ЛИТЕРАТУРА

1. Гашков, С. Б. Системы счисления и их применение. М.: МЦНМО, 2004. 52 с.
2. Шень, А. Игры и стратегии с точки зрения математики. М.: МЦНМО, 2008. 40 с.
3. Теория Шпрага-Гранди. Ним. [Электронный ресурс] / MAXimal. – 2014. / Режим доступа: http://e-maxx.ru/algo/sprague_grundy#2. Дата доступа: 25.03.2017.
4. Фролов И.С. Введение в теорию комбинаторных игр. 2012. 202 с.

УДК 004.021

Студ. А.Н. Зайцев
Науч. рук. асс. Т.Г. Шагова
(кафедра высшей математики, БГТУ)

МЕТОДЫ СГЛАЖИВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В современном мире огромная часть информации представлена в виде изображений. И часто бывает, что на изображениях имеются различного вида искажения. Одним из видов искажения является эффект «зубчатости». Мало того, что данный эффект портит впечатление от изображения из-за неровных краёв, зубчатость крайне негативно сказывается, например, на оптическом распознавании символов. Именно поэтому в данном случае следует применять алгоритмы сглаживания.

Для сглаживания применяют следующие сглаживающие фильтры: фильтр Гаусса, медианный фильтр, обобщённый медианный фильтр, билатеральный фильтр, нелокальный фильтр, морфологический фильтр.

Самые простые фильтры - основанные на матрицах свёртки. Матрица свёртки – это матрица коэффициентов, на которую «умножается» значение пикселей изображения для получения требуемого результата. Пример свёрточного фильтра следующий:

$$\underset{\text{Входное изображение}}{\begin{pmatrix} 12 & 14 & 41 \\ 43 & 84 & 24 \\ 2 & 1 & 43 \end{pmatrix}} \times \underset{\text{Матрица}}{\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 1{,}0 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}75 & 0{,}5 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 * 0{,}5 + 14 * 0{,}75 + 41 * 0{,}5 + \\ 43 * 0{,}75 + 84 * 1{,}0 + 24 * 0{,}75 + \\ 2 * 0{,}5 + 1 * 0{,}75 + 43 * 0{,}5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\mathrm{div}} = 31{,}41667,$$

где div = 6.

Фильтр Гаусса основывается на том, что матрица свёртки заполняется по закону распределения Гаусса. Стоит отметить, что результат работы фильтра будет напрямую зависеть от размера ядра фильтра, то есть матрицы свертки: чем больше размер ядра, тем качественнее будет размытие, но тем дольше работает фильтр. Рассмотрим пример матрицы свёртки, заполненной по закону распределения Гаусса (табл. 1):

0,000789	0,006581	0,013347	0,006581	0,000789
0,006581	0,054901	0,111345	0,054901	0,006581
0,013347	0,111345	0,225821	0,111345	0,013347
0,006581	0,054901	0,111345	0,054901	0,006581
0,000789	0,006581	0,013347	0,006581	0,000789

Таблица 3

Асимптотика фильтра Гаусса: O(hi*wi*n*n), где hi, wi – размеры изображения, n – размер матрицы (ядра фильтра). Наиболее часто используются ядра размером 3х3, 5х5, 9х9, 11х11. Применение ядер с более крупным размером не даёт значительного прироста качества, но приводит к существенному увеличению ресурсоёмкости вычислений. Фильтр Гаусса может быть представлен в следующем виде:

$$G_0(x, y) = Ae^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{-(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

где μ – это математическое ожидание, σ^2 является дисперсией (по каждой из переменной x и y).

Медианный фильтр.

Медианный фильтр обычно используется для уменьшения шума или «сглаживания» изображения. Фильтр работает с матрицами различного размера, но в отличие от матрицы свёртки, размер матрицы влияет только на количество рассматриваемых пикселей.

