УДК 517.987.1

С. В. Пономарева[1], О. Н. Пыжкова[2], Л. Д. Яроцкая[2]
[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ НА МНОГОМЕРНОЙ ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматриваются уравнения первого рода со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов в пространстве абсолютно непрерывных на ограниченной пирамидальной области функций. К таким уравнениям приводят задачи как из некоторых разделов математики, в частности дифференциальных уравнений, так и из физики, механики и других естественных наук. При этом проблема обращения с точки зрения приложений является одной из центральных. С этой проблемой тесно связана задача получения условий разрешимости рассматриваемых уравнений в различных пространствах.

Ограничимся в данной работе случаем абсолютной непрерывности весовой функции и значениями параметра на промежутке $0 < \alpha < 1$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Решение подобного уравнения с целыми степенями логарифма было представлено в работе [1], но с использованием производной от выражения, содержащего интеграл от свободного члена с функцией Вольтерра в ядре. Там же была предложена идея решения уравнения с действительной степенью логарифма. В публикации [2] были анонсированы достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций и представлен другой вид решения в терминах правой части (одномерный случай). Данная работа является продолжением исследования задачи в этом направлении и расширяет результаты [2] на случай многомерной пирамидальной области. Уравнение решается методами дробного интегрирования с использованием обобщения на многомерную пирамидальную область классических интегралов Римана – Лиувилля, специальных функций Вольтерра и операторов типа свертки. Теория дробных интегралов и методика их применения к решению различного рода прикладных задач достаточно полно описана в работах [1] и [3].

Ключевые слова: интегральное уравнение, уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, интегральный оператор типа свертки.

S. V. Ponomareva[1], O. N. Pyzhkova[2], L. D. Yarotskaya[2]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

TO THE QUESTION ON THE SOLVABILITY OF EQUATIONS WITH POWER-LOGARITHMIC KERNELS ON A MULTIDIMENSIONAL PYRAMIDAL DOMAIN

We consider equations of the first kind with power-logarithmic kernels with real powers of logarithms in the space of absolutely continuous functions on a bounded pyramidal domain. Such equations are caused by the problems from certain sections of mathematics, in particular, from differential equations, and from physics, mechanics, and other natural sciences. At the same time, the problem of addressing from the point of view of applications is one of the central ones. The problem of obtaining conditions for the solvability of the equations in different spaces is closely related to this problem.

We confine ourselves in this paper to the case of absolute continuity of the weight function and the values of the parameter on the interval $0 < \alpha < 1$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). The solution of such an equation with integer powers of the logarithm was presented in [1], but using the derivative of the expression containing the integral of the free term with the Volterra function in the nucleus. In the same place, the idea of solving an equation with real power of the logarithm was proposed. In [2], sufficient conditions were stated for the solvability of the equation in the space of functions that are absolutely continuous on the interval and another solution is presented in terms of the right-hand side (one-dimensional case). This paper is a continuation of the investigation of the problem in this direction and extends the results of [2] to the case of a multidimensional pyramidal region. The equation is solved by fractional integration methods using generalization to the multidimensional pyramidal region of classical Riemann – Liouville integrals, special Volterra functions, and convolution type operators. The theory of fractional integrals and the method of their application to the solution of various kinds of applied problems are sufficiently described in [1] and [3].

Key words: integral equation, equation with power-logarithmic kernels, operator of convolution type.

Введение. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с целыми степенями логарифмов в пространствах интегрируемых и непрерывных на конечном отрезке действительной прямой функций исследовалось в монографии [1], другой вид решения и достаточные условия разрешимости в тех же пространствах были получены в публикации [2]. Основной техникой решения подобных уравнений является использование методов дробного интегрирования и дифференцирования. В работе [1] был предложен метод решения уравнений с действительными степенями логарифмов, однако не было получено условий разрешимости этого уравнения в определенных пространствах функций, при которых решение может выражаться в терминах правой части исходного уравнения. Для решения указанной задачи понадобилось исследование некоторых интегральных операторов в определенных функциональных пространствах.

