УДК 621.383.29:621.514.015

В. И. Никитенок[1], С. С. Ветохин[2], А. М. Бахарь[1], Е. В. Терешко[2]
[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

МЕТОДИКА РАСЧЕТА РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ СЛАБЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Рассматривается обнаружение слабых оптических сигналов, когда на выходе фотоприемника наблюдается последовательность импульсов, распределенных по закону Пуассона, другими словами, стационарный или простейший пуассоновский поток, представляющий собой либо чистый шум, либо смесь полезного сигнала с шумом. С опорой на элементы теории статистических решений разработана методика получения рабочих характеристик адаптивного обнаружителя. В модели для стабилизации вероятности ложной тревоги используют подстройку порога обнаружения с учетом характеристик классифицированной обучающей выборки. В качестве последней принят «шумовой» пуассоновский поток.

Ключевые слова: слабый оптический сигнал, фотоприемник, адаптивный обнаружитель, вероятность ложной тревоги, вероятность правильного обнаружения.

V. I. Nikitsionak[1], S. S. Vetokhin[2], A. M. Bakhar[1], E. V. Tereshko[2]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

THE METHOD OF CULCULATION OF THE WORKING CHARACTERISTICS OF A WEAK OPTICAL SIGNALS ADAPTIVE DETECTOR

This study examines the case of weak light signals detection when the Poisson series of the detector output pulses is occurred (stationary process), which represents a pure noise or mixture of noise and signal. The method of defining the working characteristics of an adaptive detector, which is elaborated under the theory of statistical decisions, is offered. The method uses the adaptation of the detection threshold to stabilize the value of alarm probability. It applies the characteristics of a background series that is a simple “noise” Poisson process.

Key words: weak optical signal, photo detector, adaptive detector, false alarm probability, true detection probability.

Введение. При обнаружении слабых оптических сигналов на выходе фотоприемника имеется простейший пуассоновский поток (ППП) с интенсивностью λ_0 (прием чистого шума) или $\lambda_1 = \lambda_c + \lambda_0$ (прием смеси сигнала с шумом) [1, 2, 3]. Известно, что в этом случае оптимальное по критерию Неймана – Пирсона принятие решений на обнаружение состоит в сравнении числа принимаемых импульсов за фиксированное время с порогом обнаружения, зависящим от задаваемой вероятности ложной тревоги и интенсивности потока шума [1, 2, 3].

Если в качестве входных воздействий рассматривать последовательность временных интервалов между соседними импульсами ППП, которые распределены экспоненциально [1–4], то оптимальное обнаружение включает их суммирование при фиксированном числе импульсов и сравнение с порогом решения, зависящим как от задаваемой вероятности ложной тревоги, так и от величины λ_0 [4]. Очевидно, что оба алгоритма обнаружения статистически эквивалентны. Оперирование с непрерывными случайными величинами облегчает последующий анализ, не сужая общности решаемой проблемы, которая состоит в том, что рабочие характеристики оптимального обнаружителя слабых оптических сигналов получены при условии точно известного параметра экспоненциального распределения. Однако на практике такой случай является исключением из правила. В этих условиях, как показано в публикации [5], реальные характеристики обнаружения могут существенно отличаться от рассчитанных, так как параметр экспоненциального распределения при наличии чистого шума может уйти от нашего контроля, и порог обнаружения определяется неверно. Как отмечалось, в данном случае имеет место априорная неопределенность относительно параметра экспоненциального распределения.

Обратимся к двум известным принципам преодоления априорной неопределенности. Один и них состоит в разработке адаптивных алгоритмов, другой – в применении непараметрических, в том числе ранговых, алгоритмов. В настоящей статье рассматривается пример применения адаптивного алгоритма обнаружения слабых оптических сигналов с применением методов обучения. В ней дополняются и уточняются результаты, представленные в работе [6]. В случае параметрической априорной неопределенности эти методы базируются на теории статистических решений с использованием классифицированной обучающей выборки [4]. Вид функции распределения известен (экспоненциальный) и в течение периода обучения, который должен предшествовать моменту принятия решения на обнаружение, надо на основании наблюдений сформировать оценку неизвестного параметра λ_0. Эта оценка используется затем для вычисления порога обнаружения вместо неизвестного истинного значения λ_0 интенсивности ППП при приеме чистого шума. Подчеркнем, должна быть твердая уверенность именно в этом: оценка действительно вырабатывается по чистому шуму. Имеет место так называемое обучение с учителем. В ходе обучения в данном случае происходит изменение параметра алгоритма обучения с целью приближения его к оптимальному алгоритму с точки зрения задаваемого критерия качества. Подобные устройства принято называть адаптивными (или самоорганизующимися) [4]. Обратим внимание, что применение методов обучения приводит к системам с характеристиками, близкими к оптимальным с известными параметрами.

