УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В статье рассматривается решение задачи стабилизации в общециклическом случае для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи стабилизации для исследуемой системы. При решении задачи стабилизации используются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Задача стабилизации такой системы рассматривается для случая, когда неразрешима задача модального управления.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, стабилизация, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

STABILIZATION FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM IN GENERAL CYCLIC CASE

The paper deals with the stabilization problem for the stationary two-dimensional dynamical system with retarded argument of neutral type with one input and one state delay in the general cyclic case. The definition of the stabilization problem for the system is given. To solve this problem we use linear regulators of feedback type, comprising both linear and integral part. The regulators are obtained in an explicit form as a basic function of the initial parameters of the system and its state vector. The problem of stabilizing such a system is considered for the case when the modal control problem is insoluble.

Key words: neutral type systems, modal control, stabilization, regulators, feedback control, lag.

Введение. Задача стабилизации является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–8] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В силу определения задачи модального управления, если она разрешима, то система нейтрального типа будет стабилизируема. В статьях [7, 8] изучены случаи разрешимости задачи модального управления в общециклическом случае. В этой статье изучается задача стабилизации системы в общециклическом случае, которая не является модально управляемой.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \ t > 0, \tag{1}$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ – постоянные (2×2)-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 2-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 1]$ («$'$» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=1}^{M} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s) ds, \tag{2}$$

где q_{00}, q_{ij} – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \ x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Определение. Система (1) стабилизируема регулятором вида (2), если найдется регулятор (2) такой, что нулевое решение замкнутой системы (1), (2) будет устойчиво по Ляпунову или асимптотически устойчиво.

Известно, что система (1) (для произвольной системы нейтрального типа данное утверждение может быть неверно) будет стабилизируемой регулятором вида (2) в том и только в том случае, когда найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет корни только с отрицательной действительной частью.

Введем (2×2)-матрицы:

$$\mathrm{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$
$$W(\lambda) = \left[\mathrm{A}(\lambda)b, \quad b\right], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right), (c \neq 0).$$

Матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где β_i $(i = 0, 1, 2)$, γ_0 – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2$.

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U(\lambda) = \left(\tfrac{1}{c}\eta_1(\lambda) - a_1(\lambda), \quad \eta_2(\lambda) - a_2(\lambda)\right).$$

Если $\beta_1 = 0$, то в этом случае система (1) будет модально управляема при выполнении условия $\gamma_0 + e^{-\beta_0 h} + \beta_0 e^{-\beta_0 h} \neq 0$. Если $\gamma_0 + e^{-\beta_0 h} + \beta_0 e^{-\beta_0 h} = 0$, то число $\lambda = \beta_0$ для любых линейных регуляторов $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ будет корнем характеристического уравнения. Следовательно, стабилизация возможна только при выполнении условия $\beta_0 < 0$. Замыкая систему регулятором $\eta_1(\lambda) = 0, \eta_2(\lambda) = -1$, получим устойчивое характеристическое уравнение $(\beta_0 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$.

Пусть $\beta_1 \neq 0$. Потребуем, чтобы определитель замкнутой системы был бы равен

$$\det\begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda & c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right) \\ \frac{1}{c}\eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) - \lambda \end{bmatrix} \equiv$$
$$\equiv \lambda^2 - \lambda\left(\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h}\right) + \left(\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda\right)\eta_2(\lambda) -$$
$$-\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right)\eta_1(\lambda) =$$
$$= \lambda^2 + p_1\lambda + p_2, \; p_1, p_2 > 0.$$

Выражая $\eta_2(\lambda)$, получим

$$\eta_2(\lambda) = \frac{\left(p_1 + \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h}\right)\lambda + p_2}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} + \frac{\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right)\eta_1(\lambda)}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda}. \quad (4)$$

Подберем целую функцию $\eta_1(\lambda)$ таким образом, чтобы $\eta_2(\lambda)$ была бы также целой функцией. Для этого необходимо, чтобы для тех $\lambda_n \in \mathbb{C}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda = 0, \quad (5)$$

было выполнено соотношение

$$\left(p_1 + \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_n h}\right)\lambda_n + p_2 +$$
$$+\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda_n h} + \lambda_n e^{-\lambda_n h}\right)\eta_1(\lambda_n) = 0.$$

Отсюда, учитывая (5): $e^{-\lambda_n h} = \dfrac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1}$, получим

$$\left(p_1 + \beta_0 + \beta_1 \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1}\right)\lambda_n + p_2 +$$
$$+\left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1} + \lambda_n \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1}\right)\eta_1(\lambda_n) = 0,$$

или

$$\eta_1(\lambda_n) = -\beta_1 \frac{\lambda_n^2 + p_1\lambda_n + p_2}{\lambda_n^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda_n + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1},$$

или

$$\eta_1(\lambda_n) = -\beta_1 \frac{\lambda_n^2 + p_1\lambda_n + p_2}{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n - \xi_2)}.$$

В публикации [7] показано, что задача модального управления разрешима в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\delta(\xi_i) = \beta_0 + \beta_0 e^{-\xi_i h} - \xi_i \neq 0, \; i = 1, 2.$$

Рассмотрим возможные случаи, когда задача модального управления не имеет решения.

