Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДИНАМИКА МАШИН
И ВИБРОЗАЩИТА

**Программа, методические указания и контрольные задания
для студентов заочной формы обучения
специальностей 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических
производств и предприятий строительных материалов»,
1-36 06 01 «Полиграфическое оборудование
и средства обработки информации»**

Минск 2008

УДК 621.8:531.3:534 (075.8)
ББК 34.44я7
Д46

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета.

Составители:
В. В. Белов, *Я. Г. Грода*

Рецензент
заведующий кафедрой машин и аппаратов
химических и строительных производств
доцент *П. Е. Вайтехович*

По тематическому плану изданий учебно-методической литературы университета на 2008 год. Поз. 99.

Для студентов заочной формы обучения специальностей 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов», 1-36 06 01 «Полиграфическое оборудование и средства обработки информации».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью изучения данной дисциплины является продолжение фундаментальной подготовки будущих инженеров-механиков в области механических явлений для успешного перехода к усвоению специальных предметов и для использования полученных знаний в дальнейшей деятельности. Современные требования к анализу и синтезу быстроходных машин диктуют необходимость существенного выхода за рамки стандартных курсов теоретической механики и теории машин и механизмов, в которых по понятным причинам рассматриваются, как правило, точно решаемые модели.

Более реалистические модели оказываются слишком сложными для теоретического исследования объектами. В этих условиях необходимо иметь в распоряжении методы получения хотя бы приближенных аналитических решений, дающих возможность сделать качественные и количественные оценки изучаемого явления, что особенно актуально при рассмотрении различного рода колебаний механических устройств. Основной задачей данного курса как раз и является ознакомление студентов с некоторыми из таких методов. Для понимания и усвоения применяемого при этом математического аппарата студенты должны знать дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных, теорию степенных рядов и рядов Фурье, а также общие теоремы динамики и уравнения Лагранжа второго рода.

В результате изучения курса и самостоятельного решения задач студенты должны получить навыки в построении динамических моделей, отражающих основные свойства реальных машин, и в проведении соответствующих расчетов.

В пособии представлены условия задач двух типов: жесткие и упругие системы с одной степенью свободы. К каждой задаче дается десять рисунков и таблица, содержащая числовой материал и дополнительные к тексту задачи условия.

Студент выбирает номер своего варианта по двум последним цифрам шифра: номер рисунка – по последней цифре, номер условия – по предпоследней.

Задание выполняется (как правило) в отдельной тетради, на обложке которой указываются номер работы, фамилия и инициалы студента, шифр. К каждой задаче приводятся аккуратный рисунок со всеми необходимыми обозначениями и краткое условие. Решение должно сопровождаться краткими пояснениями. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента. К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), обязательно должен прилагаться незачтенный вариант.

Следует учесть, что все нити (тросы) на схемах являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, переброшенные через блок, по нему не проскальзывают, во всех случаях качение колес происходит без скольжения. Все связи считаются идеальными.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Введение

Общие сведения о структуре машин. Жесткие и упругие системы. Динамическая модель механизма.

Аппроксимация силовых факторов

Анализ действующих на механизмы сил и их характеристики. Приводные устройства машин. Механические характеристики двигателей. Аналитические представления силовых факторов приводов и кривых сил полезных сопротивлений.

Динамика жестких систем

Динамические модели механизмов с жесткими звеньями. Приведение внешних нагрузок, масс и моментов инерции. Консервативные и диссипативные системы. Уравнения движения механизмов с одной степенью свободы. Решение уравнений движения жестких систем в простейших случаях. Динамические нагрузки на звенья механизма.

Модели механизмов с несколькими степенями свободы. Описание движения механизмов со многими степенями свободы с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Динамика механизмов с постоянными и переменными инерционными коэффициентами.

Динамика линейных упругих систем

Динамические модели упругих систем с линейными характеристиками. Уравнения Лагранжа второго рода для потенциальных сил. Малые свободные колебания одномассовой системы вблизи положения устойчивого равновесия. Фазовая плоскость и фазовые траектории.

Вынужденные колебания одномассовой системы при произвольном возмущающем воздействии. Вынужденные колебания под действием гармонического возмущения при учете сил вязкого трения.

Функция рассеяния. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний при вязком сопротивлении. Проход через резонанс при разгоне и торможении.

Вынужденные колебания при периодическом возмущении.

Динамика механизмов с переменными инерционными и упругими коэффициентами. Параметрические колебания.

Малые свободные колебания механизмов с двумя степенями свободы и их свойства. Собственные частоты и коэффициенты форм.

Динамические нагрузки приводных устройств. Двухмассовая модель механизма с линейными упругими звеньями. Двухмассовые высокочастотные системы. Механизмы с упругими валами при холостом ходе и под нагрузкой. Динамика крутильных колебаний многомассовых систем с упругими валами.

Динамика нелинейных упругих систем

Введение в нелинейные колебания. Свободные колебания в общем случае. Зависимость амплитуды нелинейных колебаний от частоты.

Системы с кусочно-линейными характеристиками. Метод припасовывания. Скелетные кривые.

Вынужденные колебания в нелинейных системах под действием периодического возмущения. Метод гармонического баланса. Амплитудно-частотная характеристика. Множественность колебательных состояний.

Колебания в системах, близких к линейным. Теория возмущений и пределы ее применимости. Построение решения нелинейного уравнения с помощью разложений по малому параметру: методы Ван-дер-Поля и Боголюбова – Митропольского.

Вынужденные колебания в системах с малым параметром при непериодическом возмущении. Автоколебания. Колебания в электромеханических системах. Применение колебаний в технике. Вибротранспорт.

Виброзащита

Защита от колебаний. Виброзащитные системы. Линейный виброизолятор при силовом и кинематическом возбуждениях. Коэффициент виброизоляции. Динамическое гашение колебаний.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

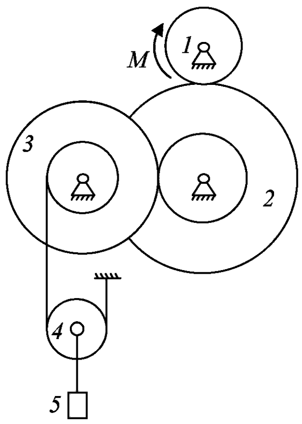
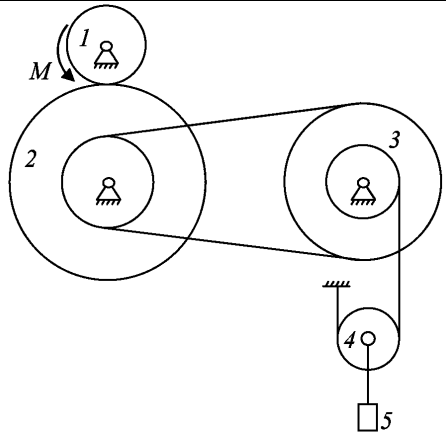
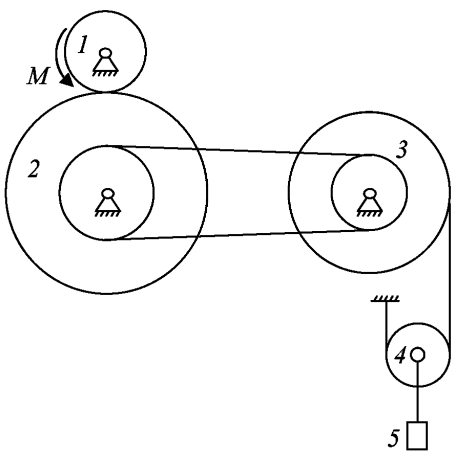
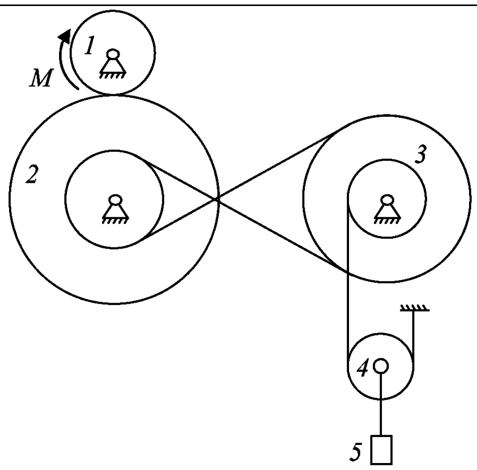
Задача 1
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

На каждом из рисунков табл. 1 изображен подъемный механизм с электрическим приводом. Валу *1* от двигателя передается вращающий момент *M*.

Найти закон движения указанного в табл. 2 звена, касательное динамическое усилие в точке контакта соответствующих колес или натяжение троса. Определить также их максимальные значения.

В начальный момент времени система покоилась. Считать колеса *1* и *4* однородными сплошными дисками, а массы ступенчатых шкивов *2* и *3* – равномерно распределенными по их внешним ободам.

