

Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

ЛЯСНАЯ БІЯМЕТРЫЯ

Праграма, метадычныя ўказанні і кантрольныя заданні
для студэнтаў спецыяльнасці 1-75 01 01
«Лясная гаспадарка» завочнай формы навучання

МЕТОД. КАБІНЕТ
З.Ф.

Мінск 2008

4375 33 609 12 61

УДК 630*9:31(073)

ББК 43я7

Л97

Разгледжаны і рэкамендаваны да выдання рэдакцыйна-выдавецкай радай універсітэта

Складальнікі:

А. А. Атрошчанка, У. П. Машкоўскі, С. І. Мінкевіч

Рэцэнзенты:

дацэнт кафедры фізічнай геаграфіі УА «Беларускі дзяржаўны
педагагічны універсітэт імя Максіма Танка»,
кандыдат сельскагаспадарчых навук

В. Л. Андрэева;

начальнік аддзела прыёму і апрацоўкі касмічнай інфармацыі
УП «Белдзяржлес» кандыдат сельскагаспадарчых навук

М. А. Глюбочык

Па тэматычным плане выданняў вучэбна-метадычнай літаратуры універсітэта на 2008 год. Паз. 120.

Для студэнтаў спецыяльнасці 1-75 01 01 «Лясная гаспадарка» завочнай формы навучання.

© УА «Беларускі дзяржаўны
тэхналагічны універсітэт», 2008



УВОДЗІНЫ

Лясная біяметрыя (матэматычная статыстыка ў лясной гаспадарчы) вивучае законы размеркавання выпадковых велічынь, прадстаўленых у выглядзе вынікаў іх назіранняў ці вымярэнняў, метады ацэнак параметраў статыстычных сукупнасцей, заканамернасці сувязей паміж велічынямі. Біялагічныя сукупнасці, такія як лясныя насаджэнні, зразумела, маюць розную прадукцыйнасць, узрост, паўнату, характарызуюцца рознымі ўмовамі месцаў росту (тыпамі лесу) і інш. Тым не менш усе біялагічныя сукупнасці з'яўляюцца статыстычнымі сукупнасцямі, у якіх праяўляецца тая ці іншая заканамернасць. Такая выяўленая заканамернасць можа быць больш дэтальна прааналізавана з мэтай вивучэння структуры гэтай біялагічнай сукупнасці і далейшага выкарыстання атрыманых вынікаў пры рашэнні некаторых пытанняў, звязаных з лясной гаспадаркай. У цяперашні час спецыялізавае камп'ютэрнае праграмае забеспячэнне знаходзіць усе больш шырокае прымяненне пры апрацоўцы дадзеных вымярэнняў рознага кшталту, таму ўзрастае значэнне лясной біяметрыі непасрэдна для практыкі лесагаспадарчага праектавання, кіравання ляснымі рэсурсамі.

Выкананне кантрольнай работы па лясной біяметрыі неабходна для практычнага засваення метадык статыстычных разлікаў, асэнсавання і замацавання тэарэтычнага курса дысцыпліны. Дадзеныя ўказанні маюць на мэце аказаць дапамогу студэнтам у засваенні курса лясной біяметрыі пры выкананні кантрольнай работы. Прыклады ўсіх разлікаў, якія студэнт павінен выканаць у сваёй кантрольнай рабоце, прыводзяцца ў дадзеных метадычных указаннях. Такім чынам, уважлівае засваенне прыведзеных прыкладаў разлікаў з'яўляецца гарантыяй таго, што кантрольная работа будзе выканана студэнтам без грубых памылак і ў поўным аб'ёме.

Як правіла, кантрольная работа афармляецца ў рукапісным выглядзе. Камп'ютэрнае выкананне дазваляецца толькі выкладчыкам на аснове індывідуальнага падыходу. Дазвол на камп'ютэрнае выкананне кантрольнай работы можна атрымаць у выкладчыка падчас першай лекцыі, у гэтым выпадку пры абароне кантрольнай работы неабходна будзе прад'явіць і камп'ютэрны варыянт работы (напрыклад, у Microsoft Word), уключаючы разлікі (напрыклад, у Microsoft Excel), і самому студэнту прадэманстраваць наяўнасць адпаведных «камп'ютэрных» ведаў. Забараняецца абарона кантрольнай работы ў выпадку несамастойнага складання (дублявання) тэксту і выканання разлікаў.

Кантрольная работа павінна быць прадстаўлена для праверкі на кафедре не пазней як за два тыдні да пачатку экзаменацыйнай сесіі.

Работа, аформленая на камп'ютэры, залічваецца толькі пры яе адпаведнасці нормам афармлення, што выкладзены ў СТП 001-2002 «Праекты (работы) дыпломныя. Пятрабаванні і парадак падрыхтоўкі, прадстаўлення да абароны» [8].

У гэксце кантрольнай работы неабходна прывесці парадак выка-нання разлікаў, прадставіць і прааналізаваць вынікі. Разліковыя формулы спачатку запісваюцца ў агульным выглядзе з расшыфроўкай сімвалаў, пасля – з падстаноўкай вынікаў. Усе разлікі неабходна суправаджаць тлумачальным тэкстам (напрыклад, які статыстычны паказчык разлічваем і інш.). Некаторыя разлікі зручна запісваць у табліцы па формах, якія прыведзены ў дадзеных метадычных указаннях. Вынікі павінны ўтрымліваць канстатацыю выкананых задач па дадзенай тэме з ацэнкай атрыманых даных. Усе выказванні ў справаздачах належыць фармуляваць ад 2-й асобы множнага ліку: «перамнажаем ..., пераносім ..., лічым ...». Акрамя матэрыялаў уласна кантрольнай работы на вызначаную колькасць тэмаў (раздзелаў), павінны быць аформленыя вокладка, змест, уводзіны, а пасля тэксту ўсіх лабараторных – агульны спіс выкарыстанай літаратуры, на якую ў гэксце кантрольнай работы абавязкова павінны быць зроблены спасылкі. Узор вокладкі паказаны на рысунку (гл. далатак). Ва ўводзінах спісца апісваюць прадмет, мэты і задачы лясной біяметрыі і адлюстроўваюць яе ролю як дысцыпліны ў набыцці кваліфікацыі інжынера лясной гаспадаркі.

Падчас працы з дадзеным выданнем трэба ўлічваць некаторыя наступныя метадычныя асаблівасці выкладання матэрыялу ў ім: паўтоўстым шрыфтам паказаны тэрміны, азначэнне якіх падаецца ніжэй, курсівам – рускамоўныя адпаведнікі некаторых тэрмінаў; падкрэсліваецца найбольш істотнае і важнае ў гэксце для ўразумення і запамінання (апорныя моманты).

Прыведзеныя разлікі ў дадзеных метадычных указаннях выкананы па даных А. А. Труля [1].

ПРАГРАМА ПА ЛЯСНОЙ БІЯМЕТРЫІ

Мэты і задачы лясной біяметрыі. Тэрміны, азначэнні, прынятыя абазначэнні.

Паняцце статыстычнай сукупнасці. Выбаркавая статыстычная сукупнасць. Генеральная статыстычная сукупнасць.

Парадак арганізацыі статыстычнай сукупнасці. Статыстычны рад, інтэрвалы. Парадак складання статыстычнага рада. Графічнае адлюстраванне статыстычнага рада. Табліцы размеркавання колькасцей вывучаемай прыкметы па інтэрвалах статыстычнага рада. Двухмерная табліца размеркавання колькасцей ствалоў дрэў па інтэрвалах дыяметраў і вышынь.

Моманты размеркавання выпадковых велічынь. Ацэнка момантаў размеркавання выпадковай велічыні. Пачатковыя, цэнтральныя і асноўныя моманты.

Статыстычныя паказчыкі. Вылічэнне статыстычных паказчыкаў рада размеркавання і іх асноўных памылак па спосабе момантаў і непасрэдным спосабам.

Мадэлі размеркавання выпадковых велічынь. Мадэль нармальнага размеркавання. Вылічэнне параметраў функцыі нармальнага размеркавання. Вылічэнне тэарэтычных колькасцей для функцыі нармальнага размеркавання. Супастаўленне тэарэтычных колькасцей крывой нармальнага размеркавання рада размеркавання з доследнымі данымі, графічнае прадстаўленне вынікаў аналізу. Матэматычнае абгрунтаванне згоды доследных даных і згладжаных па тым ці іншым відзе крывой. Вылічэнне крытэрыю згоды.

Карэляцыйны аналіз. Вылічэнне значэнняў каэфіцыента карэляцыі і карэляцыйнай адносіны.

Рэгрэсіюны аналіз. Вылічэнне ўмоўных сярэдніх значэнняў вышынь па інтэрвалах статыстычнага рада. Ацэнка каэфіцыентаў ураўненняў прамой, парабалы другога парадку, лагарыфмічнай крывой і гіпербалы. Графічнае адлюстраванне залежнасцей. Аналіз атрыманых вынікаў.

МЕТАДЫЧНЫЯ ЎКАЗАННІ І КАНТРОЛЬНЫЯ ЗАДАННІ ДА ВЫКАНАННЯ КАНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПА ЛЯСНОЙ БІЯМЕТРЫІ

1. Статыстычныя рады і іх графічнае адлюстраванне

1.1. Парадак арганізацыі выбарачнай статыстычнай сукупнасці. Для выканання кантрольнай работы па лясной біяметрыі студэнту неабходна самастойна скласці выбарачную статыстычную сукупнасць (*совокупность*). У нашым выпадку мы будзем мець справу з вынікамі вымярэнняў дыяметраў D і вышынь H толькі ў двухсот дрэў у спелым сасновым насаджэнні (на базе агульнай статыстычнай сукупнасці, напрыклад, таксацыйны выдзел, агульная колькасць ствалоў у якім складае некалькі тысяч штук) [1–5]. Значэнні дыяметраў дадзены на вышыні грудзей – 1,3 м, г. зн. гэта тыя вымярэнні дыяметраў, якія выкарыстоўваюцца ў лесагаспадарчай практыцы пры адводзе лесасек, таксацыі на пробных плошчах і іншых відах работ. Кожны студэнт выконвае работу па асобным варыянце, які складаецца з чацвёрох лічбаў (напрыклад 18-7-3-19). Варыянт для выканання работы выбіраецца згодна з прозвішчам і імем студэнта – выкарыстоўваем першую і трэцюю літары прозвішча, другую і чацвёртую літары імя. Далей па табл. 1.1 вызначаем варыянт для выканання работы.

Табліца 1.1

Выкарыстанне літараў і знакаў прозвішча і імя для выбару варыянтаў заданняў

Літара, знак	А	Ж	Н	У, Ў	Б	З, Ы	О, Ф	В, Ь	І, Ы	П, Ю
Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Літара, знак	Х, Т	Г	К	Р, Ц	Д, Э	Л	С, Ч	Е, Ё	М, Ё	Ш, Я
Варыянт	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Напрыклад, студэнт Ёлкін Юрый будзе мець варыянт згодна з літарамі: ё – 18, к – 13, р – 14, й – 9 (гл. табл. 1.1), таму варыянт атрымаем наступны: 18-13-14-9. Студэнт Персікаў Аляксандр атрымае варыянт: п – 10, р – 14, л – 16, к – 13 (гл. табл. 1.1), значыць, варыянт будзе наступным: 10-14-16-13. Далей студэнту трэба звярнуцца да табліцы дадатку Д1 і па яе форме і падабенству выпісаць згодна са сваім варыянтам дзвесце парных значэнняў дыяметраў (D) і вышынь (H) дрэў (вымераных у спелым сасновым насаджэнні) (па прыкладзе табл. 1.2)

Варыянт 18-13-14-9 для студэнта Ёлкіна Юрыя азначае, што студэнту неабходна выпісаць слупкі D і H , якія прыводзяцца пад нумарамі 18, 13, 14, 9 (гл. табл. 1.2). Спачатку студэнт выпісвае слупок пад нумарам 18, які ўтрымлівае пяцьдзсят ствалоў з дадзенымі D і H , далей выпісвае 13, 14 і 9 слупкі, у якіх таксама па пяцьдзсят ствалоў суадносін D і H . Агульная статыстычная сукупнасць па сваёй структуры складаецца з чатырох слупкоў, згодна з варыянтам; у кожным слупку па пяцьдзсят ствалоў, таму выпісаныя чатыры слупкі па варыянце 18-13-14-9 складуць у суме дзвесце ствалоў сасны (у якіх вымераны дыяметры і вышыні), якія і будуць выбарчай статыстычнай сукупнасцю. Дадзеная статыстычная сукупнасць з'яўляецца асноўным пачатковым матэрыялам для наступнага аналізу, уяўляе сабою некаторыя вынікі вымярэнняў на пробнай плошчы, якія падлягаюць статыстычнаму аналізу ў пэўнай паслядоўнасці з выяўленнем некаторых уласцівасцей і заканамернасцей, характэрных для сасновага дрэвастоя [1–5].

Трэба памятаць, што выбаркавая статыстычная сукупнасць дрэў з'яўляецца вынікам вымярэнняў дыяметраў і вышынь толькі ў некаторай часткі (у нашым выпадку ў двухсот дрэў) агульнай (генеральнай) сукупнасці дрэў. Гэтая колькасць назіранняў дастатковая для таго, каб ахарактарызаваць фактычныя ўласцівасці генеральнай сукупнасці з пэўнай дакладнай верагоднасцю. Пры правядзенні статыстычных разлікаў прадугледжваецца аналіз адной статыстычнай велічыні і заканамернасцей яе размеркавання, а таксама аналіз дзвюх залежных велічынь, таму ў кантрольнай рабоце студэнту неабходна выконваць усе разлікі як для рада размеркавання дыяметраў, так і для рада размеркавання вышынь. Увогуле, пры выкананні кантрольнай работы неабходна прытрымлівацца алгарытму і паслядоўнасці разлікаў, прыведзеных у дадзеных метадычных указаннях. Таксама карысным будзе параўнанне атрыманых вынікаў з аналагічнымі вынікамі разлікаў, што прыведзены ў метадычных указаннях (разлікі, выкананыя па унікальным варыянце, не прыведзеным у базе зыходных звестак у метадычных указаннях).

1. Парадак складання статыстычных радоў для арганізацыі выбаркавай статыстычнай сукупнасці. Выбаркавая статыстычная сукупнасць, атрыманыя пры ўліку адзінак назірання, як правіла, запісваюцца ў адвольнай форме. Для статыстычных разлікаў запіс неабходна сістэматызаваць у выглядзе пэўнай паслядоўнасці з выкананнем строга вызначаных правілаў так, каб уласцівасці, зафіксаваныя ў статыстычнай сукупнасці, не былі скажоныя ў статыстычных радах і табліцах размеркавання [1–5].

Паслядоўнасць складання статыстычнага рада наступная.

1. Неабходна мець выбаркавую статыстычную сукупнасць дастатковага аб'ёму ($N \geq 50$). У нашым выпадку $N = 200$.

2. Знаходзім сярод колькасцей нашай выбаркавай статыстычнай сукупнасці мінімальнае $V_{\min}$ і максімальнае $V_{\max}$ значэнні адзінак (адпаведна сярод двухсот дыяметраў, затым сярод двухсот вышынь). Мы ў якасці прыкладу ў дадзеных метадычных указаннях таксама выканаем адпаведныя разлікі. Напрыклад, у нашым выпадку: а) для дыяметраў $V_{\max} = 53,0$ см; $V_{\min} = 17,4$ см; б) для вышынь $V_{\max} = 29,6$ м; $V_{\min} = 18,0$ м.

3. Прыняць колькасць інтэрвалаў n будучага статыстычнага рада з вялікім лікам назіранняў, які павінен быць роўным 12 ± 2 . Мы прымаем $n = 12$.

4. Вылічваем велічыню інтэрвалу d складаемага статыстычнага рада па формуле

$$d = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{n}$$

і акругляем яе да зручнай цотнай велічыні пасля коскі.

У нашым выпадку:

а) для дыяметраў $d = \frac{53,0 - 17,0}{12} = 3,0$ см;

б) для вышынь $d = \frac{29,6 - 18,3}{12} = 0,9 \approx 1,0$ м;

Калі велічыня інтэрвалу атрымліваецца з няцотнай лічбай пасля коскі, то лепш акругліць да бліжэйшай цотнай лічбы (пасля коскі). Напрыклад, 3,1 – лепш прыняць 3,2 альбо 3,0 (аналагічна, напрыклад 1,1 – лепш прыняць 1,0 альбо 1,2 (у залежнасці ад таго, якая лічба ў сотым разрадзе)).

5. Знаходзім сярэднеарыфметычную велічыню M разглядаемай адзінкі (па D і па H) у адпаведнасці з сумамі табл. 1.2 (згодна з варыянтам). Г. зн. сумуем дзвесце дыяметраў і дзелім на дзвесце. У нашым выпадку для дыяметраў $M = 31,5$ см; для вышынь $M = 24,5$ м.

6. Вызначаем межы цэнтральнага інтэрвалу ($V_{i \max}$ і $V_{i \min}$):

$$M + \frac{d}{2} = V_{i \max}; \quad M - \frac{d}{2} = V_{i \min};$$

У нашым выпадку межы цэнтральнага інтэрвалу будуць: для дыяметраў: $31,5 + \frac{3}{2} = 33$ см; $31,5 - \frac{3}{2} = 30$ см, значыць, межы

цэнтральнага інтэрвалу 30–33 см; для вышынь: $24,5 + \frac{1}{2} = 25$ м; $24,5 - \frac{1}{2} = 24$ м, значыць, межы цэнтральнага інтэрвалу 24–25 м.