Предварительные сведения. Пусть R^n – n-мерное Евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R^n}$ и $\mathbf{t}=(t_1,\ \ldots,\ t_n)\in\mathbf{R^n}$ обозначим через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^{n}x_kt_k$ их скалярное произведение; в частности для $\mathbf{1}=(1,\ \ldots,\ 1)$ $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{n}x_k$. Пусть $\mathbf{dx}=dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n$, а $\mathbf{x}>\mathbf{t}$, значит, $x_1>t_1,\ \ldots,\ x_n>t_n$.

Пусть $\mathbf{R^n_+}=\{x\in\mathbf{R^n}:x>0\}$, $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N^n_0}$, $(k_i\in\mathbf{N_0},\ i=1,\ \ldots,\ n)$ – мультииндекс с $|\mathbf{k}|=$ $=k_1+\ldots+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathbf{R^n}$, $\mathbf{k}\in\mathbf{N^n_0}$, $\mathbf{D}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ и $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R^n_+}$ положим:

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n};$$

$$\mathbf{D}^{|\mathbf{k}|}=\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial^{k_1}_{x_1}\cdot\ldots\cdot\partial^{k_n}_{x_n}};$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})=\Gamma(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(\alpha_n),$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Пусть $\mathbf{A}=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in\mathbf{R})$ – матрица порядка $n\times n$ с определителем $|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}\neq0$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a_j}=(a_{j1},\ \ldots,a_{jn})$, а элементы обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ обозначим $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения общности положим $|\mathbf{A}|=1$. Пусть еще

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=(\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x},\ldots,\mathbf{a_n}\cdot\mathbf{x});$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}=(\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(\mathbf{a_n}\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n};$$

$$\mathbf{b}=(b_1,\ \ldots,\ b_n)\in\mathbf{R^n},\quad \mathbf{c}=(c_1,\ldots,\ c_n)\in\mathbf{R^n};$$

$$-\infty<b_j,\ c_j<\infty,$$

где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$.

Основная часть. Рассмотрим уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{c,r}(x)}c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}\mathbf{ln}^{\beta}\frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}}\phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f(\mathbf{x});$$

$$\mathbf{x}\in\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b}),\ \mathbf{0}<\alpha<\mathbf{1} \qquad (1)$$

со степенно-логарифмическими ядрами по многомерной пирамидальной области:

$$\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathbf{R^n}:\ \mathbf{A}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq0,\ \ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq0\}$$

в $\mathbf{R^n}$ с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и с боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a_j}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$, $j=1,\ \ldots,n$ в предположении абсолютной непрерывности функции $c(x)$ и $\mathbf{0}<\alpha<\mathbf{1}$, $\beta>-\mathbf{1}$.

В частности, когда $\mathbf{A}=\mathbf{E}=\|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, а $\mathbf{c}=\mathbf{1}=(1,\ \ldots,\ 1)$ и $r=0$, то $\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})$ является простейшей модельной пирамидой вида $\mathbf{E_1}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathbf{R^n}:\ \mathbf{b}\geq\mathbf{t},\ \ \mathbf{t}\cdot\mathbf{1}\geq0\}$.

Известно [1, лемма 28.2], что необходимым и достаточным условием непустоты пирамиды $\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})$ является условие $(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}+\mathbf{r}>0$.

В дальнейшем нам понадобится также формула перестановки порядка пределов интегрирования [1 (28.63)]:

$$\int\limits_{\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})}\mathbf{dt}\int\limits_{\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{t})}f(\mathbf{t},\tau)\mathbf{d}\tau=\int\limits_{\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})}\mathbf{d}\tau\int\limits_{\sigma(\mathbf{b},\tau)}f(\mathbf{t},\tau)\mathbf{dt},$$

где $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{b},\ \boldsymbol{\tau})=\{\mathbf{t}\in\mathbf{R^n}:\ \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\leq\mathbf{A}\cdot\mathbf{t}\leq\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}\}$.

Заметим, что уравнение (1) можно с помощью замены переменных

$$\mathbf{t}=\mathbf{A}^{-1}\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{d}}-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{c}|};\qquad \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{c}|}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{d}=\mathbf{A^{-1}c}$, $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}=\left(\frac{y_1}{d_1},\ldots,\frac{y_n}{d_n}\right)$, $|\mathbf{c}|=c_1+\ldots+c_n$,

свести к уравнению по модельной пирамидальной области:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}\mathbf{ln}^{\beta}\frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}}\phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f(\mathbf{x});$$

$$\mathbf{x}\in\mathbf{E}_1(\mathbf{b}),\ \mathbf{0}<\alpha<\mathbf{1}, \qquad (3)$$

и поэтому в дальнейшем будем рассматривать уравнение (3) вместо (1), считая (с учетом (2)) их идентичными.