Таблица 1

0		1	
2		3	

Окончание табл. 1

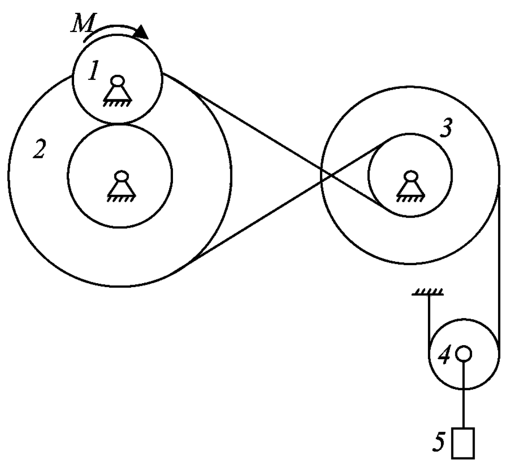
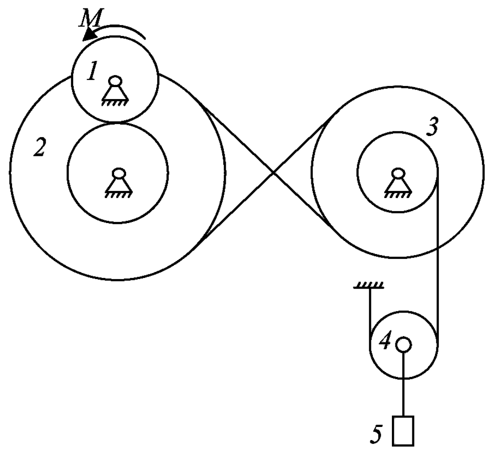
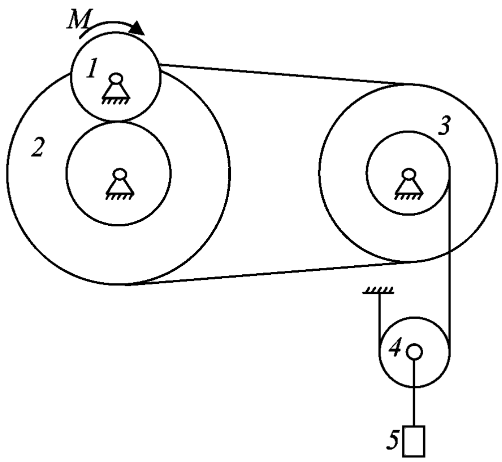
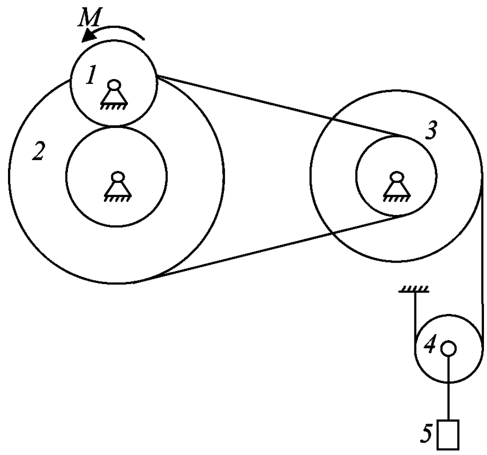
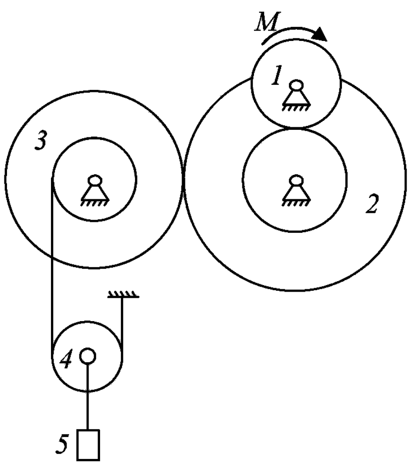
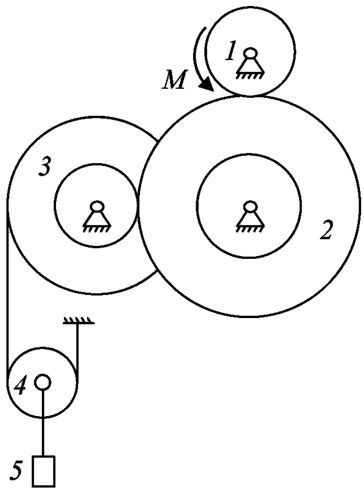
<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>
</td>
<td>5</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>
</td>
<td>7</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>
</td>
<td>9</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Таблица 2

Параметры	Номер условия									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1	5	3	9	6	8	7	4	2	5	8
m_2	10	15	11	13	14	12	16	18	17	19
m_3	15	25	16	17	23	18	21	20	19	22
m_4	5	13	7	6	14	8	9	11	12	10
m_5	50	100	80	60	70	150	90	120	110	130
R_1	0,1	0,15	0,16	0,2	0,18	0,17	0,11	0,14	0,19	0,21
R_2	0,2	0,25	0,3	0,24	0,22	0,21	0,23	0,28	0,27	0,26
r_2	0,15	0,2	0,25	0,19	0,17	0,16	0,18	0,23	0,22	0,21
R_3	0,25	0,3	0,35	0,29	0,23	0,22	0,28	0,33	0,32	0,31
r_3	0,19	0,24	0,29	0,23	0,17	0,16	0,22	0,27	0,26	0,25
R_4	0,15	0,1	0,18	0,2	0,14	0,11	0,19	0,16	0,17	0,12
M	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
M_0	200	300	250	100	150	180	280	220	120	320
Ω	10	–	30	–	25	–	15	–	20	–
τ	–	20	–	10	–	15	–	25	–	30
Закон движения	1	2	3	4	5	4	2	3	1	5
Усилие	2–3	3–4	2–3	3–4	4–5	3–4	1–2	4–5	2–3	1–2

$M_1 = M_0(1 - \omega_1 / \Omega)$, $M_2 = M_0(1 - t / \tau)$.

Единицы измерения: массы – килограммы, радиуса – метры, времени – секунды, угловой скорости – радианы в секунду, момента силы – ньютоны на метр.

Под усилием, обозначенным в табл. 2 как «2–3», следует понимать его касательную составляющую при непосредственном контакте дисков *2* и *3* или разность натяжений верхней и нижней ветвей нити, сходящей с колеса *2*, в ином случае.

Указания. Для отыскания закона движения использовать уравнение Лагранжа второго рода, выбрав в качестве обобщенной координаты параметр, определяющий положение соответствующего звена. Динамические реакции можно определять с помощью уравнения Лагранжа для части механизма или принципа Даламбера.

Пример. Механическая система состоит из трех неподвижных дисков *1–3*, подвижного блока *4* и груза *5*, соединенных между собой так, как показано на рис. 1. Шкивы *1* радиуса R_1 и *4* радиуса R_4 являются однородными сплошными дисками, а массы ступенчатых шкивов *2* и *3* равномерно распределены по их внешним ободам: радиусы их больших ступеней равны R_2 и R_3, меньших – r_2 и r_3 соответственно, m_k – масса тела с номером k (k = 1, …, 5). К шкиву *1* приложен вращающий момент $M = M_0\varphi$, где φ – угол поворота диска *1*; M_0 – постоянный коэффициент. Найти закон движения диска *3* и касательное динамическое усилие в точке контакта дисков *2* и *3*. В начальный момент времени система покоилась.

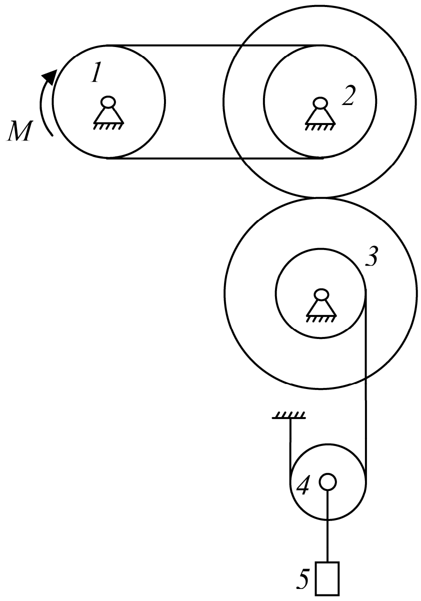


Рис. 1

Р е ш е н и е

I. *Определение закона движения.*

Для решения задачи используем уравнение Лагранжа второго рода. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол поворота φ_3 диска *3*, тогда обобщенная скорость будет равна угловой скорости диска: $\dot{\varphi}_3 = \omega_3$. Уравнение Лагранжа в этом случае будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия системы; Q – обобщенная сила.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5, \tag{2}$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2; \tag{3}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2; \tag{4}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2; \tag{5}$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2; \tag{6}$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2, \tag{7}$$

так как шкивы *1–3* совершают вращательное движение, блок *4* – плоское, а тело *5* движется поступательно. Выразим все скорости в (3)–(7) через ω_3, считая, что движение происходит без проскальзывания и тросы являются нерастяжимыми. Тогда