6. Вызначаем межы астатніх інтэрвалаў, для гэтага ад значэння ніжняй мяжы цэнтральнага інтэрвалу (у нас для дыяметраў 30 см) адыходзім велічыню інтэрвалу d , г. зн. 3 см, і г. д.: 30–27–24–21–18–15. Больш вызначаць межы інтэрвалаў няма патрэбы, бо ў нас мінімальнае значэнне дыяметра 17 см, і гэтае мінімальнае значэнне трапіць у інтэрвал 15–18, больш тонкіх дрэў у нашай выбаркавай сукупнасці няма. Далей да значэння верхняй мяжы цэнтральнага інтэрвалу (у нас для дыяметраў 33 см) прыбаўляем велічыню інтэрвалу ($d = 3$ см), значыць: 33–36–39–42–45–48–51–54. Больш вызначаць межы інтэрвалаў няма патрэбы, бо ў нас максімальнае значэнне дыяметра 53 см, і гэтае максімальнае значэнне трапіць у інтэрвал 51–54, дрэў з большым дыяметрам, чым 53 см, у нашай выбаркавай сукупнасці няма. Таксама выконваем аналагічныя простыя разлікі па вызначэнні межаў інтэрвалаў для рада вышынь (памыяем, што для вышынь будзе іншае значэнне велічыні інтэрвалу, у нашым выпадку $d = 1$ м).

7. Выконваем разноску колькасцей выбаркавай статыстычнай сукупнасці па пабудаваных інтэрвалах статыстычнага рада (кропкамі па сістэме канверта, якая прынята для хуткага запісу даных уліку ў лесагаспадарчай практыцы (напрыклад, пры таксацыі на лесасецы (пераліковая ведамасць), уліку дзелявых доўгіх лесаматэрыялаў і інш.). Г. зн. шукаем сярод усіх двухсот дрэў дыяметры ад 15 см (уключна) да 18 см (не ўключна), запісваем колькасць дрэў з дыяметрамі, якія трапляюць у дадзены інтэрвал, далей дыяметры ад 18 см (уключна) да 21 см (не ўключна) і г. д.

8. Прасумуем усю колькасць дрэў па інтэрвалах і праверым іх агульную суму, павінна быць дзвесце дрэў.

9. Вызначаем сярэднія значэнні інтэрвалаў як паўсумы значэнняў межаў інтэрвалаў, напрыклад $\frac{15+18}{2} = 16,5$ см; $\frac{18+21}{2} = 19,5$ см і г. д.

Такім чынам, складаем два статыстычныя рады: а) для дыяметраў; б) для вышынь. Вынікі складання статыстычных радоў пакажам па форме табл. 1.3 (для дыяметраў), 1.4 (для вышынь), 1.5 (двухмернай табліцы размеркавання для вышынь і дыяметраў разам).

Табліца 1.3

Размеркаванне колькасці ствалоў дрэў па інтэрвалах дыяметраў

Межы інтэрвалаў	Сярэднія значэнні інтэрвалаў	Разноскі колькасці ствалоў па інтэрвалах	Колькасці ствалоў па інтэрвалах
15,0–17,9	16,5	••	3
18,0–20,9	19,5	□	9
21,0–23,9	22,5	□ □ •	21
24,0–26,9	25,5	□ □ ••	22
27,0–29,9	28,5	□ □ □ □	38
30,0–32,9	31,5	□ □ □ ••	34
33,0–35,9	34,5	□ □	18
36,0–38,9	37,5	□ □ ••	22
39,0–41,9	40,5	□ ••	13
42,0–44,9	43,5	□	8
45,0–47,9	46,5	□	7
48,0–50,9	49,5	•	1
51,0–53,9	52,5	••	4
Усяго	—	—	200

Табліца 1.4

Размеркаванне колькасці ствалоў дрэў па інтэрвалах вышынь

Межы інтэрвалаў	Сярэднія значэнні інтэрвалаў	Разноскі колькасці ствалоў па інтэрвалах	Колькасці ствалоў па інтэрвалах
18,0–	18,5	••	2
19,0–	19,5	••	3
20,0–	20,5	••	5
21,0–	21,5	□ ••	12
22,0–	22,5	□ □ ••	22
23,0–	23,5	□ □ □ □	39
24,0–	24,5	□ □ □ ••	35
25,0–	25,5	□ □ □	29
26,0–	26,5	□ □ ••	23
27,0–	27,5	□ □	20
28,0–	28,5	□	8
29,0–	29,5	••	2
Усяго	—	—	200

Таблиця 1.5

Размеркування колькасці ствалоу дрэу па інтэрвалах дыаметрау і вышынь

$\frac{D}{H}$	15,0- 17,9	18,0- 20,9	21,0- 23,9	24,0- 26,9	27,0- 29,9	30,0- 32,9	33,0- 35,9	36,0- 38,9	39,0- 41,9	42,0- 44,9	45,0- 47,9	48,0- 50,9	51,0- 53,9	Разам
	29,0-29,9	28,0-28,9	27,0-27,9	26,0-26,9	25,0-25,9	24,0-24,9	23,0-23,9	22,0-22,9	21,0-21,9	20,0-20,9	19,0-19,9	18,0-18,9	Усяго	
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	2
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	35
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	39
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
	3	9	21	22	38	34	18	22	13	8	7	1	4	200

Межы інтэрвалаў можна паказваць у поўнай форме (напрыклад, 36,0–38,9; 51,0–53,9 (у табл. 1.3, 1.5)) ці ў скарачонай форме, калі запісваецца толькі пачатковае значэнне інтэрвалу (20,0–; 21,0–; 22,0– і г. д. (гл. табл. 1.4)). Пры скарачонай, больш зручнай форме запісу межаў інтэрвалаў не трэба забываць паказваць рыску пасля лічбы, якая азначае, што гэта інтэрвал.

1.3. Графічнае адлюстраванне статыстычных радоў размеркавання. Графічнае адлюстраванне статыстычных радоў размеркавання служыць мэтам нагляднасці вывучаемых заканамернасцей.

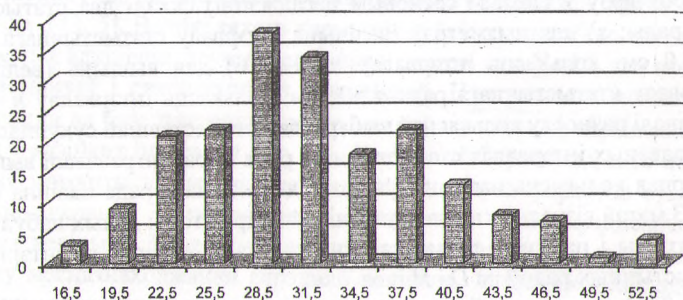


Рис. 1.1. Гістаграма размеркавання колькасцей статыстычнага рада дыяметраў

У лясной біямэтрыі часцей за ўсё прымяняюцца гістаграмы і палігоны размеркавання. Гістаграмы размеркавання паказваюцца ў выглядзе ступеньчатых многавугольнікаў колькасцей (частот) (рис. 1.1), а палігоны размеркавання – у выглядзе замкнутага палігона прамымі лініямі па вяршынях ардынат – колькасцей (рис. 1.2).

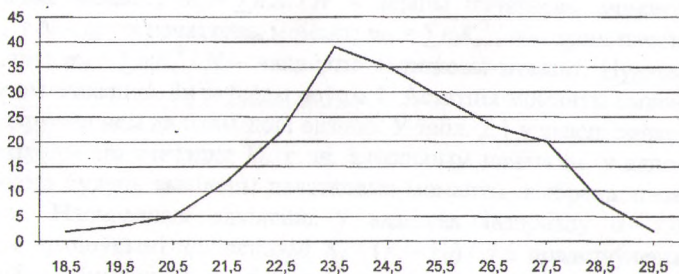


Рис. 1.2. Палігон размеркавання колькасцей статыстычнага рада выпшын

Гістаграма размеркавання будучца для бесперапынных выпадковых велічынь (гл. рыс. 1.1), а палігон – для дыскрэтных (гл. рыс. 1.2). У мэтах вывучэння графічнага спосабу прадстаўлення статыстычных радоў студэнт будзе гістаграму і палігон размеркавання як па дыяметры, так і па вышыні (чатыры рысункі). На восі ардынат адкладваем колькасці ствалоў па інтэрвалах, а па восі абсцыс – варыянты (сярэдня значэнні для інтэрвалаў).

Выснова: На аснове выбарчай статыстычнай сукупнасці (у нашым выпадку гэта вынікі вымярэнняў дыяметраў D і вышынь H у двухсот дрэў у спелым сасновым насаджэнні) склалі два статыстычныя рады: а) для дыяметраў (велічыня інтэрвалу статыстычнага рада $d = 3,0$ см, колькасць інтэрвалаў $n = 13$); б) для вышынь (велічыня інтэрвалу статыстычнага рада $d = 1,0$ м, колькасць інтэрвалаў $n = 12$). Выканалі разніску колькасцей выбаркавай статыстычнай сукупнасці па пабудаваных інтэрвалах статыстычнага рада і пракантралявалі вынікі – сумарная колькасць назіранняў (дрэў) для кожнага рада павінна быць 200. З мэтай візуальнага аналізу вынікаў падрыхтоўкі даных пабудавалі гістаграмы і палігоны размеркавання колькасці ствалоў па інтэрвалах статыстычных радоў па D і H .

Такім чынам, выбарчая статыстычная сукупнасць сістэматызавана; нашыя зыходныя даныя падрыхтаваны для наступных статыстычных разлікаў.

2. Ацэнка момантаў размеркавання выпадковай велічыні

У матэматычнай статыстыцы існуюць розныя віды момантаў. У дадзенай кантрольнай рабоце разглядаюцца звычайныя моманты, якія, у сваю чаргу, падраздзяляюцца на пачатковыя, цэнтральныя і асноўныя моманты размеркавання выпадковай велічыні. Для вызначэння ўзаемасувязі паміж двюма адзнакамі выкарыстоўваюцца змяшаныя моманты, якія інакш называюцца момантамі здабытку двюх статыстычных велічынь [1, 3].

Вылічэнне пачатковых момантаў праводзіцца на базе пачатковых адхіленняў α_0 , нармаваных (*нормированные*) у адзінках статыстычнага рада d [3, 5]. Вынікі такога нармавання ўяўляюць сабою так званыя рабочыя адхіленні, зручныя для знаходжання сум $\sum n_i k_i^n$, для вылічэння момантаў і статыстычных паказчыкаў. Цэнтральныя моманты вылічваюцца на базе цэнтральных адхіленняў $\alpha_i = V_i - M$, нармаваных таксама ў адзінках інтэрвалу d , г. зн. $(V_i - M) / d$. Заўважым, што цэнтральныя моманты часцей за ўсё вылічваюцца праз формулы сувязі паміж пачатковымі і цэнтральнымі момантамі, калі сярэднеарыфметычная велічыня M невядомая і калі статыстычны рад складзены без уліку месцазнаходжання сярэдняй велічыні. У рабоце неабходна вызначыць моманты як для рада дыяметраў, так і для рада вышынь.

2.1. Ацэнка пачатковых момантаў. Пачатковыя моманты вылічваюцца ў адносінах да любой лічбы V_0 , размешчанай у сярэдзіне статыстычнага рада. Лічба выбіраецца сярод значэнняў V_i , г. зн. сярод сярэдніх значэнняў інтэрвалаў. Не трэба браць V_0 паблізу краёў статыстычнага рада, гэта ўскладняе разлікі і можа прывесці да няправільных вынікаў. Студэнту неабходна вылічыць чатыры пачатковыя моманты па спосабе здабыткаў з выкарыстаннем формул: $m_0 = 1$ – нулявы пачатковы момант; $m_1 = \sum n_i K_i / N$ – першы пачатковы момант; $m_2 = \sum n_i K_i^2 / N$ – другі пачатковы момант; $m_3 = \sum n_i K_i^3 / N$ – трэці пачатковы момант; $m_4 = \sum n_i K_i^4 / N$ – чацвёрты пачатковы момант. Нулявы момант не вылічваецца, ён заўсёды роўны 1. Астатнія моманты вылічваюцца з акругленнем да 0,001 долі адзінкі. У табл. 2.1 у якасці пачатковага цэнтральнага значэння V_0 , г. зн. адвольным пачаткам, у адносінах да якога будуць вылічаны пачатковыя моманты, выбрана лічба $V_0 = 34,5$ см. Нармаваныя адхіленні ў адзінках інтэрвалу $d = 3,0$ з'яўляюцца працоўнымі адхіленнямі $K_i = (V_i - V_0) / d$ і прадстаўлены цэлымі лічбамі. Значэнні K_i выпісваюцца паслядоўна ад 0 (г. зн. ад пачатковага цэнтральнага значэння V_0) да 6 і –6 адпаведна (у нашым выпадку), як гэта прыведзена ў табл. 2.1.

Табліца 2.1

**Вылічэнне пачатковых момантаў па спосабе здабыткаў.
Рад дыяметраў**

V_i	n_i	K_i	$n_i K_i$	$n_i K_i^2$	$n_i K_i^3$	$n_i K_i^4$	Кантроль	
							$K_i + 1$	$n_i(K_i + 1)^4$
16,5	3	-6	-18	108	-648	3 888	-5	1 875
19,5	9	-5	-45	225	-1 125	5 625	-4	2 304
22,5	21	-4	-84	336	-1 344	5 376	-3	1 701
25,5	22	-3	-66	198	-594	1 782	-2	352
28,5	38	-2	-76	152	-304	608	-1	38
31,5	34	-1	-34	34	-34	34	0	0
34,5	18	0	0	0	0	0	1	18
37,5	22	1	22	22	22	22	2	352
40,5	13	2	26	52	104	208	3	1 053
43,5	8	3	24	72	216	648	4	2 048
46,5	7	4	28	112	448	1 792	5	4 375
49,5	1	5	5	25	125	625	6	1 296
52,5	4	6	24	144	864	5 184	7	9 604
Усяго	200	-	-194	1 480	-2 270	25 792	-	25 016

Статыстычны рад вылічваем пачынаючы з меншых значэнняў варыянтаў (сярэдніх значэнняў інтэрвалаў) V_i і заканчваючы большымі яго значэннямі. Вызначаюцца сумы з улікам знакаў, пасля чаго па адпаведных формулах паводле спосабу здабыткаў вылічваюцца пачатковыя моманты рада размеркавання дыяметраў. Моманты па дыяметры:

$$m_0 = 1;$$

$$m_1 = \frac{\sum n_i K_i}{N} = \frac{-194}{200} = -0,970; \quad m_2 = \frac{\sum n_i K_i^2}{N} = \frac{1480}{200} = 7,400;$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i K_i^3}{N} = \frac{-2270}{200} = -11,350; \quad m_4 = \frac{\sum n_i K_i^4}{N} = \frac{25\,792}{200} = 128,960.$$

Для правядзення кантролю правільнасці разлікаў пачатковых момантаў неабходна вылічыць чацвёрты перамяшчаны пачатковы момант па формуле $m_4^* = \frac{\sum n_i (K_i + 1)^4}{N}$.

Перамяшчэнне чацвертага моманту на адзін інтэрвал угору (табл. 2.1) ажыццяўляецца прыбаўленнем адзінкі да значэнняў K_i . Так, напрыклад, пры выкананні кантролю значэнні для першага рада ў нашым

выпадку атрымліваюцца наступным чынам: $n_i(K_i + 1)^4 = 3(-5^4) = 1875$. Для знаходжання чацвёртага перамяшчанага моманту вылічваецца $\sum n_i(K_i + 1)^4 = 25\,016$, а затым і сам гэты момант:

$$m_4^* = \frac{\sum n_i(K_i + 1)^4}{N} = \frac{25\,016}{200} = 125,080.$$

Сутнасць кантролю заключаецца ў тым, што чацвёрты перамяшчаны пачатковы момант роўны мнагачлену, куды ўваходзяць усе вылічаныя кантралюемыя пачатковыя моманты:

$$m_4^{**} = m_0 + 4m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4.$$

Падстаўляючы ў гэтую формулу значэнні пачатковых момантаў, атрымем:

$$m_4^{**} = 1 + 4(-0,970) + 6 \cdot 7,400 + 4(-11,350) + 128,960 = 125,080.$$

Аднолькавыя значэнні, атрыманыя па дзвюх розных формулах ацэнкі чацвёртага перамяшчанага моманту, паказваюць правільнасць разлікаў гэтых чатырох момантаў: $m_4^* = m_4^{**} = 125,080$.

Аналагічную табліцу (табл. 2.2) будзем і для рада вышынь, выконваем разлікі момантаў па формулах, што прыведзены вышэй.

Табліца 2.2

Вылічэнне пачатковых момантаў па спосабу здабыткаў.