Основная часть. Как отмечалось, в адаптивном обнаружителе в целях определения оптимального значения порога обнаружения для оценки интенсивности шума λ_0 используется классифицированный обучающий ППП импульсов (обучающая выборка), соответствующий приему чистого шума.

Для удобства расчетов перейдем к величине ϑ_0, обратной λ_0:

$$\vartheta_0 = 1/\lambda_0. \qquad (1)$$

Тогда экспоненциальное распределение последовательности временных интервалов между соседними импульсами ППП при приеме чистого шума имеет вид (плотность вероятности случайной величины) [4]:

$$f(t) = 1/\vartheta_0 e^{-t/\vartheta_0},\ t>0,\ \vartheta_0>0. \qquad (2)$$

Среднее значение такой случайной величины равно ϑ_0, а ее дисперсия ϑ_0^2. Эффективной несмещенной оценкой параметра ϑ_0 экспоненциального распределения (1) является выборочное среднее:

$$\widehat{\vartheta}_0 = 1/m_0 \sum_{i=1}^{m_0} t_i, \qquad (3)$$

где m_0 – объем классифицированной обучающей выборки, по которой проводится оценка параметра ϑ_0.

Как известно [4], дисперсия выборочного среднего всегда (при независимых элементах выборки размера m_0) в m_0 раз меньше дисперсии исходного распределения:

$$V\{\widehat{\vartheta}_0\} = \vartheta_0^2 / m_0, \qquad (4)$$

а математическое ожидание

$$E\{\widehat{\vartheta}_0\} = \vartheta_0. \qquad (5)$$

При $m_0 >> 1$ распределение оценки (3) приближается к гауссову с параметрами (4) и (5):

$$\begin{aligned} f(\widehat{\vartheta}_0) &= 1/\sqrt{2\pi V\{\widehat{\vartheta}_0\}} \times \\ &\times \exp\{-(\widehat{\vartheta}_0 - E\{\widehat{\vartheta}_0\})^2 / (2V\{\widehat{\vartheta}_0\})\} = \\ &= \sqrt{0{,}5 m_0 / \pi} / \vartheta_0 \times \\ &\times \exp\{-(\widehat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2 / m_0)\}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Поскольку точность оценки параметра ϑ_0 зависит от объема обучающей последовательности m_0, то и показатели качества адаптивного обнаружителя являются функциями этой величины. Поэтому вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги адаптивного обнаружителя (D_a, F_a) вычисляют усреднением этих показателей для оптимального обнаружителя (D, F) по неизвестному параметру, получаемому путем оценивания.

Таким образом, уравнение рабочей характеристики адаптивного обнаружителя с учетом выражений (4)–(6) и (8) из [5] можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_a &= \int_{-\infty}^{\infty} D(m, F; \widehat{\vartheta}_0 / \vartheta_c) f(\widehat{\vartheta}_0) \mathrm{d}\widehat{\vartheta}_0 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\widehat{\vartheta}_0 / \vartheta_c \sqrt{m} - (1 + \widehat{\vartheta}_0 / \vartheta_c) \Phi^{-1}(1-F)\Big) \times \\ &\times \sqrt{0{,}5 m_0 / \pi} / \vartheta_0 \times \\ &\times \exp\{-(\widehat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2 / m_0)\} \mathrm{d}\widehat{\vartheta}_0, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\Phi(x) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$ – интеграл вероятности, $\Phi^{-1}(x)$ – функция, обратная интегралу вероятности, $\vartheta_c = 1/\lambda_c$.

Вычислить уравнение (7) аналитически в простой форме не удается. Поэтому воспользуемся известной аппроксимацией интеграла вероятности (ошибка аппроксимации составляет 5%) [7]:

$$\Phi(x) \cong 1 - a \exp\{-b(d + x)^2\}, \qquad (8)$$

при x = 0–5,5 и $1 - \Phi(x) = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$,
где a = 0,65, b = 0,443, d = 0,75.