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2; \tag{8}$$

$$\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3; \tag{9}$$

$$\omega_3 r_3 = 2\omega_4 R_4; \tag{10}$$

$$v_4 = \omega_4 R_4; \tag{11}$$

$$v_5 = v_4. \tag{12}$$

Из соотношений (8)–(12) следует

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{R_3}{R_2}; \tag{13}$$

$$\omega_1 = \omega_3 \frac{r_2 R_3}{R_1 R_2}; \tag{14}$$

$$\omega_4 = \omega_3 \frac{r_3}{2R_4}; \tag{15}$$

$$v_4 = \frac{1}{2}\omega_3 r_3. \qquad (16)$$

Моменты инерции шкивов имеют вид

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2; \qquad (17)$$

$$I_2 = m_2 R_2^2; \qquad (18)$$

$$I_3 = m_3 R_3^2; \qquad (19)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} m_4 R_4^2. \qquad (20)$$

Подставим (3)–(7) с учетом (12)–(20) в выражение (2):

$$T = \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \left(\frac{r_2 R_3}{R_1 R_2} \right)^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \left(\frac{R_3}{R_2} \right)^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \omega_3^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_4 \left(\frac{r_3}{2} \right)^2 \omega_3^2 + \frac{1}{4} m_4 R_4^2 \left(\frac{r_3}{2R_4} \right)^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_5 \left(\frac{r_3}{2} \right)^2 \omega_3^2 = \frac{1}{2} I \omega_3^2, \qquad (21)$$

где

$$I = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{r_2 R_3}{R_2} \right)^2 + m_2 R_3^2 + m_3 R_3^2 + \frac{3}{8} m_4 r_3^2 + \frac{1}{4} m_5 r_3^2. \qquad (22)$$

Найдем обобщенную силу Q, для чего сообщим системе возможное перемещение, соответствующее возможному изменению выбранной обобщенной координаты $\delta\varphi_3$. Работу на таком перемещении совершат вращающий момент M (направление возможного поворота выбирается так, чтобы эта работа была положительной) и силы тяжести колеса *4* и груза *5*:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 - P_4 \delta s_4 - P_5 \delta s_5. \qquad (23)$$

Выразим изменения всех координат через $\delta\varphi_3$. Связи между возможными изменениями имеют такой же вид, как и между соответствующими скоростями:

$$\delta s_5 = \delta s_4 = \frac{1}{2} r_3 \delta\varphi_3; \qquad (24)$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2 R_3}{R_1 R_2}\delta\varphi_3, \tag{25}$$

поэтому

$$\delta A = M\frac{r_2 R_3}{R_1 R_2}\delta\varphi_3 - (P_4 + P_5)\frac{r_3}{2}\delta\varphi_3 = \left[M\frac{r_2 R_3}{R_1 R_2} - (P_4 + P_5)\frac{r_3}{2}\right]\delta\varphi_3. \tag{26}$$

Коэффициент при возможном изменении обобщенной координаты и есть обобщенная сила:

$$Q = M\frac{r_2 R_3}{R_1 R_2} - (P_4 + P_5)\frac{r_3}{2}. \tag{27}$$

Подставив сюда выражение для вращающего момента

$$M = M_0\varphi_1, \tag{28}$$

при учете связи между φ_1 и φ_3, аналогичной (25), получим

$$Q = M_0\left(\frac{r_2 R_3}{R_1 R_2}\right)^2 \varphi_3 - (P_4 + P_5)\frac{r_3}{2}. \tag{29}$$

Введем для краткости обозначения

$$\alpha = M_0\left(\frac{r_2 R_3}{R_1 R_2}\right)^2; \quad \beta = (P_4 + P_5)\frac{r_3}{2}, \tag{30}$$

тогда обобщенная сила примет вид

$$Q = \alpha\varphi_3 - \beta. \tag{31}$$

Теперь подставим выражения (21), (31) в (1). Входящие в уравнение Лагранжа производные имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_3} = 0; \tag{32}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_3} = I\omega_3; \tag{33}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_3}\right) = I\frac{d\omega_3}{dt}, \tag{34}$$

и, следовательно,

$$I\frac{d\omega_3}{dt}=\alpha\varphi_3-\beta, \tag{35}$$

или

$$I\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}=\alpha\varphi_3-\beta. \tag{36}$$

Последнее соотношение есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Перепишем его иначе, перенеся все слагаемые с искомой функцией в левую часть, и приведем уравнение к стандартной форме путем деления всех слагаемых на коэффициент при второй производной:

$$\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}-a^2\varphi_3=b. \tag{37}$$

Здесь введены обозначения (из (22) и (30) видно, что α и I положительны)

$$a^2=\alpha/I;\quad b=\beta/I. \tag{38}$$

Решение линейного неоднородного уравнения (37), как известно из курса высшей математики, представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного, т. е.

$$\varphi_3=\varphi_3^{(1)}+\varphi_3^{(2)}, \tag{39}$$

причем

$$\frac{d^2\varphi_3^{(1)}}{dt^2}-a^2\varphi_3^{(1)}=0, \tag{40}$$

а $\varphi_3^{(2)}$ является частным решение уравнения (37).

Решением однородных уравнений типа (40) является экспоненциальная функция, т. е.

$$\varphi_3^{(1)}=Ce^{\lambda t}, \tag{41}$$

где C – некоторая постоянная, не равная нулю, а λ – подлежащий определению параметр. Для его определения необходимо (41) подставить в (40) и потребовать, чтобы полученное равенство выполнялось тождественно. Вычислим соответствующие производные

$$\frac{d\varphi_3^{(1)}}{dt} = C\lambda e^{\lambda t}; \tag{42}$$

$$\frac{d^2\varphi_3^{(1)}}{dt^2} = C\lambda^2 e^{\lambda t} \tag{43}$$

и подставим их в (40), в результате чего получим

$$C(\lambda^2 - a^2)e^{\lambda t} = 0. \tag{44}$$

Последнее равенство выполняется тождественно, если обращается в нуль выражение в скобках:

$$\lambda^2 - a^2 = 0. \tag{45}$$

Это так называемое характеристическое уравнение дифференциального уравнения (40). Оно имеет два действительных решения

$$\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = -a,$$

определяющих две функции, линейная комбинация которых и является общим решением уравнения (40):

$$\varphi_3^{(1)} = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}. \tag{46}$$

Поскольку правая часть уравнения (37) постоянна, его частное решение будем искать в виде константы B:

$$\varphi_3^{(2)} = B. \tag{47}$$

Подставив (47) в (37), получим

$$-a^2 B = b, \tag{48}$$

т. е.

$$B = -\frac{b}{a^2}. \tag{49}$$

Подставив (46) и (47) с учетом (49) в выражение (39), получим общее решение уравнения (37) в виде

$$\varphi_3 = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - \frac{b}{a^2}. \tag{50}$$

Постоянные интегрирования определим по начальным условиям: в начальный момент времени система покоилась. Начало отсчета угла φ_3 выберем так, чтобы в начальный момент он равнялся нулю. Таким образом,

$$\varphi_3(0) = 0; \tag{51}$$

$$\omega_3(0) = 0. \tag{52}$$

Найдем выражение для угловой скорости диска *3*:

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = a(C_1 e^{at} - C_2 e^{-at}). \tag{53}$$

Подставив (50) и (53) в (51) и (52) соответственно, получим

$$0 = C_1 + C_2 - \frac{b}{a^2}; \tag{54}$$

$$0 = a(C_1 - C_2). \tag{55}$$

Из последнего равенства следует

$$C_1 = C_2, \tag{56}$$

что вместе с (54) дает

$$C_1 = C_2 = \frac{b}{2a^2}. \tag{57}$$

Тогда частное решение уравнения (37), удовлетворяющее нулевым начальным условиям (51), (52), примет вид

$$\varphi_3 = \frac{b}{2a^2}\left(e^{at} + e^{-at} - 2\right), \tag{58}$$

куда следует подставить заданные численные значения с учетом определений (22), (31) и (38).

II. *Определение динамического усилия.*

Для определения касательного динамического усилия в точке контакта дисков *2* и *3* его нужно сделать внешней силой. С этой целью необходимо выбрать в качестве механической системы тела *1* и *2* (можно выбирать в качестве системы и совокупность тел *3*, *4*, *5*, но при этом вычисления будут более громоздкими из-за большего количества тел), в результате чего воздействие (касательное) третьего колеса на второе станет внешней силой. Это представлено на рис. 2.

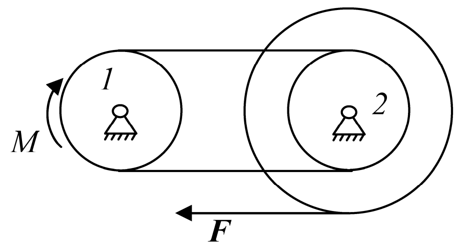


Рис. 2

Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота диска *2*. Уравнение Лагранжа в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{12}}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi_2}=Q_{12}, \tag{59}$$

где

$$T_{12}=T_1+T_2. \tag{60}$$

Выражения для кинетических энергий колес *1* и *2* были приведены выше (см. (3), (4), (17), (18)), только теперь все скорости нужно выразить через $\omega_2=\dot{\varphi}_2$.