Рад вышынь

V_i	n_i	K_i	$n_i K_i$	$n_i K_i^2$	$n_i K_i^3$	$n_i K_i^4$	Кантроль	
							$K_i + 1$	$n_i(K_i + 1)^4$
18,5	2	-6	-12	72	-432	2 592	-5	1 250
19,5	3	-5	-15	75	-375	1 875	-4	768
20,5	5	-4	-20	80	-320	1 280	-3	405
21,5	12	-3	-36	108	-324	972	-2	192
22,5	22	-2	-44	88	-176	352	-1	22
23,5	39	-1	-39	39	-39	39	0	0
24,5	35	0	0	0	0	0	1	35
25,5	29	1	29	29	29	29	2	464
26,5	23	2	46	92	184	368	3	1 863
27,5	20	3	60	180	540	1 620	4	5 120
28,5	8	4	32	128	512	2 048	5	5 000
29,5	2	5	10	50	250	1 250	6	2 592
Усяго	200	-	11	941	-151	12 425	-	17 711

Значыць, пачатковыя моманты для рада размеркавання вышынь:
 $m_0 = 1$;

$$m_1 = \frac{n_i K_i}{N} = \frac{11}{200} = 0,055; \quad m_2 = \frac{n_i K_i^2}{N} = \frac{941}{200} = 4,705;$$

$$m_3 = \frac{n_i K_i^3}{N} = \frac{-151}{200} = -0,755; \quad m_4 = \frac{n_i K_i^4}{N} = \frac{12425}{200} = 62,125.$$

Чацвёрты перамешчаны пачатковы момант (для кантролю правільнасці разлікаў пачатковых момантаў):

$$m_4^* = \frac{n_i (K_i + 1)^4}{N} = \frac{17\,711}{200} = 88,555.$$

$$m_4^{**} = m_0 + 4m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4 = 1 + 4(0,055) + 6 \cdot 4,705 + 4(-0,755) + 62,125 = 88,555.$$

Аднолькавыя значэнні, атрыманыя па дзвюх розных формулах чацвёртага перамешчанага моманту, паказваюць правільнасць разлікаў гэтых чатырох момантаў: $m_4^* = m_4^{**} = 88,555$.

2.2. Ацэнка цэнтральных і асноўных момантаў. Для знаходжання значэнняў каэфіцыентаў асіметрыі і эксцэсу пры дапамозе момантаў як характарыстык радоў размеркавання, а таксама для далейшых разлікаў пры вывучэнні ўзаемасувязі паміж дзвюма статыстычнымі велічынямі вылічваюцца цэнтральныя і асноўныя моманты, якія спрашчаюць выдзяленне статыстычных разлікаў.

Цэнтральныя моманты μ вылічваюцца па формулах сувязі паміж цэнтральнымі момантамі: $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = m_2 - m_1^2$; $\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$; $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$.

Асноўныя моманты r вылічваюцца па формулах сувязі з цэнтральнымі момантамі: $r_0 = 1$; $r_1 = 0$; $r_2 = 1$; $r_3 = \mu_3 / \sigma_1^3$; $r_4 = \mu_4 / \sigma_1^4$, дзе $\sigma_1 = \sigma / d = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{\mu_2}$, г. зн. найменшае сярэднеквадратычнае адхіленне (неіменаванае *среднеквадратическое отклонение*); $As = r_3$ – асіметрыя рада размеркавання; $E = r_4 - 3$ – эксцэс рада размеркавання.

Цэнтральныя моманты для рада дыяметраў: $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 6,459$; $\mu_3 = 8,359$; $\mu_4 = 124,042$; $\sigma_{1x} = 2,541$. Цэнтральныя моманты для рада вышынь: $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4,702$; $\mu_3 = -1,531$; $\mu_4 = 62,376$; $\sigma_{1y} = 2,168$. Асноўныя моманты для рада дыяметраў: $r_0 = 1$; $r_1 = 0$; $r_2 = 1$; $r_3 = 0,509$; $r_4 = 2,973$. Асноўныя моманты для рада вышынь: $r_0 = 1$; $r_1 = 0$; $r_2 = 1$; $r_3 = -0,150$; $r_4 = 2,821$.

Значыць, для рада дыяметраў паказчыкі асіметрыі і эксцэсу будзь роўныя: $As = r_3 = 0,509$; $E = r_4 - 3 = 2,973 - 3 = -0,027$. Аналагічна для рада вышынь паказчыкі асіметрыі і эксцэсу складуць: $As = r_3 = -0,150$; $E = r_4 - 3 = 2,821 - 3 = -0,179$.

2.3. Ацэнка змяшаных момантаў. Зыходнымі данымі для вылічэння змяшанага пачатковага моманту першага парадку $m_{1/1}$ служыць табліца размеркавання дыяметраў і вышынь у спелым сасновым насаджэнні, якая была складзена паралельна з састаўленнем радоў размеркавання (гл. табл. 1.5) і праантраліавана (сумы колькасці ствалоў дрэў па інтэрвалах павінны супадаць з сумамі колькасці ствалоў па аналагічных інтэрвалах у табл. 1.3 і 1.4, агульная колькасць ствалоў па інтэрвалах павінна быць дзвесце, паколькі мы аналізуем даныя вымярэнняў вышынь і дыяметраў у двухсот дрэў). Змяшаны пачатковы момант $m_{1/1}$ вылічваецца непасрэдна на аснове суадносін дыяметраў і вышынь табліцы размеркавання, а змяшаны цэнтральны $\mu_{1/1}$ і змяшаны асноўны $r_{1/1}$ моманты першага парадку вылічваюцца па формулах сувязі. Разлікі вядуцца ў наступнай паслядоўнасці:

$$m_{1/1} = \frac{\sum n_{xy} K_x K_y}{N}; \mu_{1/1} = m_{1/1} - m_{1x} m_{1y}; r_{1/1} = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}}.$$

Для разліку моманту $m_{1/1}$ складаецца табл. 2.3 на базе двухмернай табліцы размеркавання колькасці дрэў па інтэрвалах дыяметраў і вышынь (гл. табл. 1.5) і ў яе ўносяцца дапаўненні. У адрозненне ад табл. 1.5 дадзена табл. 2.3 дапаўняецца рабочымі нарміраванымі адхіленнямі па дыяметрах K_x і па вышынях K_y такім чынам, каб іх нулявыя значэнні засталіся на ранейшых месцах, дзе былі выбраны пачатковыя значэнні па дыяметры і вышыні (гл. табл. 2.1), а ад нулявога значэння прастаўляюцца значэнні $-1, -2$ і г. д., $+1, +2$ і г. д., аналагічна як у табл. 2.1. Гэта адна з асноўных умоў. Далей змест табл. 2.3 трэба дапоўніць здабыткамі лікаў $K_x K_y$, г. зн. нарміраваных рабочых адхіленняў са знакамі «+» і «-», якія стаяць у той жа клетачцы над асноўнымі частотамі n_{xy} табліцы размеркавання. У далейшым знаходзяць здабытак $n_{xy} K_x K_y$ шляхам простага перамножвання з улікам знака $K_x K_y$ (гл. табл. 2.3). Напрыклад, для інтэрвалу 15,0–17,9 (рад па дыяметры, гл. табл. 2.3) маем лікі ўнутры клетак $+30$ і $1, +36$ і 2 , значыць, сума гэтых клетак для дадзенага інтэрвалу $n_{xy} K_x K_y$ складзе $+30 \cdot 1 + 36 \cdot 2 = 30 + 72 = 102$, г. зн. той лік, які стаіць у першым слупку ў табл. 2.3. Такія разлікі робяцца для ўсіх слупкоў за выключэннем слупка, дзе $D = V_0 = 34,5$ (сярэдня інтэрвалу 33,0–35,9), г. зн. дзе рабочае адхіленне роўна нулю (табл. 2.3).

Табліца 2.3

Схема ацэнкі змяшанага пачатковага моманту m_{11} по спосабе здабыткаў

$\begin{matrix} D \\ K_x \\ H \\ K_y \end{matrix}$	15,0– 17,9 –6	18,0– 20,9 –5	21,0– 23,9 –4	24,0– 26,9 –3	27,0– 29,9 –2	30,0– 32,9 –1	33,0– 35,9 0	36,0– 38,9 +1	39,0– 41,9 +2	42,0– 44,9 +3	45,0– 47,9 +4	48,0– 50,9 +5	51,0– 53,9 +6	Разам
29,0–29,9 +5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	+20 1	–	+30 1	2
28,0–28,9 +4	–	–	–	–	–	–	–	–	+8 1	+12 2	+16 4	+20 1	–	8
27,0–27,9 +3	–	–	–	–	–	–	4	+3 4	+6 6	+9 3	+12 1	–	+18 2	20
26,0–26,9 +2	–	–	–	–	–4 1	–2 3	7	+2 5	+4 5	–	+8 1	–	+12 1	23
25,0–25,9 +1	–	–	–	–3 1	–2 4	–1 13	3	+1 4	+2 1	+3 3	–	–	–	29
24,0–24,9 0	–	–	1	3	10	10	4	7	–	–	–	–	–	35
23,0–23,9 –1	–	–	+4 6	+3 11	+2 12	+1 8	–	–1 2	–	–	–	–	–	39
22,0–22,9 –2	–	+10 3	+8 7	+6 4	+4 8	–	–	–	–	–	–	–	–	22
21,0–21,9 –3	–	+15 4	+12 4	+9 2	+6 2	–	–	–	–	–	–	–	–	12
20,0–20,9 –4	–	–	+16 3	+12 1	+8 1	–	–	–	–	–	–	–	–	5
19,0–19,9 –5	+30 1	+25 2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3

Заканчэнне табл. 2.3

$\begin{matrix} D \\ K_x \\ H \\ K_y \end{matrix}$	15,0– 17,9 –6	18,0– 20,9 –5	21,0– 23,9 –4	24,0– 26,9 –3	27,0– 29,9 –2	30,0– 32,9 –1	33,0– 35,9 0	36,0– 38,9 +1	39,0– 41,9 +2	42,0– 44,9 +3	45,0– 47,9 +4	48,0– 50,9 +5	51,0– 53,9 +6	Разам
18,0–18,9 –6	+36 2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2
Усяго	3	9	21	22	38	34	18	22	13	8	7	1	4	200
$\sum n_{xy} K_x K_y$	102	140	176	84	64	–11	0	24	66	60	104	20	78	907
$(\sum n_{xy} K_y)^2$	289	784	1936	784	1024	121	0	576	1089	400	676	16	169	–
$\frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x}$	96,3	87,1	92,2	35,6	26,9	3,6	0,0	26,2	83,8	50,0	96,6	16,0	42,3	656,5

У суму $\sum n_{xy} K_x K_y$, зразумела, не ўвойдуць лікі гарызантальнага радка, якія стаяць насупраць пачатковага значэння інтэрвалу па вышыні $H = V_0 = 24,5$ (сярэдня інтэрвалу 24,0–24,9), дзе $K_y = 0$, паколькі атрыманая сума будзе роўна нулю. Сума ўсіх значэнняў $n_{xy} K_x K_y$ падлічваецца строга з улікам знакаў, у нашым выпадку яна роўна 907. Адгэтуль змяшаны пачатковы момант першага парадку паміж дыяметрамі і вышынямі складзе:

$$m_{1/1} = \frac{\sum n_{xy} K_x K_y}{N} = \frac{907}{200} = 4,535;$$

адпаведна змяшаны цэнтральны момант першага парадку:

$$\mu_{1/1} = m_{1/1} - m_{1x} m_{1y} = 4,535 + 0,975 \cdot 0,055 = 4,588;$$

змяшаны асноўны момант першага парадку $r_{1/1}$ уяўляе сабою каэфіцыент карэляцыі:

$$r_{1/1} = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}} = \frac{4,588}{2,541 \cdot 2,168} = 0,833.$$

Апошнія два радкі табл. 2.3 даюць магчымасць вылічыць значэнне сумы радка $\frac{(\sum n_{xy} K_y)^2}{n_x}$, якое ўжываецца ў рабочай формуле знаходжання карэляцыйнай адносіны η як меры сувязі паміж двюма велічынямі пры крывалінейнай сувязі. Для атрымання спачатку значэнняў для радка $(\sum n_{xy} K_y)^2$ неабходна значэнне ў радку выпэй (радок $\sum n_{xy} K_x K_y$ у тым жа самым слупку) падзяліць на адпаведнае рабочае адхіленне K_x і ўзвесці вынік у квадрат. Так, напрыклад, для слупка пры $D = 15,0-17,9$ (гл. табл. 2.3) значэнне ў радку $\sum n_{xy} K_x K_y = 102$. Гэты лік трэба падзяліць на $K_x = -6$ (атрымалі -17) і ўзвесці гэтае значэнне ў квадрат, г. зн. $(-17)^2 = 289$. Адсюль $(\sum n_{xy} K_y)^2 = 289$, г. зн. той лік, які стаіць у табл. 2.3.

для слупка пры $D = 15,0-17,9$. Аналагічныя разлікі робяць для ўсіх слупкоў. Разлічваем суму для апошняга радка, у нашым выпадку атрымалі 656,5. Такім чынам знайшлі значэнні ў двух апошніх радках у табл. 2.3, што дасць магчымасць у далейшым хутка вылічыць важны паказчык сувязі паміж двюма велічынямі – карэляцыйную адносіну (η).

Выснова. Разлічылі пачатковыя, цэнтральныя, асноўныя моманты для радоў размеркавання колькасці ствалоў па інтэрвалах дыяметраў і вышынь, якія далей будзем выкарыстоўваць для разліку статыстычных паказчыкаў. Таксама атрымалі значэнні змяшаных момантаў: змяшаны пачатковы момант паміж дыяметрамі і вышынямі склаў $m_{1/1} = 4,535$; змяшаны цэнтральны момант $\mu_{1/1} = 4,588$; змяшаны асноўны момант (каэфіцыент карэляцыі) $r_{1/1} = 0,833$.

3. Вывічэнне статыстычных паказчыкаў рада размеркавання і іх асноўных памылак

У рабоце вылічваюцца наступныя статыстычныя паказчыкі: сярэдняя арыфметычная велічыня M , найменшае (іменаванае) сярэднеквадратычнае адхіленне σ , ненайменшае сярэднеквадратычнае адхіленне σ_b , каэфіцыент варыяцыі V , каэфіцыент асіметрыі As , каэфіцыент эксцэсу E , працэнт дакладнасці сярэднеарыфметычнай велічыні P , а таксама паказчыкі дакладнасці (асноўныя памылкі) ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні m_M , сярэднеквадратычнага адхілення m_σ , каэфіцыента варыяцыі m_V , каэфіцыента асіметрыі m_{As} , каэфіцыента эксцэсу m_E . Для статыстычнага рада дыяметраў выкарыстаем непасрэдны спосаб вылічэння статыстычных паказчыкаў, а для рада размеркавання вышынь – спосаб момантаў.

3.1. Вывічэнне статыстычных паказчыкаў рада размеркавання дыяметраў і іх асноўных памылак непасрэдным спосабам. Для наступнага вылічэння статыстычных паказчыкаў, сістэматызацці запісаў з мэтай атрымання неабходных асноўных сум у разліках належаць выкарыстоўваць дапаможную табліцу запісаў па наступнай форме (табл. 3.1).

Табліца 3.1

Дапаможная табліца для вылічэння статыстычных паказчыкаў непасрэдным спосабам. Рад дыяметраў

V_i	n_i	$V_i n_i$	$\alpha_i = V_i - M$	α_i^2	$n_i \alpha_i^2$	$n_i \alpha_i^3$	$n_i \alpha_i^4$
16,5	3	49,5	-15,09	227,7	683	-10 308	155 553
19,5	9	175,5	-12,09	146,2	1 316	-15 905	192 286
22,5	21	472,5	-9,09	82,6	1 735	-15 773	143 375
25,5	22	561,0	-6,09	37,1	816	-4 969	30 262
28,5	38	1 083,0	-3,09	9,5	363	-1 121	3 464
31,5	34	1 071,0	-0,09	0,0	0	0	0
34,5	18	621,0	2,91	8,5	152	444	1 291
37,5	22	825,0	5,91	34,9	768	4 541	26 839
40,5	13	526,5	8,91	79,4	1 032	9 196	81 932
43,5	8	348,0	11,91	141,8	1 135	13 515	160 967
46,5	7	325,5	14,91	222,3	1 556	23 202	345 946
49,5	1	49,5	17,91	320,8	321	5 745	102 892
52,5	4	210,0	20,91	437,2	1 749	36 570	764 674
Усяго	200	6 318,0	37,83	1 748,0	11 626	45 137	2 009 482

Першапачаткова ў гэтай табліцы вылічваем здабыткі $V_i n_i$ з мэтай далейшага вызначэння сярэднеарыфметычнай велічыні M і ўстанаўлення цэнтральных адхіленняў $\alpha_i = V_i - M$, якія належыць запісваць з улікам знака (які ўплывае далей пры ўзвядзенні значэнняў у няцотную ступень). Знакі таксама належыць прымаць да ўвагі пры вылічэнні сум слупкоў. Парадак вылічэння статыстычных паказчыкаў наступны.

$$\text{Сярэднеарыфметычная велічыня: } M = \frac{\sum V_i n_i}{N} = \frac{6318}{200} = 31,59 = 31,6 \text{ см.}$$

$$\text{Найменшае сярэднеквадратычнае адхіленне } \sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i \alpha_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{11626}{199}} = 7,64 \text{ см.}$$

$$\text{Паказчык дакладнасці (асноўная памылка) ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні: } m_M = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{7,64}{\sqrt{200}} = \pm 0,54 \text{ см.}$$

$$\text{Кэфіцыент варыяцыі: } V = \frac{100\sigma}{M} = \frac{100 \cdot 7,64}{31,6} = 24,2\%.$$

$$\text{Працэнт дакладнасці сярэднеарыфметычнай велічыні: } P = \frac{100m_M}{M} = \frac{100 \cdot 0,54}{31,6} = 1,71\%.$$

$$\text{Кэфіцыент асіметрыі: } As = \frac{\sum n_i \alpha_i^3}{N\sigma^3} = \frac{45137}{200 \cdot 7,64^3} = 0,505.$$

$$\text{Кэфіцыент эксцэсу: } E = \frac{\sum n_i \alpha_i^4}{N\sigma^4} - 3 = \frac{2009482}{200 \cdot 7,64^4} - 3 = -0,056;$$

$$\text{Асноўная памылка ацэнкі сярэднеквадратычнага адхілення: } m_\sigma = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{7,64}{\sqrt{400}} = \pm 0,38 \text{ см.}$$

$$\text{Асноўная памылка ацэнкі кэфіцыента варыяцыі: } m_V = \pm \frac{V}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{24,2}{\sqrt{400}} = \pm 1,21\%.$$

$$\text{Асноўная памылка ацэнкі кэфіцыента асіметрыі: } m_{As} = \pm \sqrt{\frac{6}{N}} = \pm \sqrt{\frac{6}{200}} = \pm 0,173.$$

Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента эксцэсу:

$$m_E = \pm 2 \sqrt{\frac{6}{N}} = \pm 2 \sqrt{\frac{6}{200}} = \pm 0,346.$$

Асноўная памылка працэнта дакладнасці сярэднеарыфметычнай велічыні: $m_P = \pm \frac{P}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{1,71}{\sqrt{400}} = \pm 0,086\%.$

Паказваем атрыманыя вынікі ў абагульненым выглядзе (статыстычныя паказчыкі сумесна з іх асноўнымі памылкамі): $M \pm m_M = 31,6 \pm 0,54$ см; $\sigma \pm m_\sigma = 7,64 \pm 0,38$ см; $V \pm m_V = 24,2 \pm 1,21\%$; $P \pm m_P = 1,71 \pm 0,086\%$; $As \pm m_{As} = 0,505 \pm 0,173$; $E \pm m_E = -0,056 \pm 0,346.$

3.2. Вылічэнне статыстычных паказчыкаў рада размеркавання вышынь і іх асноўных памылак спосабам момантаў. Ацэнка статыстычных паказчыкаў рада размеркавання патрабуе папярэдняга разліку пачатковых і асноўных момантаў (гл. табл. 2.2, тэма 2). Паслядоўнасць вылічэння статыстычных паказчыкаў з улікам ужо вылічаных момантаў па вышыні (гл. тэма 2) наступная.

