УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Цель работы – описание трехмерных несимметрических однородных пространств, допускающих нормальную связность, вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии. Объектом исследования являются несимметрические пространства и связности на них. В статье определены основные понятия – изотропно-точная пара, редуктивное пространство, каноническое разложение, симметрическое пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, нормальная связность. Приведено локальное описание трехмерных несимметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих нормальную связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны и кручения указанных связностей, выписаны канонические связности и естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии указанных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. Результаты работы могут использоваться при исследовании многообразий, а также применяться в различных областях математики и физики, так как многие важные проблемы в этих областях связаны с исследованиями инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: нормальная связность, симметрическое пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

NORMAL CONNECTIONS ON NON-SYMMETRIC HOMOGENEOUS SPACES

The purpose of the work is the description of three-dimensional non-symmetric homogeneous spaces that allow normal connections together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras. The object of investigation – non-symmetric spaces and connections on them. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, a canonical decomposition, a symmetric space, an affine connection, curvature and torsion tensors, a holonomy algebra and normal connection are defined. The local description of three-dimensional non-symmetric homogeneous spaces with unsolvable Lie group of transformations, allowing normal connections, is given. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of Lie algebra and its subalgebra. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections are found. We have studed the holonomy algebras on the spaces and have found when the invariant connection is normal. The results can be used in the study of manifolds and can find application in various areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces.

Key words: normal connection, symmetric space, transformation group, holonomy algebra.

Введение. Теория связностей играет важную роль во многих областях математики и физики, например, калибровочные поля, лежащие в основе моделей математической физики, представляют собой компоненты локальной формы связности. Связность является нормальной, если каждый элемент группы преобразований отображает расслоение голономии в себя. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многобразия [1]. Исследование нормальной связности наряду с другими условиями позволяет получить далеко идущие результаты об излучаемых многобразиях (см., например, работы Яно К., Исихара Ш., Эрбахера Ж., Чена Б. и др., обзор исследований этого направления дан в публикации [2]). Цель этой работы – описать трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, сами связности, их тензоры кривизны, кручения и алгебры голономии. Настоящая статья является продолжением работы автора [3] о нормальных связностях на однородных пространствах, в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нормальные связности, но внимание сосредоточено на несимметрических однородных пространствах.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Если подгруппа G связна, то однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно* при существовании разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, а само разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим* [4]. Если, кроме того, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ локально задает *симметрическое пространство* $M = \bar{G}/G$, в противном случае пространство не является симметрическим.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Если пространство допускает инвариантную аффинную связность, то оно является изотропно-точным [4]. Редуктивные и симметрические пространства всегда допускают инвариантную аффинную связность.

Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ [4].

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$). Редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$; она называется *естественной связностью без кручения*.

Классификация несимметрических пространств, допускающих нормальные связности. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ и полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры; n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$; m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема 1. Все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.3.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0
3.3.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

Для получения указанного результата найдены все трехмерные редуктивные пары с неразрешимыми $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ (с подробным описанием можно ознакомиться в публикации [3]), определены пары, допускающие нормальную связность, и выбраны несимметрические пары.

Действительно, пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, такая что редуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ допускает нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы. Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ [3]:

$$3.3 \begin{pmatrix} x & y & \\ z & -x & \\ & & \end{pmatrix}; \quad 3.4 \begin{pmatrix} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{pmatrix}; \quad 3.5 \begin{pmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры по умолчанию будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 3.3. Обозначим через $\mathfrak{h}$ нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Заметим, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли.

Имеем

$$\bar{\mathfrak{g}}=\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}),$$

где

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_2,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_3,$$
$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_1,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2.$$

Поэтому

$$[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_3u_3,[u_1,u_3]=\beta_1u_1,[u_2,u_3]=\gamma_2u_2.$$

Здесь и далее параметры принадлежат $\mathbb{R}$ (если не оговорено противное).

Используя тождество Якоби, видим, что $a_1=0$, $\beta_1=\gamma_2$, а $\alpha_3\gamma_2=0$. При $\alpha_3=\gamma_2=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, являющейся симметрической. При $\alpha_3\neq 0,\gamma_2=0$ отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i)=e_i, i=1,2,3, \pi(u_1)=u_1;$$
$$\pi(u_2)=u_2,\pi(u_3)=\frac{1}{\alpha_3}u_3,$$

показывает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 3.3.2 (см. формулировку теоремы 1). При $\alpha_3=0$, $\gamma_2\neq 0$ отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i)=e_i,\ i=1,2,3, \pi(u_1)=u_1;$$
$$\pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=\gamma_2u_3,$$

показывает, что пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 3.3.3 эквивалентны.

Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$, мы видим, что тривиальная пара и 3.3.2 не эквивалентны. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$, заключаем, что 3.3.3 и тривиальная пара также не эквивалентны. Поскольку $Z\bar{\mathfrak{g}}_2=\mathbb{R}u_3$ и $Z\bar{\mathfrak{g}}_3=0$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.2 не эквивалентны.

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности на этих пространствах имеют вид, указанный далее.

Пара	Аффинная связность
3.3.2, 3.3.3	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\-p_{3,2}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}$

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$. В случаях 3.3.2, 3.3.3 при $r_{3,3}=0$, $r_{1,1}=-p_{1,3}$ связность имеет те же геодезические, что и каноническая. Выпишем, когда связность является естественной связностью без кручения.