Воспользовавшись выражением (8), для T_1 получим

$$T_1=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2=\frac{1}{2}I_1\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2\omega_2^2. \tag{61}$$

Тогда

$$T_{12}=\frac{1}{2}I_1\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2\omega_2^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}\left[I_1\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2+I_2\right]\omega_2^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1r_2^2}{2}+m_2R_2^2\right)\omega_2^2=\frac{1}{2}I_{12}\omega_2^2. \tag{62}$$

Здесь использовались соотношения (8), (17), (18) и введено обозначение

$$I_{12}=\frac{m_1r_2^2}{2}+m_2R_2^2. \tag{63}$$

Обобщенную силу найдем из выражения для виртуальной работы приложенных к рассматриваемой системе сил на возможном перемещении колеса *2*:

$$\delta A_{12} = M\delta\varphi_1 + FR_2\delta\varphi_2. \tag{64}$$

Как уже говорилось, возможные перемещения связаны между собой так же, как соответствующие скорости, поэтому (см. (8))

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2, \tag{65}$$

в результате чего соотношение (64) принимает вид

$$\delta A_{12} = \left(M\frac{r_2}{R_1} + FR_2 \right)\delta\varphi_2 \tag{66}$$

и, следовательно,

$$Q_{12} = M\frac{r_2}{R_1} + FR_2. \tag{67}$$

Подставив (62) и (67) в (59), получим

$$I_{12}\frac{d\omega_2}{dt} = M\frac{r_2}{R_1} + FR_2, \tag{68}$$

откуда найдем величину F:

$$F = \frac{1}{R_2}\left(I_{12}\frac{d\omega_2}{dt} - M\frac{r_2}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2}\left(I_{12}\frac{d\omega_2}{dt} - M_0\varphi_1\frac{r_2}{R_1} \right). \tag{69}$$

Угловая скорость шкива *2* связана с угловой скоростью диска *3* соотношением (13), поэтому

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_3}{R_2}\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{R_3}{R_2}\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}, \tag{70}$$

а углы поворотов дисков *1* и *3* связаны соотношением, подобным (14):

$$\varphi_1 = \frac{r_2 R_3}{R_1 R_2}\varphi_3, \tag{71}$$

вследствие чего выражение (69) принимает вид

$$F=\frac{1}{R_2}\left[I_{12}\frac{R_3}{R_2}\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}-M_0\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2\frac{R_3}{R_2}\varphi_3\right]=$$

$$=\frac{R_3}{R_2^2}\left[I_{12}\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}-M_0\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2\varphi_3\right]. \qquad (72)$$

Подставив сюда выражение для угла поворота диска *3* (58), получим явную зависимость динамического усилия от времени:

$$F=\frac{R_3}{R_2^2}\left[I_{12}\frac{b}{2}(e^{at}+e^{-at})-M_0\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2\frac{b}{2a^2}(e^{at}+e^{-at}-2)\right]=$$

$$=\frac{R_3 b}{2R_2^2}\left[I_{12}(e^{at}+e^{-at})-I\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2(e^{at}+e^{-at}-2)\right]. \qquad (73)$$

Здесь использовано определение величин a (38) и α (30).

Проанализируем полученное выражение. В начальный момент времени круглая скобка во втором слагаемом обращается в нуль, поэтому

$$F(0)=bI_{12}\frac{R_3}{R_2^2},$$

т. е. F является положительной величиной, и, следовательно, усилие направлено так, как показано на рис. 2. С течением времени экспонента с положительным показателем растет, а с отрицательным – убывает, так что для достаточно больших значений t слагаемыми, содержащими множитель e^{-at}, можно пренебречь. Тогда, как следует из (63) и (22), коэффициент при e^{at} можно записать в виде

$$I_{12}-I\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2=\frac{m_1 r_2^2}{2}+m_2R_2^2-\frac{m_1 r_2^2}{2}-(m_2+m_3)R_2^2-\left(\frac{3}{8}m_4+\frac{1}{4}m_5\right)\left(\frac{r_3R_2}{R_3}\right)^2=$$

$$=-\left[m_3R_2^2+\left(\frac{3}{8}m_4+\frac{1}{4}m_5\right)\left(\frac{r_3R_2}{R_3}\right)^2\right]<0,$$

т. е. с течением времени направление усилия меняется на противоположное, а его величина монотонно возрастает.

Задача 2
МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

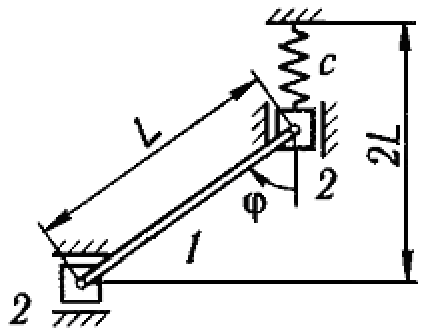
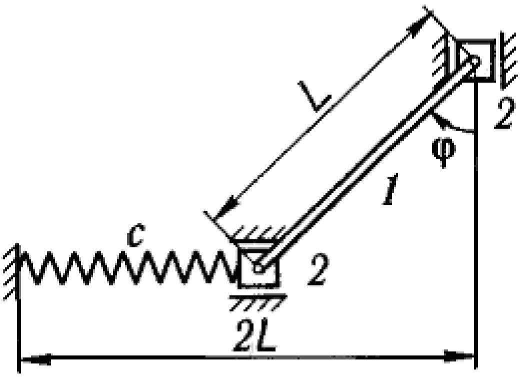
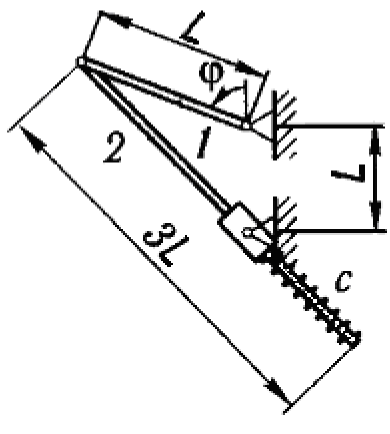
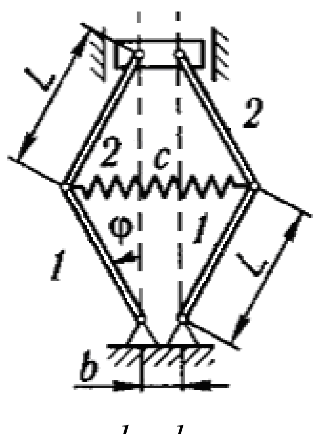
Для консервативной механической системы с одной степенью свободы требуется (рис. в табл. 1, данные в табл. 2):

1. Определить положения равновесия, пренебрегая массами упругих звеньев.

2. Провести исследование устойчивости найденных положений равновесия.

3. Составить уравнение движения вблизи положения устойчивого равновесия и найти его решение при условии, что в начальный момент времени система покоилась. Определить частоту и период малых колебаний.

Таблица 1

0		1	
2		3	 $b = l_0$

Окончание табл. 1

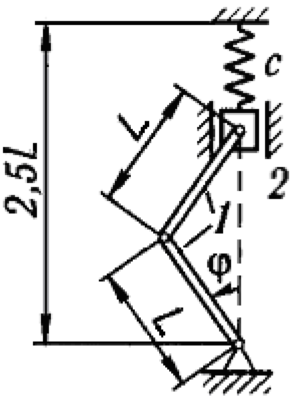
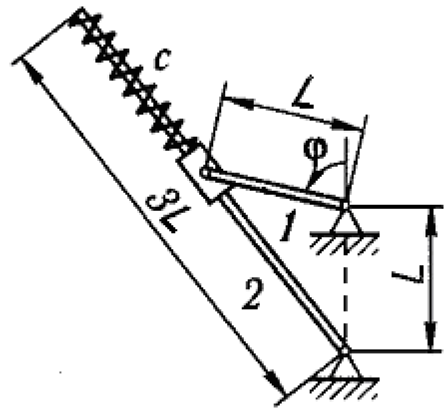
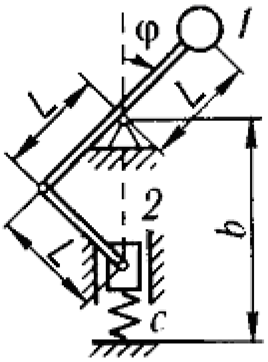
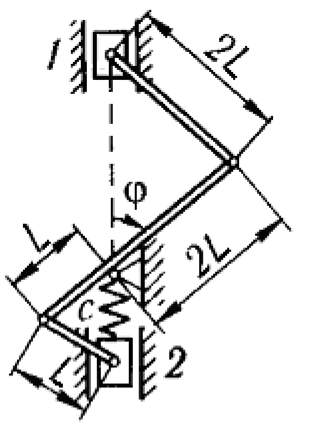
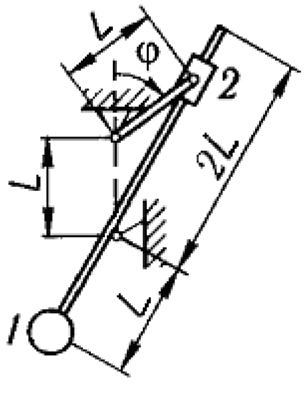
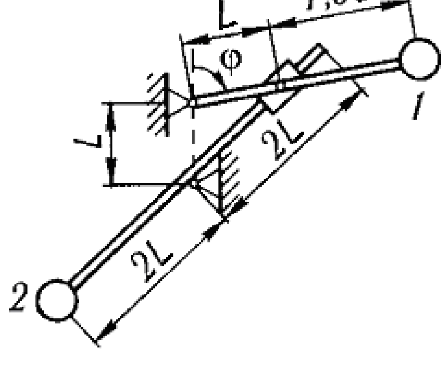
4		5	
6	 $b = 2L + l_0$	7	
8		9	