Сярэднеарыфметычная велічыня: $M = V_0 + dm_1 = 24,5 + 1,0 \cdot 0,055 = 24,6$ м.

У нашым выпадку для рада вышынь велічыня інтэрвалу $d = 1,0$ см (гл. тэма 1).

Найменшае сярэднеквадратычнае адхіленне: $\sigma = d \sqrt{(m_2 - m_1^2)} = d \sqrt{\mu_2} = 1,0 \sqrt{4,702} = 2,17$ м.

Каэфіцыент варыяцыі: $V = \frac{100\sigma}{M} = \frac{100 \cdot 2,17}{24,6} = 8,8\%.$

Асноўная памылка ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні:

$$m_M = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2,17}{\sqrt{200}} = 0,15$$
 м.

Працэнт дакладнасці сярэднеарыфметычнай велічыні:

$$P = \frac{100m_M}{M} = \frac{100 \cdot 0,15}{24,6} = 0,62\%.$$

Каэфіцыент асіметрыі: $As = r_3 = -0,150.$

Каэфіцыент эксцэсу: $E = r_4 - 3 = 2,821 - 3 = -0,179.$

Асноўная памылка ацэнкі сярэднеквадратычнага адхілення:

$$m_\sigma = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{2,17}{\sqrt{400}} = \pm 0,11$$
 м.

$$\text{Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента варыяцыі: } m_V = \pm \frac{V}{\sqrt{2N}} = \\ = \pm \frac{8,8}{\sqrt{400}} = \pm 0,44\%.$$

$$\text{Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента асіметрыі: } m_{As} = \pm \sqrt{6/N} = \\ = \pm \sqrt{6/200} = \pm 0,173.$$

$$\text{Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента эксцэсу: } m_E = \pm 2\sqrt{6/N} = \\ = \pm 2\sqrt{6/200} = \pm 0,346.$$

$$\text{Асноўная памылка працэнта дакладнасці сярэднеарыфметычнай} \\ \text{велічыні: } m_P = \pm \frac{P}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{0,62}{\sqrt{400}} = \pm 0,031\%.$$

Вынікі разлікаў (статыстычныя паказчыкі і іх асноўныя памылкі) прыводзім у наступным выглядзе: $M \pm m_M = 24,6 \pm 0,15$ м; $\sigma \pm m_\sigma = 2,17 \pm 0,11$ м; $V \pm m_V = 8,8 \pm 0,44\%$; $P \pm m_P = 0,62 \pm 0,031\%$; $As \pm m_{As} = -0,150 \pm 0,173$; $E \pm m_E = -0,179 \pm 0,346$;

Выводы. У выніку атрымалі значэнні асноўных статыстычных паказчыкаў і іх асноўных памылак (спосабам момантаў і непасрэдным спосабам) для радаў размеркавання дрэў па інтэрвалах дыяметраў і вышынь. Для рада дыяметраў сярэднеарыфметычная велічыня $M = 31,6$ см; найменшае сярэднеквадратычнае адхіленне $\sigma = 7,64$ см; паказчык дакладнасці ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні $m_M = 0,54$ см; каэфіцыент варыяцыі $V = 24,2\%$; працэнт дакладнасці ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні $P = 1,71\%$; каэфіцыент асіметрыі $As = 0,505$ (г. зн. па інтэрвалах дыяметраў маем леваварышны характар размеркавання ствалоў (дадатная асіметрыя), што пацвярджаецца і графікам (гл. рыс. 1.1)); каэфіцыент эксцэсу $E = -0,056$ (г. зн. па інтэрвалах дыяметраў маем шоскаварышны характар размеркавання ствалоў (адмоўны эксцэс) (гл. рыс. 1.1)).

Для рада размеркавання ствалоў дрэў па інтэрвалах вышынь сярэднеарыфметычная велічыня $M = 24,6$ м; найменшае сярэднеквадратычнае адхіленне $\sigma = 2,17$ м; каэфіцыент варыяцыі $V = 8,8\%$; асноўная памылка ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні $m_M = 0,15$ м; працэнт дакладнасці ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні $P = 0,62\%$; каэфіцыент асіметрыі $As = -0,150$ (г. зн. па інтэрвалах дыяметраў маем прававарышны характар размеркавання ствалоў (адмоўная асіметрыя), што пацвярджаецца і графікам (гл. рыс. 1.2)); каэфіцыент эксцэсу $E = -0,179$ (г. зн. па інтэрвалах вышынь маем таксама шоскаварышны характар размеркавання ствалоў (адмоўнае значэнне каэфіцыента эксцэсу) (гл. рыс. 1.2)) [1, 2, 6, 7].

4. Мадэлі размеркавання выпадковых велічынь

Кожная статыстычная сукупнасць тых альбо іншых велічынь назіраемай прыкметы мае сярэдняю велічыню і межавыя значэнні – як мінімальнае, так і максімальнае. Натуральна, што ўсе астатнія значэнні размяшчаюцца каля сярэдняй велічыні, займаючы месцы ў радзе размеркавання лічбаў ад мінімуму да максімуму. У розных прыкмет гэтыя размеркаванні могуць прымаць розныя віды крывых. Нягледзячы на прыродную разнастайнасць крывых размеркаванняў іх можна звесці да рада крывых, што вывучаюцца ў курсе матэматычнай статыстыкі [3]. Сярод такіх крывых размеркавання мы маем бінамінальнае размеркаванне, нармальнае размеркаванне Лапласа – Гаўса, размеркаванне Пуасона, Шарлье, сямейства крывых размеркавання Пірсана і іншыя віды размеркаванняў [1–3, 6, 7]. У кантрольнай рабоце прадугледжана вылічэнне параметраў дыферэнцыяльнай функцыі нармальнага размеркавання.

4.1. Вылічэнне параметраў функцыі нармальнага размеркавання. Нармальнае размеркаванне мае важнае значэнне ў статыстыцы. На практыцы вельмі часта доследныя выпадковыя велічыні падпарадкоўваюцца гэтаму закону. Функцыя шчыльнасці размеркавання верагоднасцей нармальна размеркаванай выпадковай велічыні x мае выгляд:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.1)$$

дзе M – матэматычнае чаканне, а σ – сярэднеквадратычнае адхіленне выпадковай велічыні x .

Гэта функцыя называецца крывой Гаўса, яна сіметрычна адносна прамой $x = M$ і мае звонападобную форму. Функцыя нармальнага размеркавання $F(x)$ мае выгляд:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x P(z) dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-M)^2}{2\sigma^2}} dz. \quad (4.2)$$

Верагоднасць пападання нармальна размеркаванай выпадковай велічыні ў інтэрвал $[a; b]$ роўна:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{(z-M)^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_e^a e^{-\frac{(z-M)^2}{2\sigma^2}} dz. \quad (4.3)$$

Інтэгралы, якія ўваходзяць у гэты выраз, нельга выразіць праз элементарныя функцыі, але можна вылічыць праз спецыяльную функцыю

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (4.4)$$

якая з'яўляецца інтэгральнай функцыяй нармальнага размеркавання з параметрамі $M=0$ і $\sigma=1$. Значэнні функцыі $\Phi(x)$ прыведзены ў дадатку (табл. Д2). З выкарыстаннем (4.4) выраз (4.3) можна перапісаць наступным чынам:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-M}{\sigma}\right) = \Phi(t_b) - \Phi(t_a). \quad (4.5)$$

Выкарыстоўваючы формулу (4.5), вылічым тэарэтычныя колькасці варыяцыйнага рада ў дапушчэнні, што доследная выпадковая велічыня падпарадкоўваецца закону нармальнага размеркавання. Пакажам, як гэта робіцца на прыкладзе рада дыяметраў (табл. 4.1).

Табліца 4.1

Вылічэнне тэарэтычных колькасцей для функцыі нармальнага размеркавання. Рад дыяметраў $M = 31,6$ см; $\sigma = 7,64$ см; $N = 200$

V_i	n_i	t_i	$\Phi(t_i)$	P_i	n'_i	$\Delta = n_i - n'_i$
15,0-17,9	3	-1,79	0,037	0,037	7,4	-4,4
18,0-20,9	9	-1,40	0,081	0,044	8,8	0,2
21,0-23,9	21	-1,01	0,156	0,075	15,0	6,0
24,0-26,9	22	-0,62	0,268	0,112	22,4	-0,4
27,0-29,9	38	-0,22	0,413	0,145	29,0	9,0
30,0-32,9	34	0,17	0,567	0,154	30,8	3,2
33,0-35,9	18	0,56	0,712	0,145	29,0	-11,0
36,0-38,9	22	0,96	0,831	0,119	23,8	-1,8
39,0-41,9	13	1,35	0,911	0,080	16,0	-3,0
42,0-44,9	8	1,74	0,959	0,048	9,6	-1,6
45,0-47,9	7	2,13	0,983	0,024	4,8	2,2
48,0-50,9	1	2,53	0,994	0,011	2,2	-1,2
51,0-	4	$+\infty$	1,000	0,006	1,2	2,8
Усяго	200	-	-	1,000	200,0	-

Першы слупок такой табліцы ўтрымлівае межы інтэрвалаў варыяцыйнага рада, другі – колькасці (колькасць ствалоў) па інтэрвалах дыяметраў.

Так як нормальнае размеркаванне вызначаецца ў інтэрвале ад $-\infty$ да $+\infty$, то не будзем абмяжоўваць першы інтэрвал знізу і апошні інтэрвал зверху. У трэці слупок табліцы запісваем нарміраваныя верхнія межы інтэрвалаў варыяцыйнага рада t_i . Іх можна вылічыць па формуле

$$t_i = \frac{x_i - M}{\sigma}, \quad (4.6)$$

дзе x_i – верхняя мяжа i -га інтэрвалу; M – сярэдняе арыфметычнае значэнне; σ – сярэднеквадратычнае адхіленне.

У чацвёрты слупок выпісваем значэнні функцыі нормальнага размеркавання $\Phi(x)$ (гл. дадатак, табл. Д2) для адпаведных аргументаў t_i . У табл. Д2 дадатку значэнні функцыі $\Phi(x)$ дадзены толькі для дадатных аргументаў. Для таго каб знайсці функцыю $\Phi(x)$ для адмоўных значэнняў, патрэбна скарыстаць суадносіну $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Пяты слупок будзе ўтрымліваць тэарэтычную верагоднасць пападання вывучаемай выпадковай велічыні (дыяметра) у адпаведны інтэрвал варыяцыйнага рада, якая вылічваецца згодна з прастай формулай $P_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$ (табл. 4.1). Для першага інтэрвалу велічыня $\Phi(t_{i-1}) = \Phi(-\infty) = 0$, а для апошняга інтэрвалу велічыня $\Phi(t_i) = \Phi(+\infty) = 1$.

Тэарэтычная колькасць назіранняў (ствалоў) для i -га інтэрвалу варыяцыйнага рада вылічваецца па формуле $n'_i = P_i N$, дзе N – агульная колькасць назіранняў (у нас 200 ствалоў). Атрыманыя тэарэтычныя колькасці па інтэрвалах заносзяцца ў шосты слупок табліцы.



Рыс. 4.1. Супастаўленне тэарэтычных колькасцей крывой нормальнага размеркавання рада дыяметраў з доследнымі данымі

У сёмым (апошнім) слупку табліцы прыводзяцца адхіленні эксперыментальных колькасцей варыяцыйнага рада ад тэарэтычных (гл. табл. 4.1).

Па выніках разлікаў будзем графік, дзе паказваем па восі абсцыс верхнія (або сярэднія) значэнні інтэрвалаў V_i , па восі ардынат нашыя эксперыментальныя колькасці па інтэрвалах n_i і затым на гэтым жа графіку (па восі ардынат) – тэарэтычныя колькасці n'_i (рыс. 4.1).

Аналагічныя разлікі (вылічэнні тэарэтычных колькасцей для функцыі нармальнага размеркавання) выконваем у кантрольнай рабоце і для рада вышынё.

4.2. Вылічэнне крытэрыю згоды. Пры вылічэнні тэарэтычных колькасцей для функцыі нармальнага размеркавання (альбо для любога іншага размеркавання) мы робім выснову пра тое, ці пагаджаецца эмпірычны (вопытны) рад з тым альбо іншым відам крывой (тэарэтычнага размеркавання), грунтуючыся на значэннях атрыманых адхіленняў Δ і візуальнага аналізу графікаў (рыс. 4.1), дзе нанесены доследныя і выраўненыя значэнні. Але для матэматычнага абгрунтавання згоды доследных даных і згладжаных па тым ці іншым відзе крывой служаць крытэрыі згоды (крытэрыі згоды Пірсана, Калмагорава і інш.). Калі выкананыя разлікі крытэрыю паказваюць наяўнасць згоды паміж доследнымі і тэарэтычнымі данымі, то мы можам сцвярджаць, што прыродныя ўласцівасці вывучаемай з'явы добра адлюстроўваюцца абраным відам крывой размеркавання. Існуюць розныя крытэрыі згоды.

Найбольш часта ўжываецца крытэрыі згоды Пірсана χ^2 , які заснаваны на статыстыцы:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - NP_i)^2}{NP_i}, \quad (4.7)$$

дзе n_i – колькасць i -га інтэрвала варыцыйнага рада; N – агульная колькасць назіранняў (у нас $N = 200$); P_i – тэарэтычная верагоднасць пападання вывучаемай велічыні ў i -ты інтэрвал рада, вылічаная пры ўмове, што правяраемая гіпотэза аб выглядзе размеркавання генеральнай сукупнасці справядлівая; m – колькасць інтэрвалаў варыцыйнага рада.

Такім чынам, для праверкі нулявой гіпотэзы, якая заключаецца ў тым, што доследная выпадковая велічыня χ мае функцыю размеркавання $F(x)$, патрэбна вылічыць па даных нашай выбаркі статыстыку па прыведзенай вышэй формуле ў дапушчэнні, што гіпотэза H_0 справядлівая (г. зн. згодна з нулявой гіпотэзай мы сцвярджаем, што тэарэтычная функцыя размеркавання $F(x)$ пагаджаецца з нашымі эксперыментальнымі данымі). Далей патрэбна знайсці квантыль χ^2 -размеркавання (гл. дадатак, табл. Д3), адпаведны зададзенаму ўзроўню значнасці α і колькасці ступеней свабоды $\nu = m - r - 1 (\chi^2_{\alpha, \nu})$ і параўнаць з ім вылічанае значэнне $\chi^2_{\text{выл}}$. Калі $\chi^2_{\text{выл}} \geq \chi^2_{\alpha, \nu}$, то гіпотэза H_0 адхіляецца, у адваротным выпадку лічыцца, што няма падстаў для адхілення нулявой гіпотэзы, г. зн. тэарэтычная функцыя размеркавання $F(x)$ пагаджаецца з эксперыментальнымі данымі. Пры вылічэнні значэння

$\chi^2_{\text{выл}}$ трэба сачыць за тым, каб не было інтэрвалаў, якія маюць занадта малыя тэарэтычныя частоты n'_i (менш за 5). Для гэтага, пры неабходнасці, інтэрвалы трэба аб'яднаць разам так, каб усе вылічаныя тэарэтычныя частоты былі дастаткова вялікімі (не менш 5). Табл. 4.2 ілюструе прыклад вылічэння крытэрыю згоды Пірсана χ^2 для варыяцыйнага рада дыяметраў.