Несмотря на то, что в общем случае многомерные уравнения по пирамидальной области нельзя свести к простому повторному интегрированию, в нашем случае (классы функций, в которых это возможно, будут описаны ниже) с помощью формулы перестановки порядка интегрирования это оказывается выполнимо.

Для решения нам необходимы некоторые специальные функции и следующие обозначения, в частности:

$$\mu(\mathbf{x},\sigma,\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\mu(x_k,\,\sigma_k,\,\alpha_k);$$

$$\nu(\mathbf{x})=\prod_{k=1}^{n}\nu(x_k)\equiv\prod_{k=1}^{n}\mu(x_k,0,0);$$

$$\nu_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})=\prod_{k=1}^{n}\nu_{h_k}(x_k);$$

$$\mu(\mathbf{x},\ \sigma,\ \alpha)=\mathbf{x}^{\alpha}\left(\mathbf{ln}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)^{-\mathbf{1}-\alpha}\times$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n(\sigma+\mathbf{1})_n}{n!}\mu(\mathbf{1},-\mathbf{n}-\mathbf{1},\alpha)\mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)^{-\mathbf{n}}+\right.$$

$$\left.+O\left(\left(\mathbf{ln}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)^{-\mathbf{N}}\right)\right]=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}\left(\ln\frac{1}{x_1}\right)^{-\sigma_1-1}\cdot\ldots\times$$

$$\times\left(\ln\frac{1}{x_n}\right)^{-\sigma_n-1}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{n_k=0}^{N_k-1}\frac{(-1)^{n_k}(\sigma_k+1)_{n_k}}{n_k!}\times\right.$$

$$\left.\times\mu(1,-1-n_k,\alpha_k)\ln\left(\frac{1}{x_k}\right)^{-n_k}+O\left(\left(\ln\frac{1}{x_k}\right)^{-N_k}\right)\right],$$

где $\operatorname{Re}\sigma_i>-1,\ \left|\arg\,\ln\left(\frac{1}{x_i}\right)\right|<\pi,\quad \mathbf{x}\to\mathbf{0},\ \mathbf{x},\ \boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R^n}.$

Их определения и свойства описываются, например, в работах [1] и [4].

Специальные классы функций. Для многомерного пространства введем классы функций $I_{A_{c,r}}(L_1)$, аналогичные классам AC абсолютно непрерывных функций одномерного пространства, используя свойство абсолютно непрерывных функций быть представимыми интегралами от интегрируемых функций:

$$I_{A_{c,r}}(L_1)=\left\{f: f(\mathbf{x})=\int\limits_{A_{c,r}(b)}\phi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t};\right.$$

$$\left.\phi(\mathbf{t})\in AC(\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b}))\right\}.$$

Заметим, что если $f(\mathbf{x})\in\mathbf{I_{A_{c,r}}}(\mathbf{L_1})$, то существуют частные производные от f до порядка n включительно, и

$$\phi(\mathbf{x})=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f(\mathbf{x}),$$

где $\tilde{a}_{jk}$ – элементы обратной матрицы $\mathbf{A^{-1}}$.

Аналогично классу $AC_0[a,b]$ введем класс функций $I^0_{A_{c,r}}(L_1)$ следующим образом:

$$I^0_{A_{c,r}}(L_1)=\left\{f(\mathbf{x})\in I_{A_{c,r}}(L_1): f(\mathbf{x})\big|_{c\cdot x+r=0}=\right.$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jn}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f(\mathbf{x})\big|_{c\cdot x+r=0}=\ldots=$$

$$\left.=\prod_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f(\mathbf{x})\big|_{c\cdot x+r=0}=0\right\}.$$

Заметим, что при $n=1$ пространство $I^0_{A_{c,r}}(L_1)$ совпадает с пространством $AC_0[a,b]$ и является классом функций, представимых интегралами по пирамидальной области от своих производных.