Таблица 2

Параметры	Номер условия									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	2,0	3,0	4,0	2,5	3,2	2,8	3,5	4,3	2,1	2,2
l_0	0,2	0,5	0,4	0,6	0,3	0,1	0,7	0,8	0,9	1,0
L	0,3	0,6	0,5	0,7	0,4	0,2	0,8	0,9	1,0	1,1
m_1	2	5	3	4	8	9	10	1	6	7
m_2	5	4	1	3	10	7	2	6	8	9
φ_0	0,10	0,12	0,11	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19

Единицы измерения: массы – килограммы, длины – метры, жесткости – килоньютоны на метр, угла – радианы.

На рис. 6–9 в табл. 1 стержни считаются невесомыми, для вариантов $x8$, $x9$ (x – любая цифра) параметры c и l_0 не имеют значения; через φ_0 обозначено начальное отклонение стержня от равновесного положения.

Указания. Для решения задачи следует использовать уравнение Лагранжа второго рода для случая потенциальных сил. В качестве обобщенной координаты выбрать обозначенный на рисунках угол φ. Отыскание положения устойчивого равновесия нужно осуществлять с помощью потенциальной энергии системы, которая в этом положении минимальна (все механизмы расположены в вертикальной плоскости). Если потенциальная энергия не квадратична по обобщенной координате или если кинетическая энергия зависит от нее, то эти энергии необходимо разложить в ряды по малому отклонению от равновесного значения обобщенной координаты с сохранением членов только второго порядка малости (малыми нужно считать как отклонение обобщенной координаты от равновесного значения, так и обобщенную скорость).

Пример. Механическая система состоит из двух одинаковых однородных стержней длины L и массы m, расположенных в вертикальной плоскости и соединенных между собой шарниром в точке A, как показано на рис. 1. В точке B стержень AB шарнирно соединен с ползуном массы m_1, который может перемещаться в вертикальных направляющих. Середины стержней соединены невесомой пружиной жесткости c. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна $l_0 < L$.

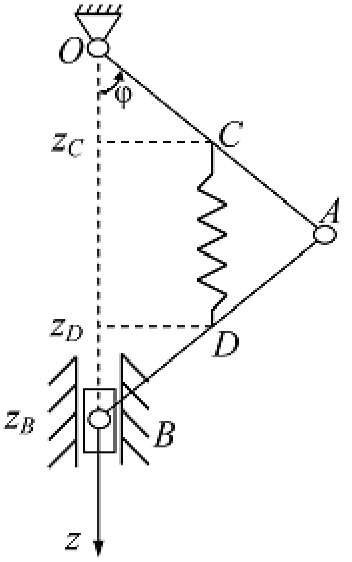


Рис. 1

Р е ш е н и е

Для решения задачи используем уравнение Лагранжа второго рода для случая потенциальных сил. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол отклонения стержня *OA* от вертикали, обозначив его через φ. Уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия системы, а U – потенциальная.

I. *Определение положения устойчивого равновесия.*

Найдем сначала потенциальную энергию. Потенциальными силами в данном случае являются силы тяжести стержней и ползуна и упругая сила пружины, поэтому

$$U = U_{OA} + U_{AB} + U_B + U_{CD}. \tag{2}$$

Выберем начало системы отсчета в точке O и направим ось z по вертикали вниз. Тогда

$$U_{OA} = -mgz_C; \tag{3}$$

$$U_{AB} = -mgz_D; \tag{4}$$

$$U_B = -m_1 g z_B; \tag{5}$$

$$U_{CD} = \frac{c}{2}(z_D - z_C - l_0)^2, \tag{6}$$

где g – ускорение свободного падения; z_C, z_D, z_B – координаты центров тяжести стержней *OA*, *AB* и ползуна *B* соответственно. Выразим эти координаты через угол φ. Из рис. 1 видно, что

$$z_C = OC\cos\varphi = \frac{1}{2}L\cos\varphi; \tag{7}$$

$$z_D = OA\cos\varphi + AD\cos\varphi = \frac{3}{2}L\cos\varphi; \tag{8}$$

$$z_B = OA\cos\varphi + AB\cos\varphi = 2L\cos\varphi, \tag{9}$$

поскольку треугольник *OAB* – равнобедренный. Подставим (7)–(9) в (3)–(6) и результат – в (2):

$$U = -mg\frac{L}{2}\cos\varphi - mg\frac{3L}{2}\cos\varphi - 2m_1 gL\cos\varphi + \frac{c}{2}(L\cos\varphi - l_0)^2 =$$

$$= -2gL(m + m_1)\cos\varphi + \frac{c}{2}(L\cos\varphi - l_0)^2. \tag{10}$$

В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна, т. е. производная от U по φ должна равняться нулю (вообще говоря, равенства нулю первой производной для определения положения минимума недостаточно – это есть условие экстремальности):

$$\frac{dU}{d\varphi} = 2gL(m + m_1)\sin\varphi - cL(L\cos\varphi - l_0)\sin\varphi =$$

$$= L\sin\varphi\left[2g(m + m_1) - c(L\cos\varphi - l_0)\right] = 0. \tag{11}$$

Равенство (11) выполняется в тех случаях, когда либо первый множитель, либо выражение в квадратных скобках равны нулю. Рассмотрим первый случай:

$$\sin\varphi = 0. \tag{12}$$

Это уравнение имеет решение

$$\varphi_1 = 0. \tag{13}$$

Все остальные решения уравнения (12) не подходят по физическому смыслу задачи. Выясним, имеет ли потенциальная энергия при этом значении минимум, для чего вычислим вторую производную от U по φ. Минимуму соответствует положительный знак этой производной при $\varphi = \varphi_1$. Находим

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = L\cos\varphi\left[2g(m+m_1) - c(L\cos\varphi - l_0)\right] + L^2 c\sin^2\varphi. \tag{14}$$

Подставив сюда $\varphi = 0$, получим

$$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = L\left[2g(m+m_1) - c(L - l_0)\right]. \tag{15}$$

По условию задачи $l_0 < L$ и поэтому в общем виде, без дополнительных условий, нельзя определить знак полученного выражения (для выяснения знака необходимо подставить в (15) численные значения всех фигурирующих в нем величин). Возможны два варианта:

1. Пусть выполняется условие

$$2g(m+m_1) > c(L - l_0). \tag{16}$$

Тогда выражение (15) положительно и, следовательно, потенциальная энергия при $\varphi = \varphi_1$ имеет минимум.

2. Если выполняется условие

$$2g(m+m_1) < c(L - l_0), \tag{17}$$

то выражение (15) отрицательно и, значит, потенциальная энергия в этой точке имеет максимум.

Теперь исследуем случай равенства нулю выражения в квадратных скобках уравнения (11):

$$2g(m+m_1) - c(L\cos\varphi - l_0) = 0. \tag{18}$$

Отсюда следует

$$\cos\varphi_2 = \frac{2g(m+m_1) + cl_0}{cL}, \tag{19}$$

так что существование решения определяется относительными величинами числителя и знаменателя в уравнении (19), поскольку косинус не может превосходить единицу. Вычтем из числителя знаменатель:

$$2g(m+m_1)+cl_0-cL=2g(m+m_1)-c(L-l_0). \qquad (20)$$

Если выполняется условие (16), то предыдущее выражение положительно, т. е. числитель больше знаменателя, и, следовательно, решений типа (19) не существует, поэтому значение $\varphi_1=0$ определяет изолированный минимум потенциальной энергии и, таким образом, является положением устойчивого равновесия. Если же выполняется условие (17), то выражение (20) отрицательно, т. е. числитель меньше знаменателя, и решения уравнения (19) существуют. При этом точка $\varphi_1=0$ соответствует максимуму потенциальной энергии. Определим знак второй производной от потенциальной энергии при $\varphi=\varphi_2$:

$$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2}=L\cos\varphi_2\left[2g(m+m_1)-c(L\cos\varphi_2-l_0)\right]+L^2c\sin^2\varphi_2=$$

$$=\frac{2g(m+m_1)+cl_0}{c}\left[2g(m+m_1)-c\left(\frac{2g(m+m_1)+cl_0}{c}-l_0\right)\right]+$$

$$+L^2c\sin^2\varphi_2=L^2c\sin^2\varphi_2>0. \qquad (21)$$

Таким образом, при условии (16) устойчивым является положение $\varphi=\varphi_1$, а при условии (17) – положение $\varphi=\varphi_2$, которое определяется решением уравнения (19).