с 3 стлбца
згладзілі

Табліца 4.2

Схема вылічэння крытэрыю згоды Пірсана. Рад дыяметраў

Сумма
інтэр
не
менш
5
во 2-х

V_i	n_i	$n'_i = NP$	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$
16,5	3	7,4	-4,4	19,36	2,62
19,5	9	8,8	0,2	0,04	0,00
22,5	21	15,0	6,0	36,00	2,40
25,5	22	22,4	-0,4	0,16	0,01
28,5	38	29,0	9,0	81,00	2,79
31,5	34	30,8	3,2	10,24	0,33
34,5	18	29,0	-11,0	121,00	4,17
37,5	22	23,8	-1,8	3,24	0,14
40,5	13	16,0	-3,0	9,00	0,56
43,5	8	9,6	-1,6	2,56	0,27
46,5	7	4,8	3,8	14,44	3,01
49,5	1	2,2			
52,5	4	1,2			
-	200	-	-	-	16,30

крайніе посперкюю аб'яднваем

У гэтым прыкладзе правераем нульваю гіпотэзу: доследная генеральная сукупнасць дыяметраў падпарадкоўваецца закону нармальнага размеркавання. У першыя два слупкі дадзенай табліцы вылічваецца варыяцыйны рад дыяметраў (выкарыстоўваем даныя табл. 1.3, г. зн. сярэднія значэнні інтэрвалаў V_i і колькасці n_i для інтэрвалаў статыстычнага рада дыяметраў), для якога вылічваецца статыстыка $\chi^2_{\text{выл}}$. У трэцім слупку занаходзяцца тэарэтычныя колькасці інтэрвалаў статыстычнага рада n'_i , вылічаныя ў дапушчэнні, што генеральная сукупнасць падпарадкоўваецца закону нармальнага размеркавання. Ход вылічэння гэтых велічынь апісаны ў падраздзеле 4.1 (можна проста перапісаць гэтыя значэнні тэарэтычных колькасцей інтэрвалаў з адпаведнага слупка n'_i табл. 4.1). У нашым выпадку тры апошнія інтэрвалы рада дыяметраў маюць малыя значэнні тэарэтычных частот n'_i (менш 5). У сувязі з гэтым аб'ядноўваем гэтыя тры інтэрвалы для далейшых разлікаў (гл. табл. 4.2) і выкарыстоўваем вялікі

інтэрвал, які ўтрымлівае інтэрвалы рада дыяметраў з сярэднімі значэннямі 46,5; 49,5; 52,5. Гэты аб'яднаны інтэрвал мае эксперыментальную колькасць, роўную $7 + 1 + 4 = 12$, і тэарэтычную частату $4,8 + 2,2 + 1,2 = 8,2$. У трох апошніх слупках табліцы выконваюцца дапаможныя разлікі для знаходжання статыстыкі $\chi^2_{\text{выл}}$, якая роўна суме значэнняў, прыведзеных у апошнім слупку (табл. 4.2).

Для правэркі нулявой гіпотэзы параўнаем вылічанае значэнне крытэрыю $\chi^2_{\text{выл}} = 16,30$ з таблічным значэннем χ^2 -размеркавання ($\chi^2_{\alpha, v}$) для ўзроўню значнасці $\alpha = 0,05$ (у лясной гаспадарцы звычайна выкарыстоўваецца ўзровень значнасці $\alpha = 0,05$) і значэнняў ступеняў свабоды $v = m - r - 1 = 11 - 2 - 1 = 8$. Лічба $m = 11$ — гэта колькасць інтэрвалаў варыяцыйнага рада з улікам аб'яднання трох інтэрвалаў (у нашым выпадку 11 інтэрвалаў пасля аб'яднання); $r = 2$ — колькасць параметраў размеркавання, якія адзеньваліся па даных выбаркі (нармальнае размеркаванне мае 2 параметры: M — сярэдняя арыфметычная велічыня і σ — сярэднеквадратчнае адхіленне).

У дадатку (гл. табл. Д3) знаходзім $\chi^2_{0,05;8} = 15,507$. Значыць, робім выснову: паколькі вылічанае значэнне статыстыкі $\chi^2_{\text{выл}} = 16,30$ большае, чым таблічнае значэнне $\chi^2_{0,05;8} = 15,507$, то мы адхіляем гіпотэзу аб тым, што генеральная сукупнасць падпарадкоўваецца закону нармальнага размеркавання. Іншымі словамі можна канстатаваць, што верагоднасць супадзення (згоды) нармальнага размеркавання і эмпірычнага (нашых эксперыментальных даных) малая, рады не пагаджаюцца. Аналагічныя разлікі (вылічэнне крытэрыю згоды Пірсана з адпаведнай высновай) выконваем у кантрольнай рабоце і для рада вышынёў.

5. Карэляцыйны аналіз

опред.
связи

Казфіцыент карэляцыі (корреляции) (r) з'яўляецца паказчыкам цеснаты сувязі пры лінейнай форме залежнасці паміж дзвюма велічынямі і змяняецца ў межах ад -1 да $+1$ [1, 3]. Больш за гэтыя абсалютныя значэнні ён немагчымы. Калі значэнне r дадатнае, то залежнасць прамая, калі r мае адмоўнае значэнне, то залежнасць адваротная. Высокая ступень цеснаты сувязі характарызуецца значэннямі $0,8-0,9$. Пры пераходзе r да значэнняў, блізкіх да 1 , сувязь з карэляцыйнай пераўтвараецца ў функцыянальную.

Сувязі паміж велічынямі з каэфіцыентам карэляцыі ніжэй за $0,5$ – гэта расплывчатыя сувязі, па значэнні адной адзнакі цяжка меркаваць пра значэнне другой адзнакі. Для малога ліку назіранняў каэфіцыент карэляцыі вылічваецца па формуле

$$r = \frac{\sum \alpha_x \alpha_y}{N \sigma_x \sigma_y} \quad (5.1)$$

Пры дастатковым аб'ёме выбаркі ацэнка каэфіцыента карэляцыі выконваецца метадам момантаў:

$$r = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}}, \quad (5.2)$$

дзе $\mu_{1/1}$ – змяшаны цэнтральны момант першага парадку паміж $x = D$ і $y = H$ (гл. тэма 2, падраздзел 2.3); σ_{1x} , σ_{1y} – найменныя сярэднеквадратныя адхіленні (для радоў дыяметраў і вышынь) (гл. тэма 2, падраздзел 2.2).

Змяшаны цэнтральны момант першага парадку паміж x і y вылічваецца па формуле

$$\mu_{1/1} = m_{1/1} = m_{1x} m_{1y}, \quad (5.3)$$

Раней былі вылічаны значэнні (гл. тэма 2):

$$m_{1/1} = 4,535; m_{1x} = 0,970; m_{1y} = 0,055; \sigma_{1x} = 2,541; \sigma_{1y} = 2,168.$$

$$\text{Адсюль } \mu_{1/1} = m_{1/1} = m_{1x} m_{1y} = 4,535 + 0,975 \cdot 0,055 = 4,588.$$

Значыць, змяшаны асноўны момант першага парадку ($r_{1/1}$), які ўяўляе сабою казфіцыент карэляцыі r , складаў (гл. тэма 2, падраздзел 2.3):

$$r_{1/1} = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}} = \frac{4,588}{2,541 \cdot 2,168} = 0,833.$$

Асноўная памылка каэфіцыента карэляцыі:

$$m_r = \pm \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} = \frac{1-0,833^2}{\sqrt{200}} = \frac{1-0,6932}{14,14} = \pm 0,022.$$

У тых жа выпадках, калі залежнасць паміж велічынямі крыва-
лінейная, вылічваюць **карэляцыйную адносіну** η . Яна змяняецца ў
межах ад 0 да +1 і адмоўнай велічынёй быць не можа [3, 6].

Калі карэляцыйная адносіна імкнецца (набліжаецца) да +1, гэта
значыць, што крывалінейная карэляцыя імкнецца да функцыянальнай
залежнасці. У мэтах супастаўлення часцей вылічваюць адразу два па-
казчыкі r і η , прычым трэба памятаць, што карэляцыйная адносіна заў-
сёды па сваёй абсалютнай велічыні большая за каэфіцыент карэляцыі.

Карэляцыйная адносіна спосабам момантаў вылічваецца па
формуле

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{1}{\mu_{2y}} \left[\frac{1}{N} \sum \frac{(\sum n_{xy} k_y)^2}{n_x} - m_{1y}^2 \right]. \quad (5.4)$$

У нашым выпадку гэтыя паказчыкі роўныя (гл. тэма 2): $\mu_{2y} = 4,702$
(для рада вышынь y); $\sum \frac{(\sum n_{xy} k_y)^2}{n_x} = 656,5$; (гл. табл. 2.2); $N = 200$;
 $m_{1y} = 0,055$ (для рада вышынь), адсюль:

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{1}{4,702} \left(\frac{656,5}{200} - 0,055 \right) = 0,698.$$

Значыць, карэляцыйная адносіна складзе:

$$\eta_{y/x} = \sqrt{0,698} = 0,835.$$

Таму $\eta_{y/x} = 0,835 > r = 0,833$.

Выснова: разлічылі значэнні каэфіцыента карэляцыі, які ў на-
шым выпадку склаў $r = 0,833$; карэляцыйнай адносіны $\eta_{y/x} = 0,835$.
Значэнне карэляцыйнай адносіны 0,835 большае за каэфіцыент карэ-
ляцыі 0,833. Атрыманае высокае значэнне карэляцыйнай адносіны
сведчыць аб высокай ступені цеснаці сувязі паміж вывучаемымі рада-
мі дыяметраў і вышынь.

6. Рєгрєсійны анализ

- характер
связи.

Рєгрєсійны анализ (регрессионный анализ) – адзін з самых рас-
паўсюджаных метадаў апрацоўкі даных, аснова планавання экспєры-
менту, дыспєрсійнага аналізу, мнагамернага статыстычнага аналізу [1,
6, 7]. **Рєгрєсія** – форма сувязі, пры якой змяненне незалежнай пера-
меннай x на адзінку велічыні дае пэўнае змяненне залежнай пера-
меннай y [2–4].

Рєгрєсійная лінейная мадэль першага парадку мае выгляд

$$y = a + bx + \xi, \quad (6.1)$$

дзе a – свабодны член; b – каэфіцыент; ξ – астаткі ад рєгрєсіі.

Ацэнка каэфіцыентаў рєгрєсіі (a , b) згодна з доследнымі данымі
звычайна выконваецца метадам найменшых квадратаў.

У кантрольнай рабоце прадугледжаны ацэнкі каэфіцыентаў
ураўненняў прамой, парабалы другога парадку, лагарыфмічнай кры-
вой і гіпербалы. Залежнай пераменнай y з’яўляюцца ўмоўныя сярэднія
вышыні, а незалежнай x – дыяметры (інтэрвалы па дыяметрах).

Умоўныя сярэднія вышыні вылічваюцца для кожнага інтэрвалу
рада дыяметраў на аснове двухмернай табліцы размеркавання дыямет-
раў і вышынь дрэў (табл. 6.1). Усе вертыкальныя слупкі табл. 6.1 скла-
даюць колькасці ўмоўных статыстычных радоў па вышыні, для якіх
неабходна вылічыць умоўныя сярэднія значэнні вышынь (H_{ym}) па
формуле

$$H_{ym} = \frac{\sum n_{xy} V_y}{n_x}, \quad (6.2)$$

дзе n_{xy} – колькасць клетчак вертыкальнага ўмоўнага статыстычнага
рада па дыяметрах; n_x – колькасць дрэў у статыстычным радзе па дыя-
метрах, адпаведная ўмоўнаму раду па вышыні; V_y – сярэдняе значэнне
інтэрвалу па вышыні (сярэдняя вышыня). для дадзенага радка.
Напрыклад:

$$H_{ym(16,5)} = \frac{19,5 \cdot 1 + 18,5 \cdot 2}{3} = 18,8 \text{ м};$$

$$H_{ym(19,5)} = \frac{22,5 \cdot 3 + 21,5 \cdot 4 + 19,5 \cdot 2}{9} = 21,4 \text{ м};$$

і г. д. (гл. табл. 6.1).

Таблиця 6.1
Размеркавание колькасці ствалоў дрэў па інтэрвалах дыяметраў і вышынь у спелым сасновым насаджэнні

$\frac{D}{H}$	15,0– 17,9	18,0– 20,9	21,0– 23,9	24,0– 26,9	27,0– 29,9	30,0– 32,9	33,0– 35,9	36,0– 38,9	39,0– 41,9	42,0– 44,9	45,0– 47,9	48,0– 50,9	51,0– 53,9	V_y	n_y
29,0–29,9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1	29,5	2
28,0–28,9	–	–	–	–	–	–	–	–	1	2	4	1	–	28,5	8
27,0–27,9	–	–	–	–	–	–	4	4	6	3	1	–	2	27,5	20
26,0–26,9	–	–	–	–	1	3	7	5	5	–	1	–	1	26,5	23
25,0–25,9	–	–	–	1	4	13	3	4	1	3	–	–	–	25,5	29
24,0–24,9	–	–	1	3	10	10	4	7	–	–	–	–	–	24,5	35
23,0–23,9	–	–	6	11	12	8	–	2	–	–	–	–	–	23,5	39
22,0–22,9	–	3	7	4	8	–	–	–	–	–	–	–	–	22,5	22
21,0–21,9	–	4	4	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	21,5	12
20,0–20,9	–	–	3	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	20,5	5
19,0–19,9	1	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	19,5	3
18,0–18,9	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	18,5	2
V_x	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5	31,5	34,5	37,5	40,5	43,5	46,5	49,5	52,5	–	200
n_x	3	9	21	22	38	34	18	22	13	8	7	1	4	200	–
H_{ym}	18,8	21,4	22,4	23,2	23,7	24,8	26,1	24,9	27,0	27,0	28,2	28,5	27,8	18,8	21,4

Усе гэтыя разлікі ўмоўных вышынь змяшчаюцца ў ніжнім радку ў табл. 6.1. Вылічэнне $H_{ум}$ у кантрольнай рабоце можна прывесці толькі ў якасці прыкладу для двух-трох умоўных радоў (як у нашым прыкладзе вышэй). Трэба памятаць, што колькасці n_x клетчак табліцы размеркавання памнажаюцца на сярэднія значэнні вышынь у межах інтэрвалаў, г. зн. на V_y (гл. табл. 6.1), а не на велічыню пачатковага значэння інтэрвалу. Пасля таго, як усе ўмоўныя сярэднія значэнні вышынь па інтэрвалах статыстычнага рада дыяметраў вылічаны, трэба зрабіць кантроль па формуле

$$H_{сярэдняя} = \frac{\sum H_{ум} n_x}{N}, \quad (6.3)$$

дзе $H_{сярэдняя}$ – сярэдняя вышыня для дрэвастоя (пароды); $H_{ум}$ – умоўныя сярэднія значэнні вышынь па інтэрвалах дыяметраў статыстычнага рада; n_x – колькасць дрэў па інтэрвалах дыяметраў статыстычнага рада; N – агульны лік назіранняў, роўны 200.

Напрыклад, у нашым выпадку маем:

$$H_{сярэдняя} = \frac{18,8 \cdot 3 + 21,4 \cdot 9 + 22,4 \cdot 21 + \dots + 28,5 \cdot 1 + 27,8 \cdot 4}{200} = 24,5 \text{ м.}$$

Сутнасць кантролю заключаецца ў тым, што атрыманае значэнне сярэдняй вышыні павінна супасці альбо быць вельмі блізкім ($\pm 0,1$ м як вынік акругленняў у разліках) да адпаведнага значэння сярэдняй вышыні, разлічанай у тэме 3 (непасрэдным спосабам альбо па спосабе момантаў). Пры атрымнанні кантролю можна быць упэўненым у правільнасці разлікаў. Далей будзем на міліметроўцы графік умоўных сярэдніх вышынь (рис. 6.1).

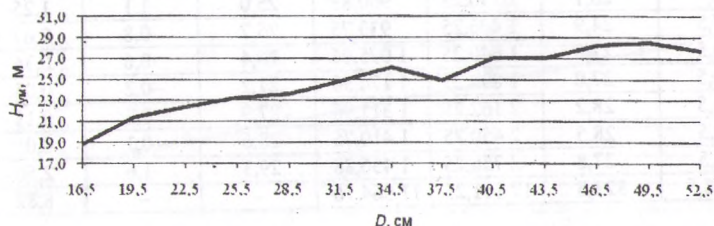


Рис. 6.1. Графік умоўных сярэдніх вышынь па інтэрвалах дыяметраў

Для гэтага па восі абсцыс адкладваем сярэднія значэнні дыяметраў (сярэднія значэнні для інтэрвалаў па дыяметрах), па восі ардынат –

умоўныя сярэднія значэнні вышынь (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.1, гл. рыс. 6.1). Графік вышынь належыць аформіць вельмі акуратна. Усе разлікі ўмоўных вышынь $H_{ум}$ і графік служаць базай рэгрэсійнага аналізу ў кантрольнай рабоце.