Пара	Естественная связность без кручения
3.3.2	$p_{1,3}=r_{1,1}=r_{3,3}=0, p_{3,2}=1/2$
3.3.3	$p_{3,2}=r_{3,3}=0, p_{1,3}=-r_{1,1}=1/2$

Тензоры кривизны и кручения на редуктивных несимметрических пространствах выглядят следующим образом:

Пара	Тензор кривизны
3.3.2	$\begin{pmatrix}-p_{1,3}p_{3,2}-r_{1,1}&0&0\\0&-p_{1,3}p_{3,2}-r_{1,1}&0\\0&0&2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}\\-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}&0&0\end{pmatrix}$
3.3.3	$\begin{pmatrix}-p_{1,3}p_{3,2}&0&0\\0&-p_{1,3}p_{3,2}&0\\0&0&2p_{1,3}p_{3,2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}-p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-p_{1,3}\\-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}+p_{3,2}&0&0\end{pmatrix}$
Пара	**Тензор кручения**
3.3.2	$(0,0,2p_{3,2}-1),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1},0)$
3.3.3	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1}-1,0,0),(0,p_{1,3}-r_{1,1}-1,0)$

В случае 3.3.2 связность нормальна, если $p_{1,3}\neq 0, p_{3,2}\neq 0$, тогда при $r_{3,3}=-2r_{1,1}$ алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, а при

$r_{3,3} \neq -2r_{1,1}$ алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$; в случае 3.3.3 связность нормальна, если $r_{3,3} = -2r_{1,1}$, $p_{1,3} \neq 0, p_{3,2} \neq 0$, тогда алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$.

В случаях 3.4 и 3.5 получаем только симметрические пары.

Теорема 2. Все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима $(\mathfrak{g} \neq \{0\})$, локально имеют следующий вид:

2.21.4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

1.1.7	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	$e_1 + u_3$	0
u_2	u_2	$-e_1 - u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.3.3	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$e_1 + u_3$	0
u_2	$-u_1$	$-e_1 - u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.3.4	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1 + u_3$	0
u_2	$-u_1$	$e_1 - u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.8.2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

Аналогично приведенному в доказательстве теоремы 1 для получения указанного результата найдены все трехмерные редуктивные пары с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, определены пары, допускающие нормальную связность, и выбраны несимметрические пары.

Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получаем, что редуктивные несимметрические пространства, допускающие нормальную связность, задают только пары, указанные в теореме. Аффинные связности на найденных парах имеют вид, показанный ниже.

Пара	Аффинная связность
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1} + q_{1,2} & r_{1,2} + q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1} + 2q_{1,2} + p_{1,3} \end{pmatrix}$

Инвариантная связность нормальна, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$; например, в случае 2.21.4 это верно при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{1,2} \neq 1$, тогда алгебра голономии

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix} \middle| \, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

в противном случае алгебра голономии нулевая.

Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая.

Пара	Геодезические совпадают с геодезическими канонической связности
1.1.7	$q_{3,1} = -p_{3,2}$, $r_{3,3} = 0$, $r_{1,1} = -p_{1,3}$, $r_{2,2} = -q_{2,3}$
1.3.3	$p_{3,1} = 0$, $r_{3,3} = 0$, $r_{1,1} = -p_{1,3}$, $r_{1,2} = p_{2,3}$
1.3.4	$p_{3,1} = 0$, $r_{3,3} = 0$, $r_{1,1} = -p_{1,3}$, $r_{1,2} = p_{2,3}$
1.8.2	$q_{1,2} = 0$, $r_{1,3} = 0$, $r_{1,1} = -p_{1,3}$, $r_{1,2} = -q_{1,3}$
2.21.4	$p_{1,2}$ – любое

Далее выпишем, при каких условиях связность является естественной связностью без кручения.

Пара	Естественная связность без кручения
1.1.7	$q_{3,1} = -1/2$, $p_{3,2} = 1/2$, $r_{3,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{2,2} = q_{2,3} = 0$
1.3.3	$p_{3,1} = r_{3,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{1,2} = p_{2,3} = 0$, $p_{3,2} = 1/2$
1.3.4	$p_{3,1} = r_{3,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{1,2} = p_{2,3} = 0$, $p_{3,2} = 1/2$
1.8.2	$q_{1,2} = r_{1,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{1,2} = q_{1,3} = 0$, $p_{1,2} = 1/2$
2.21.4	$p_{1,2} = 1/2$

Заключение. Таким образом, найдены все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальную связность, инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, в теории представлений, теоретической физике, а также других разделах современной математики и физики.

Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Моск. ун-т, 1960. 307 с.

2. Лумисте Ю. Г. Дифференциальная геометрия подмногообразий // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1975. Т. 13. С. 273–340.

3. Можей Н. П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60, № 6. С. 28–36.

4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.

References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p.

2. Lumiste U. G. Differential geometry of submanifolds. *Itogi Nauki i Tekhniki* [Results of Science and Technology]. Series Algebra, Topology, Geometry, 1975, vol. 13, pp. 273–340 (In Russian).

3. Mozhey N. P. Normal connections on reductive homogeneous spaces with an unsolvable transformation group. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 28–36 (In Russian).

4. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@ mail.ru

Поступила 02.03.2018