II. *Уравнение движения системы вблизи положения устойчивого равновесия и его решение.*

Из выражения для первой производной от потенциальной энергии по обобщенной координате (11) видно, что обобщенная сила, входящая в правую часть уравнения Лагранжа (1), нелинейным образом зависит от этой координаты, вследствие чего уравнение движения будет нелинейным. Аналитическое решение таких уравнений представляет собой большую проблему, как правило, неразрешимую. Поэтому рассмотрим упрощенную постановку задачи, когда отклонения системы от положения устойчивого равновесия являются малыми. В этом случае потенциальную энергию следует разложить в ряд по малым отклонениям от положения равновесия и сохранить в этом разложении количество членов, обеспечивающее линейность обобщенной силы, т. е. ограничиться нужно квадратичными членами. Такое разложение имеет вид

$$U(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{U^{(k)}(\tilde{\varphi})}{k!}(\varphi-\tilde{\varphi})^{k}\approx$$

$$\approx U(\tilde{\varphi})+U^{(1)}(\tilde{\varphi})(\varphi-\tilde{\varphi})+\frac{1}{2}U^{(2)}(\tilde{\varphi})(\varphi-\tilde{\varphi})^{2}=$$

$$=U(\tilde{\varphi})+\frac{1}{2}U^{(2)}(\tilde{\varphi})(\varphi-\tilde{\varphi})^{2}, \qquad (22)$$

поскольку $U^{(1)}(\tilde{\varphi})=0$. Обобщенная сила при этом определяется следующим выражением:

$$-\frac{dU}{d\varphi}=-U^{(2)}(\tilde{\varphi})(\varphi-\tilde{\varphi}). \qquad (23)$$

Здесь $\tilde{\varphi}$ – координата, определяющая положение равновесия, $U^{(k)}(\tilde{\varphi})$ – производная k-го порядка от потенциальной энергии в положении равновесия.

Кинетическая энергия для системы с одной степенью свободы при стационарных связях имеет вид

$$T=\frac{1}{2}I(\varphi)\dot{\varphi}^{2}, \qquad (24)$$

т. е. она квадратична по обобщенной скорости и в общем случае может зависеть от обобщенной координаты через инерционный коэффициент I. Чтобы обеспечить ту же точность, что и в случае с потенциальной энергией, инерционный коэффициент нужно разложить в ряд вблизи положения равновесия:

$$I(\varphi)=I(\tilde{\varphi})+I^{(1)}(\tilde{\varphi})(\varphi-\tilde{\varphi})+\ldots$$

и ограничиться учетом только первого слагаемого, т. е. инерционный коэффициент следует вычислять для положения равновесия. Тогда кинетическая энергия будет иметь вид

$$T\approx\frac{1}{2}I(\tilde{\varphi})\dot{\varphi}^{2}. \qquad (25)$$

Поскольку в данном случае система состоит из трех тел, ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_B. \tag{26}$$

Стержень OA совершает вращательное движение, AB – плоское, а ползун B – поступательное, поэтому

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_O \omega_{OA}^2; \tag{27}$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_{AB}^2; \tag{28}$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_1 v_B^2. \tag{29}$$

Подставив (27)–(29) в (26), получим

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega_{OA}^2 + \frac{1}{2} m v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_B^2. \tag{30}$$

Теперь все скорости нужно выразить через обобщенную $\dot{\varphi} = \omega$.

Рассмотрим случаи (16) и (17) отдельно.

1. При выполнении условия (16) $\tilde{\varphi} = \varphi_1 = 0$ и разложение (22) приобретает вид

$$U(\varphi) = U(0) + \frac{1}{2} U^{(2)}(0)\varphi^2 =$$

$$= -2gL(m + m_1) + \frac{c}{2}(L - l_0)^2 + \frac{1}{2} L\left[2g(m + m_1) - c(L - l_0)\right]\varphi^2. \tag{31}$$

Обобщенная сила при этом равна

$$-\frac{dU}{d\varphi} = -L\left[2g(m + m_1) - c(L - l_0)\right]\varphi. \tag{32}$$

Теперь получим выражение для кинетической энергии при $\tilde{\varphi} = 0$ (рис. 2).

В силу выбора обобщенной координаты

$$\omega_{OA} = \omega. \tag{33}$$

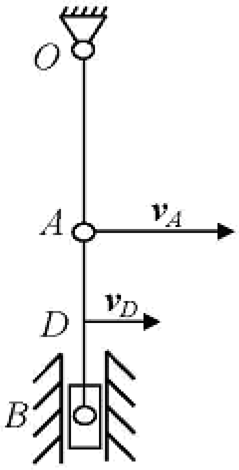


Рис. 2

Точка B является мгновенным центром скоростей звена AB, т. е.

$$v_B = 0, \tag{34}$$

и поэтому для скорости точки A, принадлежащей одновременно стержням OA и AB, можно написать

$$v_A = \omega(OA) = \omega_{AB}(BA). \tag{35}$$

Отсюда следует, что, в силу равенства $OA = AB = L$,

$$\omega_{AB} = \omega, \tag{36}$$

а скорость точки D равна

$$v_D = \omega_{AB}(BD) = \frac{1}{2}\omega L. \tag{37}$$

С учетом соотношений (33)–(37) кинетическая энергия системы (30) примет вид

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{8}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_D\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_O + \frac{mL^2}{4} + I_D\right)\omega^2. \tag{38}$$

Подставив сюда

$$I_O = \frac{1}{3}mL^2 \tag{39}$$

– момент инерции стержня OA относительно оси, проходящей через точку O,

$$I_D = \frac{1}{12} mL^2 \tag{40}$$

– момент инерции стержня AB относительно оси, проходящей через его центр масс, получим

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 + \frac{1}{12} mL^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2, \tag{41}$$

где

$$I = \frac{2}{3} mL^2 \tag{42}$$

– приведенный момент инерции.

Подставим (41) и (32) в уравнение (1). При этом

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \tag{43}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}; \tag{44}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = I\ddot{\varphi} \tag{45}$$

и, следовательно,

$$I\ddot{\varphi} = -L[2g(m + m_1) - c(L - l_0)]\varphi. \tag{46}$$

Приведем полученное уравнение к стандартной форме, перенеся все слагаемые, содержащие искомую функцию, в левую часть:

$$I\ddot{\varphi} + L[2g(m + m_1) - c(L - l_0)]\varphi = 0 \tag{47}$$

и разделим все слагаемые на коэффициент при второй производной:

$$\ddot{\varphi} + \frac{L}{I}[2g(m + m_1) - c(L - l_0)]\varphi = 0. \tag{48}$$

В силу условия (16) выражение в квадратных скобках положительно, поэтому можно ввести обозначение

$$k^2 = \frac{L}{I}[2g(m + m_1) - c(L - l_0)], \tag{49}$$

в результате чего уравнение (48) окончательно примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \tag{50}$$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, которое решается способом, рассмотренным в задаче 1, т. е. его решение ищется в виде

$$\varphi = Ae^{\lambda t}, \tag{51}$$

что приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \tag{52}$$

Корнями этого уравнения являются мнимые величины

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik, \tag{53}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Общим решением уравнения (50), следовательно, является выражение

$$\varphi = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt} = A\sin kt + B\cos kt. \tag{54}$$

Здесь $A = i(C_1 - C_2)$, $B = C_1 + C_2$ – произвольные постоянные. Для устранения этого произвола необходимо использовать начальные условия:

$$\varphi_0 = \varphi(0), \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0). \tag{55}$$

Производная по времени от (54) имеет вид

$$\dot{\varphi} = k(A\cos kt - B\sin kt), \tag{56}$$

поэтому условия (55) приводят к следующему:

$$\varphi_0 = B, \quad \dot{\varphi}_0 = kA. \tag{57}$$

Таким образом, решение уравнения (50), удовлетворяющее начальным условиям (55), имеет вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin kt + \varphi_0 \cos kt. \tag{58}$$

2. При выполнении условия (17) потенциальная энергия и обобщенная сила имеют вид (см. (22) и (19))

$$U = U(\varphi_2) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\varphi_2)(\varphi - \varphi_2)^2 = U(\varphi_2) + \frac{1}{2}cL^2\sin^2\varphi_2(\varphi - \varphi_2)^2; \tag{59}$$

$$-\frac{dU}{d\varphi} = -cL^2 \sin^2 \varphi_2 (\varphi - \varphi_2). \tag{60}$$

Вычисление кинетической энергии (30) при этом необходимо проводить для положения механизма, определяемого углом φ_2 (рис. 3).