6.1. Ацэнка каэфіцыентаў ураўнення прамой. Метад найменшых квадратаў прадугледжвае правядзенне такой тэарэтычнай лініі рэгрэсіі, якая прайшла б як мага бліжэй да доследных даных умоўных сярэдніх значэнняў y (вышынь) у залежнасці ад x (дыяметраў) так, каб сума квадратаў адхіленняў $\sum \Delta^2$ была найменшай. Для ацэнкі каэфіцыентаў a і b ураўнення прамой выгляду $y' = a + bx$ па метадазе найменшых квадратаў неабходна скласці сістэму нармальных ураўненняў

$$\begin{cases} an + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy. \end{cases}$$

Вылічэнне выконваецца па схеме табл. 6.2.

Табліца 6.2

Схема разлікаў параметраў ураўнення прамой па спосабе найменшых квадратаў

$D = x$	$H_{ум} = y$	x^2	xy	y'	$\Delta = y - y'$	Δ^2
16,5	18,8	272,25	310,75	20,7	-1,8	3,32
19,5	21,4	380,25	417,08	21,4	0,0	0,00
22,5	22,4	506,25	504,11	22,1	0,3	0,09
25,5	23,2	650,25	592,30	22,8	0,4	0,16
28,5	23,7	812,25	674,25	23,5	0,1	0,01
31,5	24,8	992,25	781,94	24,3	0,6	0,30
34,5	26,1	1 190,25	900,83	25,0	1,1	1,25
37,5	24,9	1 406,25	933,75	25,7	-0,8	0,67
40,5	27,0	1 640,25	1 095,06	26,4	0,6	0,36
43,5	27,0	1 892,25	1 174,50	27,2	-0,2	0,03
46,5	28,2	2 162,25	1 311,96	27,9	0,3	0,11
49,5	28,5	2 450,25	1 410,75	28,6	-0,1	0,01
52,5	27,8	2 756,25	1 456,88	29,3	-1,6	2,50
$\Sigma 448,5$	323,8	17 111,25	11 564,16	—	—	8,82

З табл. 6.2 маем $\Sigma x = 448,5$; $\Sigma x^2 = 17111,25$; $\Sigma y = 323,8$; $\Sigma xy = 11564,16$; $n = 13$ (n – колькасць інтэрвалаў па дыяметрах, у нас іх 13, гл. табл. 6.2). З атрыманых сум складаецца наступная сістэма нармальных ураўненняў:

$$\begin{cases} 13a + 448,5b = 323,8, \\ 448,5a + 17111,25b = 11564,16. \end{cases}$$

Усе лікі дзеляцца на каэфіцыент пры a ў кожным ураўненні, знаходзіцца рознасць

$$\begin{array}{r} a + 34,5b = 24,91 \\ - \\ a + 38,15b = 25,78 \\ \hline -3,65b = -0,87 \end{array}$$

Адсюль $b = 0,239$.

Падстаўляючы значэнне $b = 0,239$ у першае ўраўненне, атрымаем $a = 24,91 - (0,239 \cdot 34,5) = 16,669$.

Ураўненне прамой будзе мець выгляд: $H' = 16,669 + 0,239D$.

Падстаўляючы ў гэтае ўраўненне значэнні дыяметраў 16,5; 19,5; 22,5; 25,5 і г. д. (гл. табл. 6.2), атрымліваем значэнні $y' = H'$ (слупок y' , табл. 6.2), адпаведныя прамой лініі рэгрэсіі. Калі знайсці квадраты адхіленняў Δ^2 , можна вылічыць стандартную памылку ўраўнення прамой па формуле

$$m_{1x} = \pm \frac{\sqrt{\sum \Delta^2}}{\sqrt{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{8,72}{13-2}} = \pm 0,89 \text{ м.}$$

Адносная памылка рэгрэсіі роўна:

$$P_y = \frac{m_{1x} \cdot 100}{y''} = \frac{0,89 \cdot 100}{24,5} = 3,6\%.$$

У прыкладзе вышэй $y'' = H_{\text{сярэдняя}} = 24,5 \text{ м.}$

Па даных разлікаў будзем графік лінейнай залежнасці (рыс. 6.2).

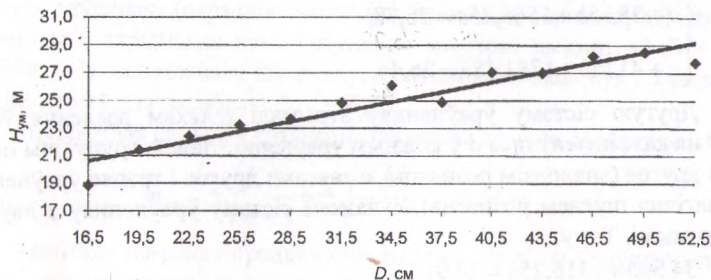


Рис. 6.2. Лінейная залежнасць паміж умоўнымі сярэднімі вышынямі і сярэднімі дыяметрамі па інтэрвалах статыстычнага рада

Для гэтага па восі абсцыс адкладаем тэя ж сярэднія значэнні дыяметраў (сярэднія значэнні для інтэрвалаў па дыяметрах, гл. рыс. 6.1, табл. 6.1, 6.2), па восі ардынат – пунктамі – тэя ж значэнні ўмоўных сярэдніх вышынь (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.1, гл. рыс. 6.1) і на гэтым жа графіку наносім значэнні вышынь y' , якія былі атрыманы па ўраўненні (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.2, гл. рыс. 6.2); праз пункты, якія паказваюць значэнні вылічаных вышынь y' па ўраўненні, праводзім прамую лінію (гл. рыс. 6.2).

6.2. Ацэнка каэфіцыентаў ураўнення парабалы другога парадку. Ацэнка каэфіцыентаў a , b , c карэляцыйнага ўраўнення парабалы другога парадку выгляду $y = a + bx + cx^2$ выконваецца па сістэме нармальных ураўненняў

$$\begin{cases} an + b \sum x + b \sum x^2 = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 = \sum xy, \\ a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 = \sum x^2 y. \end{cases}$$

Разлікі выконваем па схеме табл. 6.3.

Тады маем:

$$\begin{cases} 13a + 448,5b + 17111,25c = 323,85, \\ 448,5a + 17111,25b + 703360,13c = 11564,16, \\ 17111,25a + 703360,13b + 30483362,81c = 452413,08, \\ a + 34,50b + 1316,25c = 24,91, \\ a + 38,15b + 1568,25c = 25,78, \\ a + 41,11b + 1781,48c = 26,44. \end{cases}$$

Другую сістэму ўраўненняў атрымалі шляхам дзялення ўсіх лікаў на каэфіцыент пры a ў кожным ураўненні. Далей, групуючы першае і другое (знаходзім рознасць), а таксама другое і трэцяе ўраўненні (аналагічна шукаем рознасць), складаем сістэму ўраўненняў з двума невядомымі. Таму:

$$\begin{array}{r} 34,50b + 1316,25c = 24,91 \\ - 38,15b + 1568,25c = 25,78 \\ \hline -3,65b - 252,0c = -0,87. \end{array}$$

$$38,15b + 1568,25c = 25,78$$

$$41,11b + 1781,48c = 26,44$$

$$-2,96b - 213,23c = -0,66.$$

Атрымалі сістэму з двума невядомымі:

$$\begin{cases} -3,65b - 252,0c = -0,87, \\ -2,96b - 213,23c = -0,66. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3,65b - 252,0c = -0,87, \\ -2,96b - 213,23c = -0,66. \end{cases}$$

Калі падзелім лікавыя значэнні гэтай сістэмы на каэфіцыент пры b у кожным ураўненні і вылічым рознасць, атрымаем

$$69,00c = 0,24$$

$$72,21c = 0,22$$

$$-3,21c = 0,02$$

Значыць, $c = -0,00528$. Падстаўляючы атрыманае значэнне c ва ўраўненне $-3,65b - 252,0c = -0,87$, атрымаем параметр $b = 0,60$, а затым і параметр $a = 11,05$.

Такім чынам, атрыманы наступныя параметры: $a = 11,05$; $b = 0,60$; $c = -0,00528$. Ураўненне парабалічнай залежнасці другога парадку паміж умоўнымі сярэднімі вышынямі і дыяметрамі ў спелым сасновым насаджэнні запішам у наступным выглядзе:

$$y' = 11,05 + 0,60x - 0,00528x^2$$

або

$$H' = 11,05 + 0,60D - 0,00528D^2.$$

Пасля таго, як ураўненне сувязі паміж дзвюма прыкметамі (D і H) знойдзена, неабходна знайсці тэарэтычныя значэнні вышынь y' па ступенях таўшчыні (сярэдніх значэннях інтэрвалаў дыяметраў), падстаўляючы ў атрыманае намі ўраўненне значэнні дыяметраў $D = x$ (гл. табл. 6.3) для кожнага інтэрвала, а затым вылічыць суму квадратаў адхіленняў для парабалы: $\Sigma \Delta^2 = 4,30$.

Стандартная памылка ўраўнення парабалы другога парадку роўна:

$$m_{2x} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-3}} = \pm \sqrt{\frac{4,30}{13-3}} = \pm 0,66 \text{ м.}$$

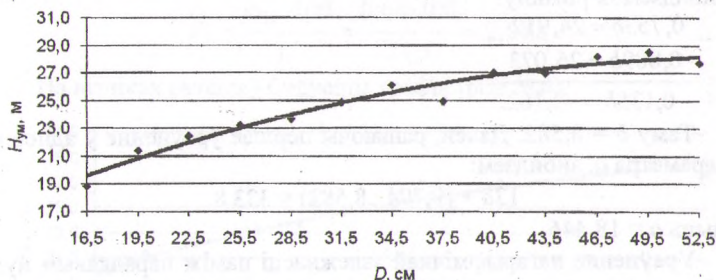
Адносная памылка прадказання вышынь дрэў па ўраўненні парабалы другога парадку (адносная памылка рэгрэсіі) роўна:

$$P_y = \frac{m_{2x} \cdot 100}{y''} = \frac{0,66 \cdot 100}{24,5} = 2,7\%.$$

Таблица 6.3
Схема разликаў параметраў ураўнення параболы другога парадку па спосабу найменшых квадратаў

$D = x$	$H_{ym} = y$	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	y'	$\Delta = y - y'$	Δ^2
16,5	18,8	272,25	4492,13	74120,06	310,75	5127,38	19,6	-0,8	0,64
19,5	21,4	380,25	7414,88	144590,06	417,08	8133,13	20,8	0,6	0,34
22,5	22,4	506,25	11390,63	256289,06	504,11	11342,41	21,9	0,5	0,21
25,5	23,2	650,25	16581,38	422825,06	592,30	15103,53	23,0	0,2	0,05
28,5	23,7	812,25	23149,13	659750,06	674,25	19216,13	24,0	-0,3	0,09
31,5	24,8	992,25	31255,88	984560,06	781,94	24631,15	24,8	0,0	0,00
34,5	26,1	1190,25	41063,63	1416695,06	900,83	31078,75	25,6	0,5	0,28
37,5	24,9	1406,25	52734,38	1977539,06	933,75	35015,63	26,2	-1,3	1,81
40,5	27,0	1640,25	66430,13	2690420,06	1095,06	44349,84	26,8	0,2	0,05
43,5	27,0	1892,25	82312,88	3580610,06	1174,50	51090,75	27,3	-0,3	0,09
46,5	28,2	2162,25	100544,63	4675325,06	1311,96	61006,34	27,7	0,5	0,28
49,5	28,5	2450,25	121287,38	6003725,06	1410,75	69832,13	28,0	0,5	0,28
52,5	27,8	2756,25	144703,13	7596914,06	1456,88	76485,94	28,2	-0,4	0,17
Σ 448,5	323,8	17111,25	703360,13	30483362,81	11564,16	452413,08	—	—	4,30

Па выніках разлікаў будоўня графік (рыс. 6.3).



Рыс. 6.3. Парабалічная залежнасць другога парадку паміж умоўнымі сярэднімі вышынямі і сярэднімі дыяметрамі па інтэрвалах статыстычнага рада

Для гэтага па восі абсцыс адкладваем тыя ж сярэднія значэнні дыяметраў (сяраднія значэнні для інтэрвалаў па дыяметрах, гл. рыс. 6.1), па восі ардынат – пунктамі – тыя ж значэнні ўмоўных сярэдніх вышынь (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.1, гл. рыс. 6.1) і на гэтым жа графіку наносім значэнні вышынь y' , якія былі атрыманы па ўраўненні (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.3, гл. рыс. 6.3), праз пункты, якія паказваюць значэнні вылічаных вышынь y' па ўраўненні, праводзім плаўную крывую (г. зн. згладжваем атрыманы рад пунктаў на графіку, гл. рыс. 6.3).

6.3. Ацэнка каэфіцыентаў ураўнення лагарыфмічнай крывой. Ацэнка каэфіцыентаў a і b карэляцыйнага ўраўнення лагарыфмічнай крывой $y = a + b \lg x$ выконваецца па сістэме нармальных ураўненняў

$$\begin{cases} an + b \sum \lg x = \sum y, \\ a \sum \lg x + b (\sum \lg x)^2 = \sum y \lg x. \end{cases}$$

У гэтай сістэме ў якасці пераменнай x прымаецца парадкавы нумар інтэрвалу па дыяметры (г. зн. у гэтым выпадку нельга пераменную x прыраўняць да лікавага значэння дыяметра). Разлікі выконваем па схеме табл. 6.4.

Па даных табл. 6.4, падстаўляючы разлічаныя сумы адпаведных слупкоў, атрымліваем наступную сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} 13a + 9,794b = 323,8, \\ 9,794a + 8,705b = 255,371. \end{cases}$$

Раздзелім абодва ўраўненні на свае каэфіцыенты пры параметры a і знойдзем іх розніцу:

$$-0,753b = 24,912$$

$$0,889b = 26,073$$

$$-0,135b = -1,162.$$

Таму $b = 8,582$. Далей, рашаючы першае ўраўненне ў адносінах да параметра a , знойдзем:

$$13a + (9,794 \cdot 8,582) = 323,8,$$

значыць $a = 18,446$.

Ураўненне лагарыфмічнай залежнасці паміж парадкавым нумарам інтэрвалу па дыяметры x і ўмоўнымі сярэднімі вышынямі y' будзе мець выгляд $y' = 18,446 + 8,582 \lg x$.

Табліца 6.4

Схема разлікаў параметраў ураўнення лагарыфмічнай крывой па спосабу найменшых квадратаў

D	$H_{ym} = y$	x	$\lg x$	$(\lg x)^2$	$y \lg x$	y'	$\Delta = y - y'$	Δ^2
16,5	18,8	1	0,000	—	—	18,4	-0,4	0,16
19,5	21,4	2	0,301	0,091	6,439	21,0	0,4	0,13
22,5	22,4	3	0,477	0,228	10,690	22,5	-0,1	0,02
25,5	23,2	4	0,602	0,362	13,984	23,6	-0,4	0,15
28,5	23,7	5	0,699	0,489	16,536	24,4	-0,8	0,62
31,5	24,8	6	0,778	0,606	19,316	25,1	-0,3	0,09
34,5	26,1	7	0,845	0,714	22,066	25,7	0,4	0,17
37,5	24,9	8	0,903	0,816	22,487	26,2	-1,3	1,68
40,5	27,0	9	0,954	0,911	25,801	26,6	0,4	0,16
43,5	27,0	10	1,000	1,000	27,000	27,0	0,0	—
46,5	28,2	11	1,041	1,084	29,382	27,4	0,8	0,69
49,5	28,5	12	1,079	1,165	30,757	27,7	0,8	0,63
52,5	27,8	13	1,114	1,241	30,912	28,0	-0,3	0,07
$\Sigma 448,5$	323,8	13	9,794	8,705	255,371	—	—	4,55

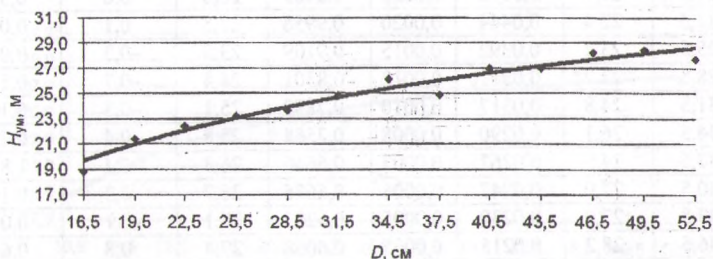
Згодна з гэтым ураўненнем, падстаўляючы значэнні $\lg x$, разлічваем тэарэтычныя значэнні вышынь па ступенях таўшчыні (інтэрвалах дыяметраў) і запісваем у табл. 6.4. Потым знаходзім адхіленні ад зыходных даных. Разлічваем асноўную памылку ўраўнення лагарыфмічнай крывой па формуле

$$m_{3x} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{4,55}{13-2}} = \pm 0,64 \text{ м.}$$

Адносная памылка рэгрэсійнага ўраўнення складзе:

$$P_y = \frac{m_{3x} \cdot 100}{y''} = \frac{0,64 \cdot 100}{24,5} = 2,6\%.$$

Па выніках разлікаў будзецца графік (рыс. 6.4).



Рыс. 6.4. Лагарыфмічная залежнасць паміж умоўнымі сярэднімі вышынямі і сярэднімі дыяметрамі па інтэрвалах статыстычнага рада

Для гэтага па восі абсцыс адкладваем сярэднія значэнні для інтэрвалаў па дыяметрах, гл. рыс. 6.1–6.3, па восі ардынат – пунктамі – тэя ж значэнні ўмоўных сярэдніх вышынь (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.1) і на гэтым жа графіку наносім значэнні вышынь y' , якія былі атрыманы па ўраўненні (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.4, гл. рыс. 6.4); праз пункты, якія паказваюць значэнні вылічаных вышынь y' па ўраўненні праводзім плаўную крывую (г. зн. згладжваем атрыманы рад пунктаў на графіку, гл. рыс. 6.4).

