psi, u),$ $t \geq 0,$ системы (17), (18) существует единственно и может быть вычислено по следующей формуле (обобщенная формула Коши):

$$x(t) = x(t,\ 0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ u) = \int_0^t (X_x^*(t-\tau)B_1 + $$

$$+ Y_x^*(t-\tau)B_2)u(\tau)d\tau + x(t,\ 0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ u), t \geq 0$$

с начальными условиями

$$X_x^*(0) = X^*(0) = I_n,$$

$$y(t) = y(t,\ 0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ u) = \int_0^t (X_y^*(t-\tau)B_1 + $$

$$+ Y_y^*(t-\tau)B_2)u(\tau)d\tau + \sum_{j=0}^{T_t} Z_y^*(jh)B_2u(t) + $$

$$+ y(t,\ 0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ u), t \geq 0$$

с начальными условиями

$$X_y^*(0) = X^*(0) = A_{21}, Z_y^*(0) = Z^*(0) = I_m,$$

где матрицы-функции $X^*(.), Y^*(.), Z^*(.)$ являются решениями сопряженной системы

$$\frac{dX^*(t)}{dt} + X^*(t)A_{11} + Y^*(t)A_{12} + $$

$$+ X^*(t-h)A_{11}^1 + Y^*(t-h)A_{12}^1 = 0,\ t \geq 0,\ t \neq kh;$$

$$Y^*(t) = X^*(t)A_{21} + X^*(t-h)A_{22} + Y^*(t-h)A_{12}^1,\ t \geq 0,$$

$$X^*(kh) - X^*(kh-0) = Z^*(kh)A_{22}^1,$$

$$Z^*(kh) = Z^*((k-1)h)A_{22}^1,$$

причем $X^*(t) = 0, Y^*(t) = 0, Z^*(t) = 0,\ t < 0.$

Такое представление справедливо для нестационарных гибридных систем, а значит, и для нестационарных дескрипторных систем при выполнении аналога условия (16).

В качественной теории управления динамическими системами с отклоняющимся аргументом широко используется определяющее уравнение [4, 6], которое позволяет записывать решения систем в виде рядов по решениям определяющего уравнения.

Утверждение 2. Решение $x(t), y(t)$ системы (17), (18) существует единственно и может быть вычислено по формулам

$$x(t) = x(t,\ 0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ u) = x(t,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i \\ (t-ih>0)}} X_{k+1}^{1}(ih) \int_0^{t-ih} \frac{(t-\tau-ih)^k}{k!} u(\tau) d\tau + \sum_{\substack{i \\ (t-ih\geq 0)}} X_0^1(ih) u(t-ih), \tag{19}$$

$$y(t) = y(t,\ 0,\ x_0,\ \varphi, \psi,\ u) = y(t,\ x_0,\ \varphi, \psi,\ 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i \\ (t-ih>0)}} X_{k+1}^{2}(ih) \int_0^{t-ih} \frac{(t-\tau-ih)^k}{k!} u(\tau) d\tau + \sum_{\substack{i \\ (t-ih\geq 0)}} X_0^2(ih) u(t-ih),$$

где $x(t,\ x_0,\ \varphi, \psi,\ 0), y(t,\ x_0,\ \varphi, \psi,\ 0)$ – решение системы (17), (18) в случае нулевого управляющего воздействия: $u(t) \equiv 0, t > 0$; матричные функции $X_k^{\nu}(t)$, $\nu = 1, 2$, являются решением определяющих уравнений вида

$$X_{k+1}^1(t) = A_{11} X_k^1(t) + A_{12} X_k^2(t) + A_{11}^1 X_k^1(t-h) + A_{12}^1 X_k^2(t-h) + B_1 U_k(t),$$

$$X_k^2(t) = A_{21} X_k^1(t) + A_{21}^1 X_k^1(t-h) + A_{22}^1 X_k^2(t-h) + B_2 U_k(t),\ k = -1, 0, 1, \ldots; t \geq 0$$

с начальными условиями $X_k(t) = 0$, $Y_k(t) = 0$, если $k < 0$, или $t < 0$; $U_0(0) = I_r$, $U_k(t) = 0$, если $k^2 + t^2 \neq 0$.

Заключение. Поскольку решения стационарных ГДР-систем вида (17) имеют рост не выше чем экспоненциальный при аналогичном росте управляющих воздействий, то аналогичное свойство имеет место и для решений дескрипторных дифференциально-разностных систем при выполнении условия (16), что позволяет применять к таким системам преобразование Лапласа.

Литература

1. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

2. Kociecki, M. On solutions of singular equations with delays / M. Kociecki // V Polish-English on «Real-time procese control» Radziejowice. – Warsaw, 1986. – P. 227–235.

3. Campbell, S. L. Singular systems of differential equations with delays / S. L. Campbell // Applicable analysis. – 1980. – Vol. 11, № 2. – P. 129–136.

4. Марченко, В. М. Вполне регулярные системы с последействием / В. М. Марченко // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 7. – С. 98–105.

5. Асмыкович, И. К. О задачах качественной теории управления для дескрипторных систем с запаздыванием / И. К. Асмыкович // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 1997. – Вып. V. – С. 3–14.

6. Марченко, В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Докл. РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465–469.

7. Марченко, В. М. К вопросу об устойчивости дескрипторных систем с запаздыванием / В. М. Марченко, И. М. Борковская, А. А. Якименко // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. / ЯГТУ. – Ярославль, 2010. – Вып. 7. – С. 34–39.

8. Li, Y. Basic theory of singular systems of linear differential difference equations / Y. Li, Y. Liu // Preprints of the 13th World Congress IFAC, San Francisco, USA, 30th June – 5th Jule 1996 / V.D. – San Francisco, 1996. – P. 79–84.

9. Власенко, Л. А. Теоремы существования и единственности для одного неявного дифференциального уравнения с запаздыванием / Л. А. Власенко // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 5. – С. 624–628.

10. Игнатенко, В. В. Управляемость линейных дескрипторных систем с запаздыванием / В. В. Игнатенко, В. В. Крахотко // Вестник БГУ. Сер. I. – 1993. – № 3. – С. 70–73.

11. Крахотко, В. В. Н-управляемость каузальных дифференциально-алгебраических динамических систем / В. В. Крахотко, Г. М. Размыслович // Вестник БГУ. Сер. I. – 2006. – № 1. – С. 123–125.

12. Размыслович, Г. П. Алгоритм вычисления передаточной матрицы для сингулярных систем с запаздыванием / Г. П. Размыслович // Вестник БГУ. Сер. I. – 1996. – № 1. – С. 52–54.

13. Щеглова, А. А. Левый регуляризирующий оператор для алгебро-дифференциальной системы с запаздыванием / А. А. Щеглова // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 4(491). – С. 73–85.

14. Pandolfi, L. Generalized control systems, boundary control systems and delayed control systems / L. Pandolfi // Math. Control Systems. – 1990. – № 3. – P. 165–181.

15. Марченко, В. М. О структуре дескрипторных систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2004. – Вып. XII. – С. 3–6.

Поступила 28.02.2011