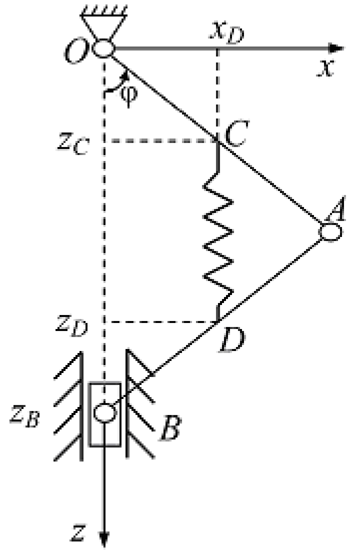


Рис. 3

Выражения скоростей точек D и B и угловой скорости звена AB через угловую скорость звена OA можно осуществить с помощью теории плоского движения, но координатный способ оказывается более простым. Продифференцировав (8) по времени, найдем скорость ползуна B:

$$v_B = \frac{dz_B}{dt} = -2L\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{61}$$

Из рис. 3 видно, что

$$x_D = \frac{L}{2}\sin\varphi, \tag{62}$$

поэтому

$$v_{Dx} = \frac{dx_D}{dt} = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, \tag{63}$$

а дифференцирование выражения (9) дает

$$v_{Dz} = \frac{dz_D}{dt} = -\frac{3L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi, \tag{64}$$

следовательно,

$$v_D^2 = v_{Dx}^2 + v_{Dz}^2 = \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2(1 + 8\sin^2\varphi). \tag{65}$$

Поскольку треугольник OAB равнобедренный, $\angle OBA$, определяющий ориентацию шатуна AB, равен φ и поэтому

$$\omega_{AB} = \dot{\varphi}. \tag{66}$$

Подставив в (61) и (65) равновесное значение φ_2 и используя (66), для кинетической энергии системы (30) получим следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2}\left[I_O + \frac{mL^2}{4}(1 + 8\sin^2\varphi_2) + I_D + 4m_1L^2\sin^2\varphi_2\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \tag{67}$$

где

$$I = I_O + \frac{mL^2}{4}(1 + 8\sin^2\varphi_2) + I_D + 4m_1L^2\sin^2\varphi_2, \tag{68}$$

значение φ_2 является решением уравнения (19), а моменты инерции стержней OA и AB определяются формулами (39) и (40). Подставив теперь (67) и (60) в (1), получим

$$I\ddot{\varphi} = -cL^2\sin^2\varphi_2(\varphi - \varphi_2). \tag{69}$$

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{cL^2}{I}\sin^2\varphi_2 \tag{70}$$

и записав уравнение (69) в стандартной форме, получим

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = k^2\varphi_2. \tag{71}$$

Решение этого неоднородного уравнения осуществляется тем же способом, который рассматривался в примере к задаче 1 и в предыдущем случае 1.

Задача 3
ВИБРОЗАЩИТА

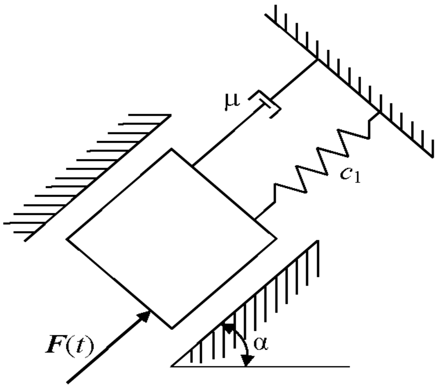
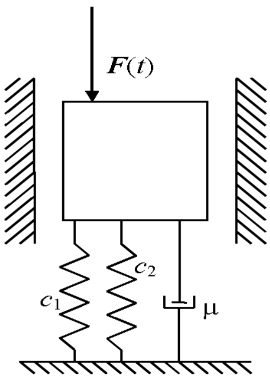
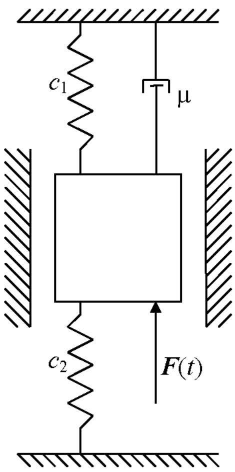
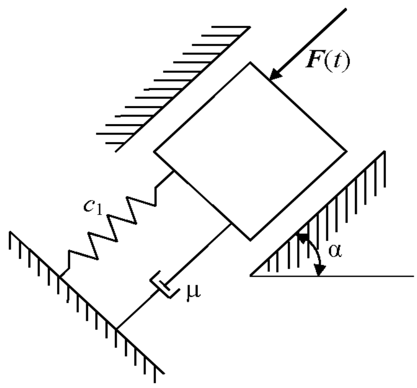
Источник колебаний представляет собой поступательно движущееся без трения в направляющих тело массы m, на которое действует периодическая сила $F(t) = H \sin pt$ (рис. в табл. 1, данные в табл. 2). Объектом защиты является корпус, взаимодействующий с источником колебаний посредством упругой связи и демпфера.

1. Найти закон движения источника колебаний.

2. Определить динамическое воздействие, оказываемое на корпус со стороны колеблющегося тела.

3. Вычислить коэффициент виброизоляции γ как отношение амплитуды динамической реакции корпуса к амплитуде возмущающей силы. Подобрать параметры системы (m, c_1, c_2, μ) так, чтобы этот коэффициент стал равным значению, указанному в табл. 2.

Таблица 1

0		1	
2		3	

Окончание табл. 1

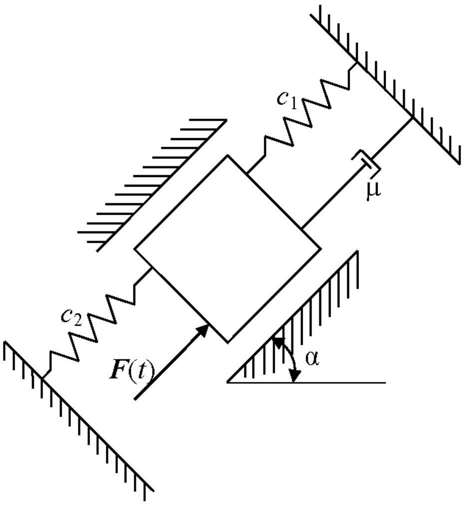
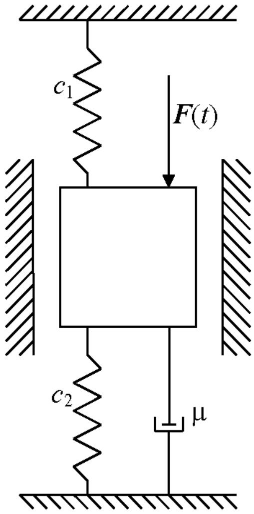
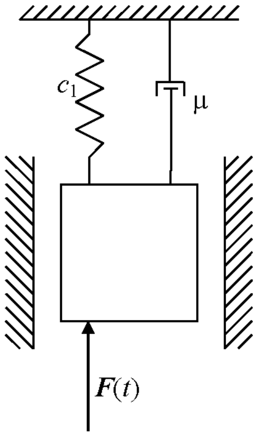
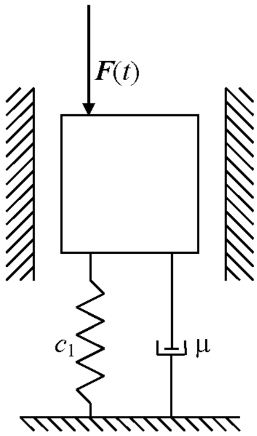
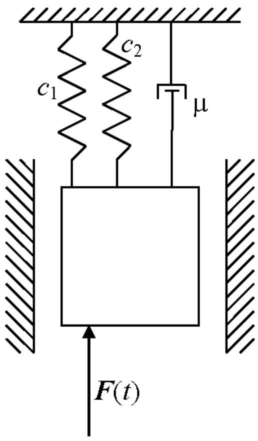
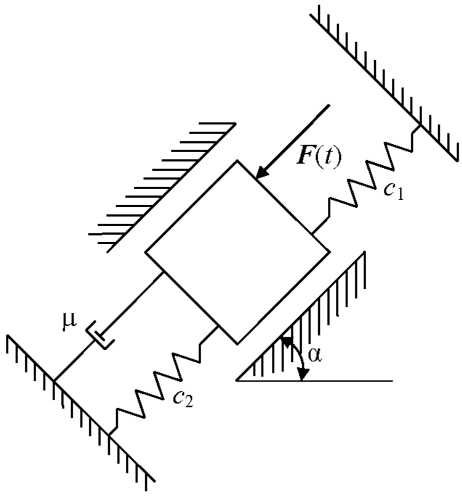
4		5	
6		7	
8		9	

Таблица 2

Параметры	Номер условия									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	2	5	1	9	6	7	4	3	8	10
c_1	1,0	2,5	1,5	3,0	1,2	1,8	2,0	2,4	2,8	1,4
c_2	2,5	1,2	2,8	1,0	2,4	2,0	1,4	1,5	3,0	1,8
μ	13	10	15	11	14	12	18	20	19	17
α	30	15	45	60	30	15	75	60	45	30
p	55	30	80	20	25	15	35	40	22	10
γ	0,95	0,80	0,10	0,30	0,60	0,20	0,40	0,50	0,70	0,90

Единицы измерения: массы – килограммы, жесткости – килоньютоны на метр, коэффициента вязкости – килограммы в секунду, частоты – радианы в секунду, угла – градусы.