6.4. Ацэнка каэфіцыентаў ураўнення гіпербалы. Для ацэнкі каэфіцыентаў a і b ураўнення гіпербалы $y = a + b/x$ складаецца сістэма нармальных ураўненняў

$$\begin{cases} an + b \sum \frac{1}{x} = \sum y, \\ a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Разлікі выконваем па схеме табл. 6.5.

Па даных табл. 6.5, падстаўляючы разлічаныя сумы адпаведных слупкоў, атрымліваем наступную сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} 13a + 0,426b = 323,8, \\ 0,426a + 0,016b = 10,183. \end{cases}$$

Табліца 6.5

**Схема разлікаў параметраў ураўнення гіпербалы
па спосабе найменшых квадратаў**

$D = x$	$H_{\text{ум}} = y$	$1/x$	$1/x^2$	y/x	y'	$\Delta = y - y'$	Δ^2
16,5	18,8	0,0606	0,0037	1,1414	18,7	0,1	0,01
19,5	21,4	0,0513	0,0026	1,0969	20,8	0,6	0,33
22,5	22,4	0,0444	0,0020	0,9958	22,3	0,1	0,01
25,5	23,2	0,0392	0,0015	0,9109	23,5	-0,3	0,07
28,5	23,7	0,0351	0,0012	0,8301	24,4	-0,7	0,56
31,5	24,8	0,0317	0,0010	0,7880	25,1	-0,3	0,10
34,5	26,1	0,0290	0,0008	0,7568	25,8	0,4	0,12
37,5	24,9	0,0267	0,0007	0,6640	26,3	-1,4	1,88
40,5	27,0	0,0247	0,0006	0,6676	26,7	0,3	0,11
43,5	27,0	0,0230	0,0005	0,6207	27,1	-0,1	0,01
46,5	28,2	0,0215	0,0005	0,6068	27,4	0,8	0,64
49,5	28,5	0,0202	0,0004	0,5758	27,7	0,8	0,63
52,5	27,8	0,0190	0,0004	0,5286	28,0	-0,2	0,04
$\Sigma 448,5$	323,8	0,4265	0,0160	10,1833	—	—	4,51

Выканаем аналагічныя разлікі, як і ў прыкладах вышэй:

$$0,0328b = 24,9115,$$

$$0,0375b = 23,8782$$

$$-0,005b = 1,033.$$

Адсюль $b = -221,729$; тады $a = 32,185$.

Ураўненне гіпербалічнай залежнасці паміж умоўнымі сярэднімі вышынямі і сярэднімі дыяметрамі ў спелым сасновым насаджэнні прадставім у наступным выглядзе: $y' = 32,185 - 221,729/x$ або $H' = 32,185 - 221,729/D$.

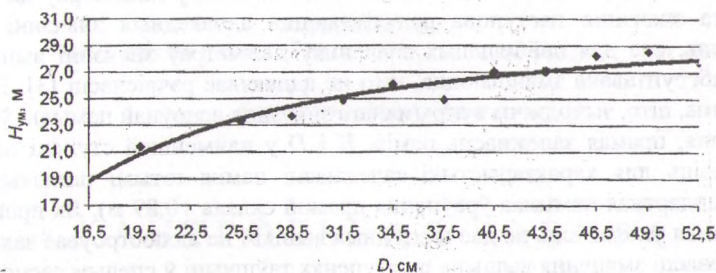
Пасля таго, як ураўненне сувязі паміж двума прыкметамі (D і H) знойдзена, неабходна знайсці тэарэтычныя значэнні вышынь y' па ступенях таўшчыні (сярэдніх значэннях інтэрвалаў дыяметраў), падстаўляючы ў атрыманае намі ўраўненне значэнні дыяметраў $D - x$ (гл. табл. 6.5) для кожнага інтэрвалу, а затым знайсці суму квадратаў адхіленняў для гіпербалы $\Sigma \Delta^2 = 4,51$. Разлічваем асноўную памылку ўраўнення гіпербалы па формуле

$$m_{4x} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{4,51}{13-2}} = \pm 0,64 \text{ м.}$$

Адносная памылка рэгрэсійнага ўраўнення складзе:

$$P_y = \frac{m_{4x} \cdot 100}{y''} = \frac{0,64 \cdot 100}{24,5} = 2,6\%.$$

Па выніках разлікаў будуюцца графік (рыс.6.4).



Рыс. 6.5. Гіпербалічная залежнасць паміж умоўнымі сярэднімі вышынямі і сярэднімі дыяметрамі па інтэрвалах статыстычнага рада

Для гэтага па восі абсцыс адкладваем сярэднія значэнні для інтэрвалаў па дыяметрах, гл. рыс. 6.1–6.4, па восі ардынаты – пунктамі – значэнні ўмоўных сярэдніх вышынь ($H_{ум} = y$) (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.1) і на гэтым жа графіку наносім значэнні вышынь y' , якія былі атрыманы па ўраўненні (г. зн. выкарыстоўваем даныя табл. 6.5, гл. рыс. 6.5), праз пункты, якія паказваюць значэнні вылічаных вышынь y' па ўраўненні, праводзім плаўную крывую (г. зн. згладжваем атрыманы рад пунктаў на графіку, гл. рыс. 6.5).

Па выніках рэгрэсійнага аналізу патрэбна зрабіць вывад аб тым, якое ўраўненне найбольш адпавядае для характарыстыкі залежнасці паміж сярэднімі дыяметрамі і ўмоўнымі сярэднімі вышынямі па інтэрвалах статыстычнага рада. Супастаўляючы асноўныя памылкі ўраўненняў, якія былі вылічаны пры аднолькавай колькасці назіранняў, прымаючы да ўвагі лік ступеней свабоды (число степеней свободы) вар'іравання, у нашым выпадку заключаем, што ўраўненне гіпербалы і ўраўненне лагарыфмічнага віду найлепш адлюстравалі залежнасць паміж H і D у спелым сасновым насаджэнні (у выніку разлікаў атрыманы аднолькавыя значэнні асноўнай памылкі ўраўненняў лагарыфмічнай крывой і гіпербалы – $\pm 0,64$ м). Таксама блізкія вынікі паказала і ўраўненне парабалы другога парадку (стандартная памылка ўраўнення парабалы другога парадку роўна $\pm 0,66$ м). Неабходна

адзначыць, што па сваёй матэматычнай аснове ўраўненне лагарыфмічнага тыпу лепш падыходзіць для адлюстравання залежнасці паміж H і D у параўнанні з ураўненнем парабалы другога парадку, паколькі, дасягнуўшы пэўнай вышыні, крывая лагарыфмічнага тыпу не дае змяншэння значэнняў ардынаты. У крывой парабалы другога парадку гэтага не адбываецца — з павелічэннем значэнняў дыяметраў да пэўнага значэння паступова павялічваюцца адпаведныя значэнні вышынь, але для найбольшых значэнняў дыяметраў значэнні вышынь неабгрунтавана змяншаюцца, што не адпавядае рэчаіснасці [3]. Відавочна, што, зыходзячы з атрыманага значэння асноўнай памылкі ўраўнення, прамая залежнасць паміж H і D у найменшай ступені падыходзіць для характарыстыкі залежнасці паміж гэтымі паказчыкамі (стандартная памылка ўраўнення прамой складала $\pm 0,89$ м). Як правіла, прамая залежнасць не дае надзейных вынікі і не адлюстроўвае заканамернасці змянення вышынь па ступенях таўшчыні ў спелым сасновым насаджэнні.

ДАДАТАК

Узор вокладкі кантрольнай работы

МІНІСТЭРСТВА АДУКАЦЫІ РЭСПУБЛІКІ БЕЛАРУСЬ

Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

Кафедра лесаўпарадкавання

КАНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

па дысцыпліне

«ЛЯСНАЯ БІЯМЕТРЫЯ»

Выканаў студэнт 3 к. гр. 1/1 завочнага
факультэта спецыяльнасці «Лясная
гаспадарка» Яновіч Сяргей Пятровіч
Праверыў Мінкевіч С. І.

Дата адпраўлення: _____

Дата праверкі: _____

Адзнака: _____

Мінск 2009

$d = 1555,1$
 $b = 1229,2$

$d \rightarrow 48,5$
 $b \rightarrow 17,4$
 $\rightarrow 18,0$

Таблица Д1

Вынікі абмеру дыяметраў (D , см) і вышынь (H , м) дрэў у спелым сасновым насаджэнні [1]
 па нумарах варыянтаў (генеральная статыстычная сукупнасць)

Нумары варыянтаў															
1				2				3				4			
D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H
28,2	24,6	35,0	26,6	37,6	24,7	27,5	25,7	37,0	25,5	28,2	24,0	35,4	25,4	27,0	24,6
30,6	22,2	41,7	25,8	25,0	24,6	37,0	26,0	28,5	25,5	25,5	23,5	28,6	24,3	32,0	25,6
20,6	21,7	52,3	27,4	43,1	26,6	46,0	24,5	20,1	20,2	25,5	23,5	45,1	28,2	22,0	23,9
26,7	23,7	29,6	24,9	36,6	26,2	39,6	26,1	40,5	28,3	29,3	23,5	30,1	25,6	53,4	27,8
26,5	23,5	20,5	21,8	32,6	25,5	37,1	26,6	29,2	26,5	33,4	26,0	28,3	24,4	29,3	24,9
27,6	25,6	52,1	26,5	18,0	19,6	53,0	27,5	42,4	25,5	38,5	25,1	34,6	28,4	26,5	24,3
30,5	24,5	34,6	26,0	32,7	25,5	42,1	25,4	34,6	25,6	38,5	25,3	41,0	26,4	27,5	25,9
26,1	22,6	28,5	24,6	44,0	26,6	47,1	27,6	30,5	23,8	22,5	21,5	31,0	24,6	37,0	23,9
29,9	22,2	35,0	25,6	30,1	24,6	52,0	26,6	21,5	22,9	28,5	25,2	25,6	22,2	37,5	25,5
21,0	21,6	35,1	25,9	30,5	22,0	36,6	26,1	48,5	28,7	25,6	25,5	27,5	24,0	35,9	23,9
44,0	28,6	27,5	19,6	28,6	22,0	27,5	24,0	24,7	23,7	35,7	25,6	30,1	24,5	37,6	28,8
38,5	26,5	40,6	28,3	49,0	26,6	26,5	24,1	33,8	26,4	27,5	25,5	25,6	23,8	26,6	24,4
31,5	25,6	35,6	25,1	41,0	27,6	37,0	25,6	25,5	24,5	29,5	23,5	30,5	23,1	25,5	23,3
28,6	21,1	24,6	24,4	52,1	29,6	37,6	28,6	22,5	21,5	21,8	21,5	25,1	25,4	26,5	23,5
33,0	26,6	27,0	24,1	50,6	26,6	22,6	22,7	25,0	25,5	27,9	24,2	31,5	24,5	27,6	24,6
28,1	22,3	41,2	27,0	38,6	27,6	44,0	28,4	33,2	27,9	34,1	25,5	22,6	21,7	37,0	25,9
38,6	25,1	47,5	27,3	24,6	23,7	20,1	20,2	23,3	21,5	36,2	24,2	26,5	23,4	38,0	27,5
33,5	26,0	27,6	23,6	31,0	24,6	28,0	24,6	34,5	27,5	37,3	26,3	34,5	25,6	31,9	24,9
31,0	24,5	39,0	27,0	29,6	25,1	32,6	26,0	42,5	25,5	32,5	24,5	36,0	28,4	28,0	25,9
23,0	23,6	39,9	26,6	26,6	21,0	42,6	27,0	40,5	28,3	37,5	25,5	18,6	20,4	34,6	26,0
25,0	21,6	39,0	24,0	21,0	21,6	37,0	27,6	37,6	24,5	24,5	24,1	25,8	22,3	23,0	22,1
32,0	25,0	19,0	22,0	35,1	25,1	31,0	25,6	38,5	26,7	33,6	24,0	26,9	21,3	27,0	25,0
37,6	27,0	27,5	25,5	19,0	20,1	29,6	23,6	24,7	22,2	41,5	25,5	30,9	26,3	26,0	22,5
43,0	27,0	37,0	23,5	31,0	24,5	52,0	29,6	23,5	21,5	31,5	26,5	26,2	24,6	29,2	22,7
29,6	21,6	17,5	19,6	18,0	19,5	27,0	25,4	17,4	18,0	28,5	22,0	39,0	26,9	26,6	24,5

max 48,5 28,7 41,5 26,5
 min 17,4 18,0 21,8 21,5

$d = 1571,2$
 $b = 1244,4$

$d \rightarrow 60$
 $b \rightarrow 17,6$
 $\rightarrow 28,5$
 $\rightarrow 18,5$

Працяг табл. Д1

Нумары варыянтаў															
5				6				7				8			
D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H
28,5	25,0	23,0	23,5	23,6	20,1	22,6	21,5	43,0	28,4	21,5	27,1	27,0	22,0	38,0	25,7
20,0	22,5	38,5	25,0	31,0	23,6	22,6	22,6	46,4	26,1	33,6	24,0	49,6	27,9	30,5	23,6
22,5	22,5	22,0	21,5	32,4	25,7	41,0	27,3	60,0	27,6	22,3	22,6	22,1	23,2	27,0	23,0
28,0	24,5	37,2	25,0	36,6	26,4	31,0	24,5	37,0	26,4	27,0	23,6	35,6	26,1	33,1	26,7
30,5	22,0	33,3	25,5	25,6	23,9	28,0	25,9	24,0	24,4	27,3	25,4	39,1	26,9	25,1	23,6
19,5	23,0	46,4	26,5	29,6	24,7	26,6	23,0	37,6	27,7	31,6	27,4	31,5	25,0	33,1	24,5
30,0	25,0	25,5	22,0	34,4	27,4	28,0	25,1	38,3	25,5	29,5	24,0	33,3	25,5	23,6	21,4
22,0	23,0	28,0	23,5	29,0	23,9	31,0	25,4	31,5	24,6	30,0	25,5	32,0	24,6	21,4	22,0
52,0	26,5	26,5	24,0	27,4	22,0	38,0	24,5	31,0	25,5	22,6	22,9	27,3	23,9	28,6	25,4
48,0	28,0	36,0	26,0	44,9	28,4	23,6	20,0	32,5	25,0	20,0	22,7	40,1	27,1	30,2	25,3
37,0	26,5	25,5	23,5	28,3	24,1	31,0	23,5	20,6	20,0	37,3	25,5	34,5	27,8	27,0	25,4
21,5	21,0	31,0	25,5	45,0	26,5	32,4	25,6	25,6	24,5	44,5	28,4	38,5	25,6	36,4	26,6
26,5	24,5	26,5	21,5	36,5	24,1	36,6	26,6	26,6	25,5	41,2	26,4	26,4	25,6	23,6	23,0
21,0	21,5	30,5	24,5	30,4	26,1	25,5	23,6	21,5	22,0	31,5	25,9	22,6	22,8	38,6	28,0
36,0	26,5	46,5	24,6	38,8	27,6	29,0	24,5	20,5	22,5	60,0	28,5	51,6	27,5	24,6	24,9
24,5	25,0	34,5	25,5	41,4	26,7	34,1	27,1	28,5	24,0	25,3	21,7	26,6	23,0	29,6	23,7
37,0	27,5	23,5	21,5	39,1	27,6	29,4	23,6	21,5	22,2	41,0	27,5	26,6	22,5	38,7	26,4
26,0	25,5	29,5	24,5	31,6	24,1	27,1	22,2	29,5	24,0	27,0	23,6	41,0	27,6	42,6	25,9
22,5	22,5	27,0	22,0	22,6	22,9	44,5	28,1	22,6	24,4	29,0	24,0	25,0	23,0	32,7	25,0
35,0	25,0	25,5	25,0	23,0	23,7	28,0	24,1	24,0	20,3	29,5	25,6	33,1	27,5	48,8	29,0
28,0	25,5	22,5	24,0	33,4	26,5	45,0	26,5	30,7	23,9	29,6	27,0	22,5	24,0	23,0	24,5
36,5	25,0	29,5	27,0	22,4	22,6	36,6	24,0	25,0	24,0	37,1	27,5	37,1	25,6	26,6	22,7
51,0	27,5	32,0	23,5	22,5	22,1	41,0	27,6	42,5	27,6	45,0	27,0	40,5	27,5	35,1	24,7
21,0	22,0	51,0	27,5	27,3	24,4	53,0	27,6	28,3	25,3	28,3	24,1	27,0	23,0	29,6	24,9
36,5	25,5	24,0	23,5	17,0	18,3	31,0	24,0	17,6	18,5	33,2	26,6	34,4	26,7	31,8	24,4

max 60 27,7 60 28,5
 min 17,6 18,5 21,5 21,7

$d = 1555,3$
 $b = 1219,2$

$d \rightarrow 52,1$
 $\rightarrow 17,0$
 $b \rightarrow 29,6$
 $\rightarrow 18,2$

