УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ТРЕХМЕРНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ДОПУСКАЮЩИЕ НЕКАНОНИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ

Цель работы – описание трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих неканонические связности, и инвариантных аффинных связностей на таких пространствах. В работе определены основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, симметрическое пространство. Приведено в явном виде локальное описание трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих неканонические связности. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны также в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят главным образом локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: каноническая связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC SPACES, ADMITS UNCANONICAL CONNECTIONS

The purpose of the work is the description of three-dimensional symmetric homogeneous spaces, admits uncanonical connections, invariant affine connections on those spaces. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an affine connection, curvature and torsion tensors, a symmetric space are defined. The local description of three-dimensional symmetric homogeneous spaces, admitting uncanonical connections, is given. The local classification of such spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces are described. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as the compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Key words: canonical connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.

Введение. Нетривиальные геометрические структуры, а в работе речь идет о нетривиальных связностях, часто возникают при решении физических уравнений. В физических моделях, как правило, пространство, в котором мы живем, является многообразием. Для описания движения и взаимодействия различных физических объектов в пространстве необходимо задание дополнительных структур на многообразии. Такими структурами, в частности, являются связности, физическая интерпретация которых зависит от конкретной модели. Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см., например, [1]). Каноническая связность – это единственная аффинная связность, которая инвариантна относительно симметрий, она всегда существует на симметрическом пространстве; подробнее о канонической связности можно узнать из литературы (см., например, [2]). Канонические связности на трехмерных симметрических пространствах рассматривались в работе [3], в данной работе также изучаются трехмерные симметрические однородные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах, допускающих неканонические связности. В статье определяется, при каких условиях нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, а также при каких условиях ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности.

1. Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [4]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [5]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2]. Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ для $\bar{G}$. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}},$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Тензоры кривизны и кручения играют важную роль в геометрии, их обращение в нуль является критерием локальной тривиальности связности.

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется *канонической связностью* для $(\bar{G}, G, \sigma)$ или $\bar{G}/G$ (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Поскольку для симметрического пространства $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$, то каноническая связность совпадает с *естественной связностью без кручения* (единственной инвариантной аффинной связностью без кручения, имеющей те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$; ее также называют *канонической связностью первого рода*).

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

2. Классификация симметрических пространств, допускающих неканонические связности. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, соответствующие приведенным в работе [6], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема 1. Все трехмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ разрешимы, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

2.17.2, 2.17.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	ae_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-ae_2$	0

2.21.1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

Пара	Совпадает с 2.17.2, за исключением
2.17.4	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - e_2$, $[u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2, \alpha \geq 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1, u_3] = \pm e_1$, $[u_2, u_3] = e_1 + e_2$

Замечание. Если на параметры накладываются некоторые дополнительные условия, то они записываются сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Теорема 2. Все трехмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, $\mathfrak{g}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

3.19.14	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

3.21.6	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

3.21.7	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 3. Все трехмерные симметрические тривиальные однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ сопряжена только одной из подалгебр

$$3.3 \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ z & -x & \\ & & \\ \hline\end{array}\,; \quad 3.4 \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \\ \hline\end{array}\,; \quad 3.5 \begin{array}{|ccc|}\hline & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \\ \hline\end{array}\,.$$

Все трехмерные симметрические нетривиальные однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.4.2, 3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$\pm e_2$	$\mp e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$\mp e_2$	0	$\mp e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	$\pm e_1$	$\pm e_3$	0

3.5.2, 3.5.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$\pm e_2$	$\pm e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	$\mp e_2$	0	$\pm e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$\mp e_1$	$\mp e_3$	0

3. Описание связностей. Для найденных пар выписываем все аффинные связности, находим нормальные и канонические связности, а также естественные связности без кручения; определяем, при каких условиях нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, а также при каких условиях ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности.

Начнем рассмотрение со случая, когда $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, например, с пары 2.9.1. Тогда прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $q_{2,2} = -2q_{1,1}$, связность является естественной связностью без кручения, если $p_{12} = 0$, $p_{23} = 0$, $q_{11} = 0$, $q_{22} = 0$, следовательно, нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения. Связность имеет те же геодезические, что и каноническая, если $q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$, следовательно, геодезические нормальной связности не совпадают с геодезическими канонической связности.

Рассмотрим пару 2.21.1. Аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

связность нормальна при $p_{1,2} \neq 0$, естественную связностью без кручения получим при $p_{12} = 0$, следовательно, нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения. При любых значениях параметра p_{12} нормальная связность имеет те же геодезические, что и каноническая.

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

связность нормальна при $a \neq 0$, $p_{1,3} = r_{1,1} = = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$, у перечисленных ниже пар связность такая же, как в случае 2.17.2:

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.3	$a \neq 0,\ p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.4, 2.17.6, 2.17.7	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$

В случаях 2.17.2–2.17.4, 2.17.6, 2.17.7 естественную связностью без кручения получим при $p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$, следовательно, нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения при отличных от нуля r_{13} или r_{23}. Связность имеет те же геодезические, что и каноническая при $r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$, следовательно, геодезические нормальной связности не совпадают с геодезическими канонической связности при отличных от нуля r_{13} или r_{23}.

Аналогично, прямыми вычислениями находим, что если $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима, аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

У пар 3.19.14, 3.21.6 и 3.21.7 связность является нормальной.

Если $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для пары 3.4.2 связность нормальна при $p_{1,2}{}^2 \neq 1$; для 3.4.3 и 3.5.2 связность является нормальной, у 3.5.3 – нормальна при $p_{2,3}{}^2 \neq 1$.

В случае 3.19.14 нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения при отличных от нуля r_{12} или q_{13}, геодезические нормальной связности не совпадают с геодезическими канонической связности при $r_{12} \neq -q_{13}$. В случаях 3.21.6 и 3.21.7 нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения при отличных от нуля q_{12} или q_{13}, ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности при $q_{12} \neq 0$. В случаях 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1 при любых значениях параметров нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, в случае 3.3.1 ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности (в случаях 3.4.1, 3.5.1 – совпадают). В случаях 3.4.2 и 3.4.3 при $p_{12} \neq 0$, в случаях 3.5.2 и 3.5.3 при $p_{23} \neq 0$ нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, а ее геодезические совпадают с геодезическими канонической связности.

Заключение. Таким образом, приведена в явном виде классификация трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих нормальные неканонические связности. Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на симметрических пространствах.

Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Москов. ун-т, 1960. 307 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т. 416 с.
3. Можей Н. П. Канонические связности на трехмерных симметрических пространствах разрешимых групп Ли // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 8–13.
4. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 384 с.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.
6. Можей Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.

References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p.
2. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol. 416 p.
3. Mozhey N. P. Canonical connections on three-dimensional symmetric spaces solvable Lie groups. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 8–13 (In Russian).
4. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 1995. 384 p.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
6. Mozhey N. P. *Trekhmernyye izotropno-tochnyye odnorodnyye prostranstva i svyaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces and affine connections on them]. Kazan, Kazanskiy universitet Publ., 2015. 394 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий». Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natal'ya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, Software for Information Technologies Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 20.11.2017