1) $\delta(\xi_i) = 0, \operatorname{Re}\xi_i < 0, i = 1, 2.$ В качестве p_1, p_2 можно взять $p_1 = \gamma_1 - \beta_0$, $p_2 = \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1$. Тогда положим, $\eta_1(\lambda) = -\beta_1$. Из формулы (4) находим

$$\eta_2(\lambda) = \frac{\left(\gamma_1 + \beta_1 e^{-\lambda h}\right)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} - \frac{\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right)\beta_1}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} =$$
$$= \frac{\gamma_1\lambda - \beta_0\gamma_1 - \gamma_1\beta_1 e^{-\lambda h}}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} = -\gamma_1.$$

Таким образом, в случае 1 система (1) стабилизируема регулятором вида (2).

2) $\delta(\xi_1) = 0, \xi_1 < 0, \delta(\xi_2) \neq 0, \xi_2 \geq 0.$ В качестве p_1, p_2 можно взять $p_1 = 1 - \xi_1$, $p_2 = -\xi_1$. Тогда

$$\eta_1(\lambda_n) = -\beta_1 \frac{\lambda_n^2 + (1-\xi_1)\lambda_n - \xi_1}{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n - \xi_2)} =$$

$$= -\beta_1 \frac{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n + 1)}{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n - \xi_2)} = -\beta_1 \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - \xi_2} =$$

$$= -\beta_1 \frac{\lambda_n - \xi_2 + \xi_2 + 1}{\lambda_n - \xi_2} = -\beta_1 - \beta_1(\xi_2 + 1)\frac{1}{\lambda_n - \xi_2}.$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\eta_1(\lambda) = -\beta_1 - \beta_1(\xi_2+1)\frac{\delta(\xi_2) - \beta_0 - \beta_1 e^{-\lambda h} + \lambda}{\delta(\xi_2)(\lambda - \xi_2)} =$$

$$= -\beta_1 - \beta_1(\xi_2+1)\frac{\beta_0 + \beta_1 e^{-\xi_2 h} - \xi_2 - \beta_0 - \beta_1 e^{-\lambda h} + \lambda}{\delta(\xi_2)(\lambda - \xi_2)} =$$

$$= -\beta_1 - \beta_1(\xi_2+1)\left(\frac{1}{\delta(\xi_2)} + \frac{\beta_1}{\delta(\xi_2)}\frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi_2}\right) =$$

$$= -\beta_1 - \frac{\beta_1(\xi_2+1)}{\delta(\xi_2)} - \frac{\beta_1^2(\xi_2+1)}{\delta(\xi_2)}\frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi_2}$$

при $\lambda = \lambda_n$, удовлетворяющих уравнению (5), является в частотной области регулятором вида (2). Подставим полученный регулятор $\eta_1(\lambda)$ в формулу (4). Произведя деление квазиполиномов, приходим к следующему регулятору:

$$\eta_2(\lambda) = \xi_1 - \beta_0 - 1 + \frac{\beta_1(\xi_2+1)}{\delta(\xi_2)} e^{-\lambda h} +$$

$$+ \frac{\beta_1(\xi_2+1)(\xi_1 - \beta_0)}{\delta(\xi_2)} \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi_2}.$$

Таким образом, в случае 2 система (1) стабилизируема регулятором вида (2).

3) $\delta(\xi_i) = 0, \operatorname{Re}\xi_i \geq 0, i = 1, 2$. Нетрудно проверить, что числа $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ в этом случае для любых регуляторов вида (2) будут являться корнями характеристического уравнения замкнутой этими регуляторами системы, и, следовательно, система (1) будет не стабилизируема.

4) В случае когда $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, система (1) модально управляема тогда и только тогда, если $\delta(\xi) \neq 0$. Пусть теперь $\delta(\xi) = 0, \xi < 0$. Этот случай совпадает со случаем 1. Стабилизирующий регулятор можно взять тот же. Если $\delta(\xi) = 0, \xi \geq 0$, то стабилизация невозможна, так как число $\xi \geq 0$ будет корнем характеристического уравнения замкнутой системы для любых регуляторов вида (2).

Замечание. В полученных регуляторах требуется перейти из частотной во временную область. При этом необходимо придерживаться правил, перечисленных ниже.

1. Слагаемые вида $\alpha\lambda^i e^{-j\lambda h} x_k(\lambda)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в частотной области соответствуют слагаемым $\alpha \dfrac{d^i x_k(t - jh)}{dt^i}$ во временной области.

2. Слагаемые вида $\alpha \dfrac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} x_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$ в частотной области в силу теоремы о свертке соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^{0} H(t+s)H(h+s)e^{-(h+s)\xi} x_k(t+s)\,ds.$$

3. Слагаемые вида $\alpha\left(\dfrac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi)^2} - \dfrac{he^{-\xi h}}{(\lambda - \xi)}\right) x_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$ в частотной области в силу теоремы о свертке соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^{0} H(t+s)H(h+s)(-h-s)e^{-(h+s)\xi} x_k(t+s)\,ds.$$

Заключение. В статье полностью решена задача стабилизации линейной стационарной системы с запаздыванием нейтрального типа вида (1) в общециклическом случае, когда неразрешима задача модального управления. Также в явном виде получены стабилизирующие такую систему регуляторы.

Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.

4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.

5. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

6. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.

4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.

5. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

6. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.05.2018