Интегральный оператор типа свертки. В монографии [1] приводится формула обращения одномерного интегрального оператора типа свертки:

$$\left(I^{\alpha,\beta}_{a+}\varphi\right)(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x(x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\phi(t)\,dt=f(x);\quad (4)$$

$$a<x<b<\infty$$

и условия разрешимости уравнения (4) в формулировке, приведенной в теореме 1.

Теорема 1. Для разрешимости уравнения (4) в пространстве $L_p(a,b), 1\le p\le\infty$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был представим в виде

$$f(x)=\int\limits_a^x\mu_{\alpha,\beta}(x-t)\chi(t)\,dt,\ \chi(t)\in L_p(a,b).\quad (5)$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и выражается формулой

$$\varphi(x)=(E+T_{\psi})^{-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\gamma}\int\limits_a^x\mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)f(t)\,dt\right),\quad (6)$$

где оператор $(T_{\psi}\varphi)(x)=\int\limits_a^x\psi(x-t)\varphi(t)\,dt$ [1, с. 487].

Сформулируем многомерный аналог этого утверждения для модельной пирамиды $\mathbf{E_1}(\mathbf{b})=\left\{\mathbf{t}\in\mathbf{R^n}:\ \mathbf{b}\ge\mathbf{t},\ \mathbf{t}\cdot\mathbf{1}\ge0\right\}$. Введем аналог оператора (4).

Теорема 2. Для разрешимости уравнения

$$\left(I^{\alpha,\beta}_{E_1(x)}\phi\right)(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-\mathbf{1}}\mathbf{ln}^{\beta}\frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}}\phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f(\mathbf{x}),$$

в пространстве $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был представим в виде

$$f(\mathbf{x})=\int\limits_{E_1(x)}\mu_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\chi(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ \chi(\mathbf{t})\in\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1}).\quad(7)$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и выражается формулой

$$\varphi(\mathbf{x})=$$

$$=(\mathbf{E}+\mathbf{T}_\psi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\gamma}\int\limits_{E_1(x)}\mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right),\quad(8)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, оператор $(\mathbf{T}_\psi\varphi)(\mathbf{x})=$

$$=\int\limits_{E_1(x)}\psi(\mathbf{x}-\mathbf{t})\varphi(\mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

Доказательство. Используем формулу перестановки пределов интегрирования и принадлежность функции классу $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$. Далее будем следовать той же схеме доказательства, что и в одномерном случае [4].

Для того чтобы получить другой вид решения уравнения (3), введем обозначение по аналогии с целочисленным случаем [1, с. 483]:

$$\left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f\right)(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma}}\int\limits_{E_1(x)}\mu_{1-\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}-\mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t}.\quad(9)$$

Для оператора $\left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f\right)(\mathbf{x})$ в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций выполняется следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $f(\mathbf{x})\in\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$. Тогда $\left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f\right)(\mathbf{x})\in\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$.

Доказательство. Так как функция $f(\mathbf{x})\in\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$, то она представима в виде

$$f(\mathbf{x})=\int\limits_{E_1}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial t_j}\right)f(\mathbf{t})d\mathbf{t}+f(\mathbf{x})\big|_{1\cdot\mathbf{x}=0}.$$

Подставляя это выражение в (9), осуществляя перестановку порядка интегрирования во втором слагаемом по формуле Дирихле, имеем

$$\left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f\right)(\mathbf{x})=\frac{1}{\gamma}\int\limits_{E_1(x)}\mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\Bigg[f(\mathbf{t})\big|_{1\cdot\mathbf{t}=0}+$$

$$+\int\limits_{E_1(t)}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)f(\tau)d\tau\Bigg]dt=$$

$$=\frac{f(\mathbf{x})\big|_{1\cdot x=0}}{\gamma}\int\limits_{E_1(x)}\mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})dt+$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int\limits_{E_1(t)}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)f(\tau)d\tau\int\limits_{E_1(x)}\mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

В силу свойств функции $\mu_{\alpha,\beta}$ [4, с. 230] имеем $\left|\mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x})\right|\le\mathrm{K}$ на $\mathbf{E_1}(\mathbf{b})$, где $\mathrm{K}=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$. Отсюда следует принадлежность классу $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$ первого слагаемого.