Алгоритм медианного фильтра следующий:

Для текущего пикселя, пиксели, которые «попадают» в матрицу, сортируются, и выбирается средние значение из отсортированного массива. Это значение и является выходным для текущего пикселя. Особенно хорошо медианный фильтр показывает себя на импульсных шумах: если в целом у нас изображение качественное, но только на некоторых пикселях наше изображение искажено, то медианный фильтр просто усреднит данный пиксель согласно его соседям. Асимптотика медианного фильтра: O(hi * wi * n *n), где hi, wi – размеры изображения, n – размер матрицы (ядра фильтра). Рекомендуемый размер ядер такой же, как и у фильтра Гаусса.

Билатеральный фильтр – нелинейный фильтр, выполняющий пространственное усреднение в пределах своей маски. Идея крайне похожа на предыдущие фильтры, но билатеральный фильтр также учитывает разность весов пикселей. Он может быть выбран в качестве эффективной техники удаления шума и ряда других искажающих факторов. Важным вопросом при работе с билатеральным фильтром является выбор его параметров, которые влияют на эффективность фильтрации. Пример работы билатерального фильтра можно видеть на (Рис. 1 и Рис. 2):

Рисунок 13

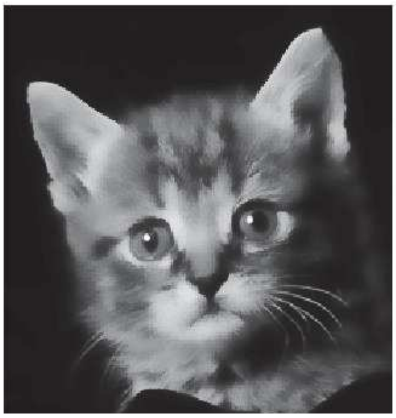

Рисунок 12

На практике в первую очередь выбор фильтра зависит от требований к ресурсоёмкости вычислений. Если требуется простой фильтр, который будет работать быстро, пусть и с меньшим качеством, то выбирается фильтра Гаусса или медианный фильтр с малым размером ядра. Шум в основном пропадает и обеспечивается приемлемое качество изображения. Если же вычислительная сложность не имеет большого значения (например, обработка фотографий в профессиональных программах), то выбираются в основном различные модификации билатеральных фильтров с большим размером ядра или даже нелокальные билатеральные фильтры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матричные фильтры обработки изображений [Электронный ресурс] / Habrahabr. — 2017. / Режим доступа: https://habrahabr.ru/post/142818/. — Дата доступа: 25.03.2017.
2. Median filter [Электронный ресурс] / Wikipedia. — 2017. / Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Median_filter. — Дата доступа: 25.03.2017.
3. Image analysis [Электронный ресурс] / Wikipedia. — 2017. / Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Image_analysis. — Дата доступа: 25.03.2017.
4. Bilateral Filtering for Gray and Color Images [Электронный ресурс] / homepages.inf.ed.ac.uk. — 2017. / Режим доступа: http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL_COPIES/MANDUCHI1/Bilateral_Filtering.html. — Дата доступа: 25.03.2017.

УДК 514.74

Студ. Д.А.Байгазин
Науч. рук. доц. И.М.Борковская
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Человека всегда окружали линии: линия горизонта, береговая линия, линия изгиба реки и т.д. Кривые можно увидеть в разнообразных объектах нашего мира – от листьев и цветов, расположения семечек в подсолнухе до траекторий движения точек в природе и технике. Линии могут описываться в декартовой прямоугольной системе координат алгебраическими уравнениями первой, второй и некоторых высших степеней. Часто линии удобно задавать параметрическими уравнениями либо уравнениями в полярной системе координат. Аристотель говорил: «Математика выявляет порядок, симметрию и определенность, а это – важнейшие виды прекрасного». Глядя на изображения некоторых кривых, их симметрию и красоту, убеждаешься в том, что математика раскрывает красоту окружающего нас мира. Остановимся на некоторых замечательных кривых, которые в силу своих свойств получили известность. Итак, начнем.