Остановимся более подробно на использовании приближения интеграла вероятности (8).

Из уравнения (8) следует, что его можно использовать для нахождения вероятности правильного обнаружения, значение которой превышает 0,5:

$$D = \Phi(x_D) \cong$$
$$\cong 1 - a\exp\{-b(d + x_D)^2\}, D > 0{,}5, \quad (9)$$

где нижний индекс у x «привязывает» его к искомому показателю качества обнаружения. В данном случае это вероятность правильного обнаружения.

Очевидно, что если $D < 0{,}5$, то вероятность правильного обнаружения надо вычислять через вероятность пропуска $1 - D$, которая больше 0,5, и при выполнении условий в формуле (8):

$$1 - D = \Phi(x_{1-D}) \cong$$
$$\cong 1 - a\exp\{-b(d + x_{1-D})^2\}, \quad (10)$$

откуда

$$D \cong a\exp\{-b(d + x_{1-D})^2\}, \text{ при } D < 0{,}5. \quad (11)$$

Вероятность ложной тревоги F может находиться в пределах 10^{-2}–10^{-8}. При этом условия в формуле (8) не выполняются. Поэтому F найдем через вероятность правильного необнаружения $1 - F$:

$$1 - F = \Phi(x_{1-F}) \cong$$
$$\cong 1 - a\exp\{-b(d + x_{1-F})^2\}, \quad (12)$$

откуда

$$F = 1 - \Phi(x_{1-F}) \cong a\exp\{-b(d + x_{1-F})^2\}, \quad (13)$$

$$x_{1-F} = \Phi^{-1}(\Phi(x_{1-F})) = \Phi^{-1}(1 - F) =$$
$$= \sqrt{1/b\ln(a/F)} - d. \quad (14)$$

Вероятность правильного обнаружения D в уравнении (7) с учетом формул (9) и (14) равна

$$D(m, F; \hat{\vartheta}_0/\vartheta_c) = \Phi(\hat{\vartheta}_0/\vartheta_c\sqrt{m} -$$
$$-(1 + \hat{\vartheta}_0/\vartheta_c)\Phi^{-1}(1 - F)) \cong$$
$$\cong 1 - a\exp\{-b(2d - \sqrt{1/b\ln(a/F)} +$$
$$+ (\hat{\vartheta}_0/\vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b\ln(a/F)} + d))^2\}. \quad (15)$$

Подставим выражение (15) в (7):

$$D_a = \int_{-\infty}^{\infty}\{1 - a\exp\{-b(2d - \sqrt{1/b\ln(a/F)} +$$
$$+ (\hat{\vartheta}_0/\vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b\ln(a/F)} + d))^2\}\}\times$$
$$\times\sqrt{0{,}5m_0/\pi}/\vartheta_0\times$$
$$\times\exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2/(2\vartheta_0^2/m_0)\}d\hat{\vartheta}_0 =$$
$$= 1 - a\sqrt{0{,}5m_0/\pi}/\vartheta_0\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-b(2d - \sqrt{1/b\ln(a/F)} +$$
$$+ (\hat{\vartheta}_0/\vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b\ln(a/F)} + d))^2\}\times$$
$$\times\exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2/(2\vartheta_0^2/m_0)\}d\hat{\vartheta}_0. \quad (16)$$

Выражение (16) можно привести к виду

$$D_a = 1 - a\sqrt{0{,}5m_0/\pi}/\vartheta_0\exp\{-bL^2 - M\vartheta_0^2\}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-p^2\hat{\vartheta}_0^2 + q\hat{\vartheta}_0\}d\hat{\vartheta}_0, \quad (17)$$

где

$$L = 2d - \sqrt{1/b\ln(a/F)},\ M = 0{,}5m_0/\vartheta_0^2;$$
$$q = 2(M\vartheta_0 - bLK),\ p^2 = bK^2 + M;$$
$$K = (1/\vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b\ln(a/F)} + d).$$

Для вычисления формулы (17) воспользуемся табличным интегралом [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-p^2x^2 \pm qx\}dx =$$
$$= \sqrt{\pi}/p\exp\{q^2/(4p^2)\}. \quad (18)$$