Для второго слагаемого снова используем оценку $\left|\mu_{1-\alpha,-\beta}(\mathbf{x})\right|\le\mathrm{K}$ и ограниченность функции $f(\mathbf{x})$ на $\mathbf{E_1}(\mathbf{b})$, откуда следует, что и второе слагаемое принадлежит классу $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$. Это и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Оператор $J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f$ ограничен в пространстве $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$.

Лемма 4. Пусть функция $f(\mathbf{x})\in\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$. Тогда она может быть представлена в виде

$$f(\mathbf{x})=\int\limits_{E_1(x)}\mu_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t})\chi(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ \chi(\mathbf{t})\in\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1}).\quad(10)$$

Доказательство. Для доказательства используется представление, отраженное в работе [1, с. 487], а в качестве функции $\chi(\mathbf{t})\in\mathbf{I}_{\mathrm{E}_1}(\mathbf{L_1})$ можно взять $\chi(\mathbf{t})=(\mathrm{E}+\mathbf{T}_\psi)(\varphi(\mathbf{t}))$.

Далее рассматриваем пространство функций $\mathbf{I}^0_{E_1}(\mathbf{L_1})$.

Теорема 5. Пусть $f(\mathbf{x})\in\mathbf{I}^0_{E_1}(\mathbf{L_1})$. Тогда $\left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f\right)(\mathbf{x})\in\mathbf{I}^0_{E_1}(\mathbf{L_1})$, при этом

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}f\right)=J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f\right).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2, используя формулу изменения порядка интегрирования, учитывая свойства функции $\mu_{\alpha,\beta}$ и принадлежность функции $f(\mathbf{x})$ классу $\mathbf{I}^0_{E_1}(\mathbf{L_1})$, получим требуемое представление.

***Достаточные условия разрешимости уравнения* (3)**. И наконец, сформулируем следующую теорему, дающую достаточные условия разрешимости уравнения (3) и другую форму его решения.

Теорема 6. Пусть $f(\mathbf{x})\in\mathbf{I}^0_{E_1}(\mathbf{L_1})$. Тогда уравнение (3) разрешимо в $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$ и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(x)=$$

$$=(E+\mathbf{T}_\psi)^{-1}J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f\right)(x).\quad(11)$$

Доказательство. Согласно лемме 4, функция $f(x)$ представима в виде выражения (10), а значит, по теореме 2 уравнение (3) разрешимо в $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L_1})$ и его единственное решение может быть представлено в виде уравнения (8). Далее, используя теорему 5, обозначение (9) и [1, теорема 32.2], получим

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left(E + \mathbf{T}_\psi\right)^{-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} f \right) =$$

$$= \left(E + \mathbf{T}_\psi\right)^{-1} J^{E_1}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f \right)(x),$$

что равносильно формуле (11).

Заключение. Получены достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма в пространстве абсолютно непрерывных на ограниченной пирамидальной области функций; дано решение рассматриваемых уравнений в терминах правой части.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Пономарева С. В., Пыжкова О. Н. Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма // Труды БГТУ. 2017. № 2 (200): Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–14.
3. Килбас А. А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Самара: СГУ, 2009. 121 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М.: Наука, 1965–1967. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. 1967. 299 с.

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A, Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p.
2. Ponomareva S. V/, Pyzhkova O. N. Sufficient conditions for the solvability of equations with power-logarithmic kernels with the real power of the logarithm. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 2: Physics and Mathematics. Iinformatics, pp. 11–14 (In Russian).
3. Kilbas A. A. *Teoriya i prilozheniya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka* [Theory and applications of fractional differential equations]. Samara: SGU Publ., 2009. 121 p.
4. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii: v 3 tomakh* [Higher transcendental functions: in 3 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1965–1967, vol. 3: Elliptic and automorphic functions, 1967. 299 p.

Информация об авторах

Пономарева Светлана Владимировна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Яроцкая Людмила Дмитриевна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

Information about the authors

Ponomareva Svetlana Vladamirovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of General Mathematics and Informatics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by

Pyzhkova Olga Nikolaevna − PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила 25.04.2018