603,7 615,5
 Працяг табл. Д1

Нумары варыянтаў															
9				10				11				12			
D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H
36,0	26,6	25,0	23,6	20,6	21,4	41,6	27,6	20,1	22,7	31,0	23,5	23,0	23,6	26,0	23,6
44,0	30,3	34,5	24,6	31,3	23,6	40,2	27,2	29,6	21,8	29,6	22,9	26,1	22,6	35,2	24,4
36,4	24,4	28,0	25,6	27,6	25,6	32,0	24,6	18,3	19,9	27,5	23,8	38,0	25,6	23,4	23,5
24,3	23,3	24,2	21,5	31,5	25,9	25,0	24,6	30,5	24,2	32,0	26,5	34,8	24,9	29,3	24,1
32,2	24,7	20,3	22,7	29,6	25,0	23,0	21,5	36,5	26,7	42,0	25,6	22,6	20,7	32,2	25,1
39,5	26,1	27,5	22,6	30,0	25,9	37,5	26,6	27,3	24,8	31,5	23,5	25,6	24,4	34,6	27,1
50,5	28,1	36,0	28,1	28,5	25,4	46,6	26,6	38,5	27,7	27,1	22,0	52,1	29,6	40,1	25,8
40,6	25,4	43,0	28,0	27,0	24,4	39,6	26,1	37,6	26,4	26,7	24,3	49,6	28,5	28,6	23,9
25,6	25,0	37,1	25,6	35,5	25,4	46,0	26,6	31,6	25,8	29,5	23,6	26,3	23,7	25,9	23,8
27,0	22,0	36,6	26,1	38,0	25,1	31,5	26,6	45,1	28,8	31,0	25,4	37,0	24,1	32,6	25,8
22,0	21,5	32,0	24,6	37,3	25,6	21,6	21,6	46,9	29,0	32,0	24,5	25,8	22,7	27,0	23,7
29,5	27,6	37,0	25,2	16,0	19,5	31,0	24,6	46,6	28,7	22,6	23,1	17,0	18,7	22,6	22,8
28,4	27,0	27,6	29,6	32,0	24,6	39,0	23,5	20,0	21,1	32,6	25,8	26,5	23,9	31,7	23,8
35,0	24,5	33,5	25,6	34,6	25,6	32,0	24,5	27,0	22,4	45,5	28,3	47,3	28,8	24,9	23,6
42,0	25,0	31,0	25,1	35,1	25,4	21,5	23,3	36,4	24,7	23,6	22,2	37,6	24,7	43,8	28,1
36,6	27,1	24,6	23,6	24,6	23,9	31,0	26,0	20,5	22,8	25,0	23,7	20,9	21,5	38,6	27,1
34,1	25,7	24,0	21,6	18,6	21,6	33,0	26,6	32,3	25,6	33,0	26,4	36,1	24,9	27,0	22,5
27,1	23,1	23,1	22,1	27,6	22,7	44,4	26,6	29,5	23,6	35,4	24,9	19,5	19,8	21,1	23,6
23,6	22,5	25,1	24,5	46,6	28,3	24,6	22,7	26,0	23,7	36,3	25,4	27,0	22,9	32,0	25,7
44,1	28,0	53,4	27,6	24,4	22,2	28,5	24,0	28,2	26,0	30,0	24,5	36,2	25,8	40,3	27,6
39,7	23,9	45,0	26,5	32,2	24,4	32,0	23,5	22,5	22,7	31,5	24,6	23,1	21,8	32,0	25,8
21,5	20,0	21,5	21,0	27,0	23,9	29,6	27,4	34,3	27,4	39,6	26,6	29,0	23,8	29,0	23,6
29,0	23,6	36,6	25,6	26,0	21,0	39,6	26,0	30,6	23,7	23,3	22,6	41,2	28,2	31,7	23,6
32,1	24,6	28,5	25,4	23,6	25,9	28,6	25,5	24,1	23,5	41,0	26,0	31,6	24,4	30,9	23,5
29,6	24,6	31,1	24,4	24,0	20,1	43,0	26,6	42,6	26,7	34,5	26,6	30,2	24,1	30,7	23,4

max 52,1 29,6 40,1 28,1
 min 17,0 18,7 21,1 22,5

Працяг табл. Д1

Нумары варыянтаў															
13				14				15				16			
D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H
46,6	26,4	29,6	27,1	47,0	27,7	28,5	25,2	43,4	28,4	52,4	27,1	28,1	24,4	32,0	25,4
21,6	20,1	29,7	24,6	35,3	22,5	30,3	25,2	20,1	20,4	44,6	28,6	30,1	24,3	39,6	26,9
34,0	27,0	26,6	25,5	36,3	24,6	33,3	25,2	26,9	25,7	31,6	24,7	30,4	24,1	28,1	26,4
30,6	23,1	25,5	23,7	22,0	22,4	36,5	26,6	29,3	23,6	23,6	23,0	34,6	26,3	29,6	25,1
44,0	27,3	23,1	21,6	48,5	26,1	37,6	26,6	21,0	21,5	26,5	24,4	22,6	17,7	49,6	25,7
38,1	24,5	29,5	23,5	35,3	26,2	26,5	23,3	30,4	22,4	22,6	22,7	42,2	25,0	34,6	25,7
40,5	27,1	22,6	22,2	38,0	25,5	17,5	18,6	28,4	25,3	31,0	24,6	26,6	23,6	30,1	25,6
26,1	22,6	42,0	26,6	22,2	24,0	46,4	24,6	17,6	18,6	29,5	23,5	41,0	27,0	24,6	22,7
24,2	22,1	30,6	25,6	23,3	29,0	29,0	26,5	30,3	25,1	28,9	25,4	37,1	27,6	27,5	25,7
31,6	27,3	41,6	25,6	38,5	26,2	38,5	25,5	26,0	23,7	32,6	24,7	37,0	26,4	35,1	24,6
46,6	24,6	23,0	19,0	28,3	24,5	26,2	25,6	35,4	25,5	31,0	25,4	25,1	24,4	20,1	23,1
24,5	24,6	44,0	28,3	24,0	23,6	15,6	19,1	33,0	25,7	24,6	22,6	22,0	20,1	24,7	22,2
39,0	27,6	21,5	22,2	20,0	22,6	37,5	28,6	24,6	22,7	50,4	28,5	24,6	25,9	27,1	24,7
28,0	22,2	36,5	27,6	25,5	23,5	40,1	27,3	39,9	26,4	32,0	24,1	30,6	23,0	22,1	22,7
36,0	27,0	26,0	21,6	22,0	22,2	19,0	18,0	31,0	23,5	22,6	17,9	21,0	22,6	49,5	27,5
33,3	25,0	28,0	23,5	30,5	23,3	15,5	19,0	31,4	25,6	27,0	22,0	33,0	24,6	22,5	22,0
24,6	23,6	28,4	22,7	29,6	22,5	26,0	22,5	39,6	27,0	19,3	22,4	18,6	20,0	26,5	23,0
39,6	26,6	36,5	26,0	47,4	27,5	30,6	23,6	28,0	22,6	29,4	24,9	24,0	22,0	34,6	27,6
33,6	26,3	40,5	25,5	17,5	19,6	29,6	25,2	24,6	22,7	32,0	23,5	44,4	26,6	28,0	22,7
29,5	24,6	40,6	26,5	33,0	26,0	33,3	26,0	38,7	25,6	40,6	27,5	25,1	23,6	23,4	22,9
32,0	24,3	17,5	19,6	26,0	25,5	28,0	25,0	25,9	23,6	29,6	23,4	42,4	26,6	37,4	23,8
39,3	26,3	29,6	21,5	27,0	23,6	32,5	19,4	22,0	23,9	28,0	23,5	36,6	26,7	25,1	24,1
41,0	27,6	36,5	26,0	25,0	23,6	40,0	26,6	41,6	27,6	30,5	26,0	28,7	24,4	26,1	22,6
37,6	27,6	35,1	24,6	28,0	22,6	30,3	25,7	30,6	24,0	40,6	24,1	18,7	17,9	30,9	25,6
36,0	24,4	23,1	22,0	37,3	26,2	22,9	17,8	28,4	24,4	22,9	22,6	31,0	23,7	21,6	21,9

Нумары варыянтаў

18												19				20			
Числа												Числа				Числа			
Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н	Д	Н
25,5	24,6	24,0	21,6	28,1	25,6	29,5	24,5	46,6	27,7	33,5	25,6	27,7	33,5	25,6	36,4	26,6	27,0	23,0	
22,1	25,9	28,3	25,3	36,0	28,0	22,2	21,9	28,0	25,3	36,5	25,3	25,3	36,5	25,0	27,5	23,4	34,5	24,6	
28,1	25,7	36,6	26,6	26,4	22,6	33,6	27,3	32,6	25,7	31,6	25,5	25,7	31,6	25,5	30,6	23,6	25,0	23,7	
32,6	24,6	24,5	22,9	56,6	26,6	31,5	27,0	28,6	26,6	41,0	27,0	28,6	26,6	41,0	27,0	23,0	32,0	24,0	
22,7	22,4	33,0	27,4	38,6	28,0	39,5	26,6	22,6	24,0	31,0	24,8	20,4	31,0	24,8	20,4	20,3	22,6	22,7	
27,7	25,6	36,0	28,4	36,6	26,0	25,0	23,6	35,6	25,7	37,0	24,0	38,0	27,5	33,5	25,6				
27,0	25,1	56,6	26,7	30,1	24,6	40,6	25,3	33,5	25,5	26,6	29,0	24,6	27,6	26,4	29,6				
45,1	26,6	25,0	23,5	35,2	22,6	36,0	25,6	43,5	26,0	27,0	23,6	19,9	19,4	36,6	24,4				
37,5	26,0	33,7	23,4	33,3	26,6	22,6	18,6	30,3	24,4	21,9	20,1	32,6	25,9	24,6	22,7				
26,6	22,6	22,6	17,7	30,3	28,3	43,4	27,5	24,0	22,6	38,5	26,5	37,5	26,7	22,0	22,7				
32,7	25,9	35,0	25,6	19,4	19,3	26,5	24,0	35,6	25,6	36,5	26,5	34,6	25,6	38,4	25,5				
42,7	27,3	33,4	27,4	42,6	26,6	30,6	26,0	28,1	24,3	31,0	25,0	34,6	26,4	26,5	24,0				
27,0	24,3	27,1	23,9	28,1	24,7	25,6	22,4	24,4	24,4	30,5	26,0	30,6	23,9	35,0	24,9				
24,6	22,3	26,7	28,4	31,7	25,8	28,7	21,3	30,5	23,6	51,0	27,7	20,6	20,4	51,8	24,8				
25,7	23,7	31,0	22,0	37,8	26,0	32,6	24,8	29,6	22,7	30,7	23,0	22,6	24,0	33,0	26,4				
42,0	25,6	31,6	26,6	26,3	22,7	35,1	24,4	28,5	21,6	24,5	25,7	39,0	27,9	30,0	24,4				
35,1	24,7	38,6	26,0	26,6	23,0	31,0	24,5	32,6	26,4	38,0	25,6	20,6	20,4	22,5	21,7				
24,5	22,6	28,0	23,5	27,3	23,0	26,0	22,6	26,0	24,7	36,6	25,7	33,4	25,0	26,7	25,9				
28,6	25,9	53,0	27,6	22,5	22,7	34,6	25,8	22,2	21,6	23,0	22,7	26,0	22,9	30,5	28,9				
49,5	25,7	25,8	24,7	38,0	27,5	31,4	24,8	25,7	23,3	22,7	22,5	32,4	24,9	32,7	26,0				
30,6	25,0	39,5	26,0	20,5	21,6	28,0	25,6	17,7	18,8	29,5	24,4	22,7	24,0	18,6	17,5				
50,0	28,6	29,5	24,0	42,2	25,0	38,1	27,7	32,1	25,3	34,5	25,5	34,8	25,4	30,6	23,6				
37,0	23,7	32,0	24,6	39,6	24,4	27,6	25,5	37,2	26,2	23,8	24,4	42,0	25,7	42,6	26,6				
21,7	20,7	32,6	24,7	26,6	25,6	29,9	27,0	38,5	26,7	49,5	27,7	30,6	23,8	22,5	22,0				
45,0	26,7	31,6	25,7	30,2	28,3	33,3	28,4	23,6	20,2	32,6	25,9	18,6	17,5	24,0	22,0				

d=16 473
b=1246

max 500 286 566 2814
min 217 207 226 177

Табліца Д2

Значэнні функцыі нармальнага размеркавання $\Phi(x)$ [2]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,506	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,728	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,866	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,961	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
3,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000
3,3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3,4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Таблиця Д3
Крытычныя значэнні квантылей $\chi^2_{\alpha, \nu}$ у залежнасці ад зададзенага ўзроўню значнасці α і колькасці ступеней свабоды ν [2]

$\nu \backslash \alpha$	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
1	0,000157	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	6,635	10,827
2	0,0201	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	9,210	13,815
3	0,115	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	11,345	16,266
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	13,277	18,467
5	0,554	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	15,086	20,515
6	0,872	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	16,812	22,457
7	1,239	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,363	9,803	12,017	14,067	18,475	24,322
8	1,646	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	20,090	26,125
9	2,088	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	21,666	27,877
10	2,558	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	23,209	29,588
11	3,053	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	24,725	31,264
12	3,571	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,519	21,026	26,207	32,909
13	4,107	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	27,688	34,528
14	4,660	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	29,141	36,123
15	5,229	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	30,578	37,697
16	5,812	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	32,000	39,252
17	6,408	8,672	10,085	12,007	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	33,409	40,790
18	7,015	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	34,805	42,312
19	7,633	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	36,191	43,820
20	8,260	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	37,566	45,315
21	8,897	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,853	26,171	29,615	32,671	38,932	46,797
22	9,542	12,338	14,041	16,310	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	40,289	48,268
23	10,196	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	41,638	49,728

ЛІТАРАТУРА

1. Труль, О. А. Математическая статистика в лесном хозяйстве / О. А. Труль. – Минск, Высшая школа, 1966. – 234 с.

2. Машковский, В. П. Лесная биометрия: учеб.-метод. пособие по одноименной дисциплине для студентов специальности 1-75 01 01 «Лесное хозяйство» / В. П. Машковский. – Минск: БГТУ, 2005. – 72 с.

3. Методическое пособие по курсу «Вариационная статистика»: для студентов-заочников специальности 1512 «Лесное хозяйство» / сост. О. А. Труль. – Минск: БТИ, 1978. – 61 с.

4. Матэматычная статыстыка ў лясной гаспадарцы: метада. указанні па аднайменным курсе для студэнтаў спецыяльнасці 31.12 / склад. А. А. Атрошчанка, А. А. Труль, В. М. Гайчук. – Мінск: БДТУ, 1993. – 45 с.

5. Матэматычная статыстыка ў лясной гаспадарцы: метада. указанні па аднайменным курсе для студэнтаў спецыяльнасці Т. 16.01.00 / склад. А. А. Атрошчанка, У. П. Машкоўскі, В. М. Гайчук. – Мінск: БДТУ, 1996. – 51 с.

6. Свалов, Н. Н. Вариационная статистика: учеб. пособие для ВУЗов / Н. Н. Свалов. – М.: Лесная промышленность, 1977. – 176 с.

7. Дворецкий, М. Л. Пособие по вариационной статистике / М. Л. Дворецкий. – М.: Лесная промышленность, 1971. – 102 с.

8. СТП 001-2002. Праекты (работы) дыпломныя. Пятрабаванні і парадак падрыхтоўкі, прадстаўлення да абароны і абароны. – Уведз. 01.04.2002. – Мінск: БДТУ, 2002. – 159 с.

9. Справочник таксатора / В. С. Мирошников [и др.]; под ред. В. С. Мирошникова. – Минск: Ураджай, 1980. – 360 с.

ЗМЕСТ

Уводзіны	3
Праграма па лясной біяметрыі	5
Метадычныя ўказанні і кантрольныя заданні да выканання кантрольнай работы па лясной біяметрыі	6
1. Статыстычныя рады і іх графічнае адлюстраванне	6
2. Ацэнка момантаў размеркавання выпадковай велічыні	15
3. Вылічэнне статыстычных паказчыкаў рада размеркавання і іх асноўных памылак	23
4. Мадэлі размеркавання выпадковых велічынь	27
5. Карэляцыйны аналіз	33
6. Рэгрэсійны аналіз	35
Дадатак	49
Узор вокладкі кантрольнай работы	49
Табліца Д1. Вынікі абмеру дыяметраў (D , см) і вышынь (H , м) дрэў у спелым сасновым насаджэнні па нумарах варыянтаў (генеральная статыстычная сукупнасць)	50
Табліца Д2. Значэнні функцыі нармальнага размеркавання $\Phi(x)$	55
Табліца Д3. Крытычныя значэнні квантылей $\chi^2_{\alpha, \nu}$ у залежнасці ад зададзенага ўзроўню значнасці α і колькасці ступеней свабоды ν	56
Літаратура	57

ЛЯСНАЯ БІЯМЕТРЫЯ

Складальнікі: **Атрошчанка** Алег Аляксандравіч
Машкоўскі Уладзімір Пятровіч
Мінкевіч Сяргей Іванавіч

Рэдактар *А. П. Саламевіч*

Падпісана да друку 04.11.2008. Фармат 60×84^{1/16}.
Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 3,3. Ул.-выд. арк. 3,4.
Тыраж 200 экз. Заказ 443.

Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт».
220006. Мінск, Свярдлова, 13а.
ЛІ № 02330/0133255 ад 30.04.2004.

Надрукавана ў лабараторыі паліграфіі ўстановы адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт».
220006. Мінск, Свярдлова, 13.
ЛПІ № 02330/0056739 ад 22.01.2004.