С учетом (18) выражение (17) приводится к виду

$$D_a = 1 - a\sqrt{0{,}5m_0/\pi}/\vartheta_0\times$$
$$\times\exp\{-bL^2 - M\vartheta_0^2\}\sqrt{\pi}/\sqrt{bK^2 + M}\times$$
$$\times\exp\{(2(M\vartheta_0 - bLK))^2/(4(bK^2 + M))\}. \quad (19)$$

После преобразований формулы (19) имеем

$$D_a \cong 1 - a(1 + 2bg^2(d + \sqrt{m} -$$
$$-\sqrt{1/b\ln(a/F)})^2/m_0)^{-0{,}5}\times$$
$$\times\exp\{-b(d(2 + g) + g\sqrt{m} -$$
$$-(1 + g)\sqrt{1/b\ln(a/F)})^2/(1 + 2bg^2\times$$
$$\times(d + \sqrt{m} - \sqrt{1/b\ln(a/F)})^2/m_0)\}, \quad (20)$$

при $D_a > 0{,}5$.

Проведем проверку правильности полученного выражения. Положим, $m_0 \to \infty$, и из уравнения (20) получим

$$\lim_{m_0\to\infty} D_a \cong 1 - \exp\{-b(d(2 + g) +$$
$$+ g\sqrt{m} - (1 + g)\sqrt{1/b\ln(a/F)})^2\} \cong D. \quad (21)$$

Замечаем, что формула (21) представляет собой рабочую характеристику оптимального обнаружителя с точно известными параметрами [5]. Это подтверждает правильность выполненных преобразований.

Обратим внимание на то, что в известных авторам работах условную вероятность ложной тревоги адаптивного обнаружителя не рассматривают. Однако ее анализ приводит к интересным для практики результатам. Как отмечалось, вероятность ложной тревоги адаптивного обнаружителя можно получить, усредняя по неизвестному параметру выражение для вероятности ложной тревоги оптимального обнаружителя:

$$F_a(m,F;\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0)=\Phi(\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0(\sqrt{m}-$$
$$-\Phi^{-1}(1-F))-\sqrt{m}).$$

Далее для использования аппроксимации интеграла вероятности перейдем к вероятности правильного необнаружения:

$$D_{\text{пр.н}}(m,F;\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0)=1-F_a(m,F;\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0)=$$
$$=1-\Phi(\sqrt{m}-\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0(\sqrt{m}-\Phi^{-1}(1-F)))=$$
$$=\Phi(\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0(\sqrt{m}-\Phi^{-1}(1-F))-\sqrt{m})=$$
$$=\Phi(\sqrt{m}+\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0\times$$
$$\times(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-d-\sqrt{m})). \qquad (22)$$

Вероятность правильного необнаружения адаптивного обнаружителя получаем, усредняя выражение (22) по неизвестному параметру

$$D_{\text{пр.н.а}}\cong\int_{-\infty}^{\infty}D_{\text{пр.н}}(m,F;\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0)f(\hat{\vartheta}_0)d\hat{\vartheta}_0=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\sqrt{m}+\hat{\vartheta}_0/\vartheta_0(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-d-$$
$$-\sqrt{m}))\sqrt{0{,}5m_0/\pi}/\vartheta_0\times$$
$$\times\exp\{-(\hat{\vartheta}_0-\vartheta_0)^2/(2\vartheta_0^2/m_0)\}d\hat{\vartheta}_0. \qquad (23)$$

Проводя преобразования уравнения (23), аналогичные получению вероятности правильного обнаружения, получаем

$$D_{\text{пр.н.а}}\cong 1-a(1+2b(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-$$
$$-d-\sqrt{m})^2/m_0)^{-0{,}5}\times$$
$$\times\exp\{-\ln(a/F)/(1+$$
$$+2b(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-d-\sqrt{m})^2/m_0)\}, \qquad (24)$$

откуда

$$F_a=1-D_{\text{пр.н.а}}\cong a(1+2b(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-$$
$$-d-\sqrt{m})^2/m_0)^{-0{,}5}\times\exp\{-\ln(a/F)/(1+$$
$$+2b(\sqrt{1/b\ln(a/F)}-d-\sqrt{m})^2/m_0)\}. \qquad (25)$$

В формуле (25) значения m должны выбираться не произвольно, а, как и в публикации [5], с учетом обеспечения заданных D и F при располагаемом g:

$$m=((\Phi^{-1}(D)+(1+g)\Phi^{-1}(1-F))/g)^2. \qquad (26)$$

При $m_0\to\infty$ из выражения (27) получаем

$$\lim_{m_0\to\infty}F_a\cong a\exp\{-\ln(a/F)\}\cong F. \qquad (27)$$

Логарифмируя выражение (27), имеем $\ln(F_a/a)\approx\approx-\ln(a/F)$ и $F_a\approx F$, что подтверждает правильность выполненных преобразований.

Заключение. Итак, в адаптивном обнаружителе для стабилизации условной вероятности ложной тревоги осуществляется подстройка порога обнаружения по классифицированной обучающей выборке, которой является «шумовой» ППП.

Представленная методика расчета рабочих характеристик адаптивного обнаружителя слабых оптических сигналов позволила получить сравнительно простые выражения для условных вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги. Они в дальнейшем могут быть применены различными пользователями для конкретного анализа работы адаптивных обнаружителей слабых оптических сигналов, сравнения их с оптимальными.

Литература

1. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи. М.: Связь, 1971. 264 с.
2. Макарова С. Н. Обнаружение слабых сигналов в оптическом диапазоне волн // Теория и техника радиолокации: Тр. МАИ. 1972. Вып. 207: Машиностроение. С. 198–208.
3. Сигналы и помехи в лазерной локации / под ред. В. Е. Зуева. М.: Радио и связь, 1985. 264 с.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 752 с.
5. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Об оптимальном обнаружении слабых оптических сигналов // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 88–91.
6. Никитенок В. И. Быстрые непараметрические алгоритмы обнаружения сигналов. Минск: БГУ, 2010. 131 с.
7. Тамм Ю. А., Гомозова Т. М. К аппроксимации интеграла вероятности // Электросвязь. 1970. № 9. С. 77–78.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 7-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 1237 с.

References

1. Sheremet’ev A. G. *Statisticheskaya teoriya lazernoy svyazi* [Statistical theory of laser communication]. Moscow, Svyaz’ Publ., 1971. 264 p.

2. Makarova S. N. Detection of weak signals in the optical band. *Trudy MAI "Teoriya i praktika radiolokatsii"* [MAI Proceedings "Theory and practice of radiolocation"], 1972, issue 207: Mechanical Engineering, pp. 198–208 (In Russian).

3. Signaly i pomekhi v lazernoy lokatsii [Signals and hindrance in laser location]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 264 p.

4. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical basic of statistical radio technique]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1989. 752 p.

5. Nikitionak V. I., Vetokhin S. S. On the optimal detection of weak light signals. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 88–91 (In Russian).

6. Nikitionak V. I. *Bystrye neparametricheskie algoritmy obnaruzheniya signalov* [Fast nonparametric algorithms of signal detection]. Minsk, BGU Publ., 2010. 131 p.

7. Tamm Yu. A., Gomozova T. M. On approximation of the probability integral. *Elektrosvyaz'* [Telecommunications], 1970, no. 9, pp. 77–78 (In Russian).

8. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [The tables of integrals, sums, series, and multiplications]. Moscow, Nauka Publ., 2011. 1237 p.

Информация об авторах

Никитенок Виктор Иванович − кандидат технических наук, доцент кафедры физики и аэрокосмических технологий. Белорусский государственный университет (220006, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: nikitavi44@mail.ru

Ветохин Сергей Сергеевич − кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физико-химических методов сертификации продукции. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: veto@belstu.by

Бахарь Андрей Михайлович – первый заместитель начальника военного факультета. Белорусский государственный университет (220006, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: bakhar30@mail.ru

Терешко Елена Владимировна – ассистент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tereshko@belstu.by

Information about the authors

Nikitsionak Viktar Ivanavich − PhD (Engineering), Associate Professor, the Department of Physics and Aerospace Technologies. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nikitavi44@mail.ru

Vetokhin Siarhei Siarheevich − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department for Physical and Chemical Methods of Testing. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: veto@belstu.by

Bakhar Andrey Mikhaylavich – Deputy Head of the Military Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bakhar30@mail.ru

Tereshko Elena Vladimirovna – assistant lecturer, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tereshko@belstu.by

Поступила 10.05.2018