Указания. Для решения этой задачи следует использовать уравнение движения центра масс системы в проекции на направление, вдоль которого движутся точки тела. Для всех рисунков считается, что сила тяжести направлена по вертикали вниз, а упругая сила подчиняется закону Гука. Начало системы отсчета поместить в положение статического равновесия, для чего выяснить, где оно находится. Если виброизолятор состоит из нескольких пружин, их нужно заменить одной, для чего необходимо найти приведенную жесткость. Зависимость силы вязкого сопротивления от скорости принять линейной. При определении динамического усилия, действующего на корпус механизма, нужно учитывать только ту часть решения уравнения движения, которая соответствует вынужденным колебаниям, поскольку соответствующие свободные колебания быстро затухают. Выражение для динамической реакции нужно представить в виде синусоиды (или косинусоиды), что позволит найти ее амплитуду и, следовательно, определить коэффициент виброизоляции.

Пример. Тело массы m может перемещаться поступательно по горизонтали. На него действует возмущающая сила $F = H \sin pt$ и оно соединено с корпусом пружиной жесткости c и жидкостным демпфером, характеризуемым коэффициентом μ (рис. 1). Найти оказываемое на корпус динамическое усилие при установившемся движении.

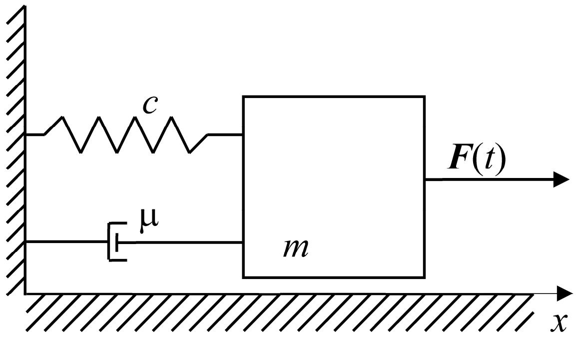


Рис. 1

Р е ш е н и е

Поместим начало отсчета в конце недеформированной пружины и будем считать, что сила сопротивления, создаваемая демпфером, пропорциональна скорости тела (скорости его центра масс). Тогда уравнение движения тела будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H\sin pt. \tag{1}$$

Приведем его к стандартной форме, собрав величины, относящиеся к искомой функции, в левой части уравнения и разделив все слагаемые на m:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = h\sin pt. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения

$$2b = \frac{\mu}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}. \tag{3}$$

Уравнение (2) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения (2).

Общее решение уравнения (2) с нулевой правой частью представляет собой затухающие колебания при $b < \omega$ или описывает апериодическое движение при $b > \omega$. В обоих случаях оно быстро стремится к нулю, поэтому для достаточно больших значений t (установившееся движение) его можно не учитывать. Частное же решение уравнения (2) можно искать в таком же виде, как и правая часть, но с иной фазой, т. е. в виде

$$x = A\sin(pt + \delta), \tag{4}$$

где A и δ – подлежащие определению постоянные параметры. Для их определения подставим последнее выражение в (2):

$$-Ap^2\sin(pt+\delta)+2bAp\cos(pt+\delta)+A\omega^2\sin(pt+\delta)=h\sin pt. \qquad (5)$$

Объединив первое и третье слагаемые и воспользовавшись известными формулами для тригонометрических функций от суммы аргументов, получим

$$A(\omega^2-p^2)(\sin pt\cos\delta+\cos pt\sin\delta)+$$
$$+2bAp(\cos pt\cos\delta-\sin pt\sin\delta)=h\sin pt. \qquad (6)$$

Равенство (6) должно выполняться тождественно, т. е. для любого значения t. Это возможно только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых функциях в обеих частях равенства совпадают. Следовательно,

$$A(\omega^2-p^2)\cos\delta-2bAp\sin\delta=h; \qquad (7)$$

$$A(\omega^2-p^2)\sin\delta+2bAp\cos\delta=0. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{2bp}{p^2-\omega^2}. \qquad (9)$$

Далее, возведя обе части равенств (7) и (8) в квадрат и сложив почленно полученные выражения, получим

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4b^2p^2}}. \qquad (10)$$

Таким образом, частное решение уравнения (2), представляющее собой незатухающие (вынужденные) колебания, полностью определено: от начального состояния оно не зависит.

В данной задаче, однако, интерес представляет не закон движения тела как таковой, а то силовое воздействие, которое оказывается при его движении на защищаемый объект, т. е. на корпус, связанный с источником колебаний виброизолятором. Это воздействие определяется упругой силой и силой вязкого сопротивления, что можно представить в виде

$$R=cx+\mu\dot{x}. \qquad (11)$$

Подставив сюда выражение (4), получим

$$R = cA\sin(pt+\delta) + \mu Ap\cos(pt+\delta). \tag{12}$$

Введем новые величины с помощью соотношений

$$R_0\cos\varepsilon = cA; \tag{13}$$

$$R_0\sin\varepsilon = \mu Ap. \tag{14}$$

Тогда выражение (12) примет вид

$$R = R_0[\cos\varepsilon\sin(pt+\delta) + \sin\varepsilon\cos(pt+\delta)] = R_0\sin(pt+\delta+\varepsilon), \tag{15}$$

где, как следует из (13) и (14),

$$R_0 = A\sqrt{c^2+\mu^2p^2}; \tag{16}$$

$$\mathrm{tg}\varepsilon = \frac{\mu p}{c}. \tag{17}$$

Для количественной оценки эффективности защиты от колебаний введем так называемый коэффициент виброизоляции как отношение амплитуды динамического воздействия на защищаемый объект к амплитуде возмущающей силы:

$$\gamma = \frac{R_0}{H}. \tag{18}$$

Защита является эффективной, если коэффициент виброизоляции меньше единицы. Подставив сюда выражение (16) с учетом (10) и (3), получим

$$\gamma = \frac{\sqrt{c^2+\mu^2p^2}}{m\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4b^2p^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2+\left(\frac{\mu}{m}\right)^2p^2}}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4b^2p^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^4+4b^2p^2}}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4b^2p^2}}. \tag{19}$$

Вынесем четвертую степень собственной частоты системы из-под радикалов в числителе и знаменателе и введем безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{b}{\omega}, \quad z = \frac{p}{\omega}. \tag{20}$$

Коэффициент виброизоляции тогда примет вид

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + 4\lambda^2 z^2}{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}}\,. \tag{21}$$

Коэффициент γ зависит от двух безразмерных параметров, один из которых (λ) связан с силами вязкого сопротивления, а второй (z) – с частотой возмущающей силы (см. определения (20) и (3)). При больших значениях λ коэффициент γ близок к единице, а при $\lambda = 0$

$$\gamma = \frac{1}{\left|1 - z^2\right|} > 1$$

при любых значениях z.

Пусть λ имеет некоторое конечное значение. Рассмотрим разность числителя и знаменателя подкоренного выражения (21):

$$\Delta = 1 + 4\lambda^2 z^2 - [(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2] = z^2(2 - z^2). \tag{22}$$

Как видно из (22), эта разность не зависит от λ. При $z = 0$ и при $z = \sqrt{2}$ $\Delta = 0$, т. е. числитель и знаменатель одинаковы и, следовательно, $\gamma = 1$. При $z < \sqrt{2}$ $\Delta > 0$. Это означает, что числитель больше знаменателя, и поэтому $\gamma > 1$. Если же $z > \sqrt{2}$, то $\Delta < 0$ – числитель меньше знаменателя и $\gamma < 1$. Таким образом, на интервале $0 < z < \sqrt{2}$ коэффициент $\gamma > 1$ и достигает максимума в точке, определяемой из условия обращения в нуль производной от подкоренного выражения (21) по z. Обозначим

$$f(z) = \frac{1 + 4\lambda^2 z^2}{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}\,. \tag{23}$$

Поскольку величина z положительна по определению и в (23) фигурируют ее четные степени, введем для упрощения новую величину $u = z^2$. Тогда

$$f(u) = \frac{1 + 4\lambda^2 u}{(1 - u)^2 + 4\lambda^2 u}\,. \tag{24}$$

Вычислим производную по u и приравняем ее к нулю:

$$\frac{df}{du} = \frac{4\lambda^2}{(1-u)^2 + 4\lambda^2 u} - \frac{(1+4\lambda^2 u)[4\lambda^2 - 2(1-u)]}{\left((1-u)^2 + 4\lambda^2 u\right)^2} =$$

$$= \frac{2(1-u-2\lambda^2 u^2)}{\left((1-u)^2 + 4\lambda^2 u\right)^2} = 0, \qquad (25)$$

т. е.

$$1 - u - 2\lambda^2 u^2 = 0. \qquad (26)$$

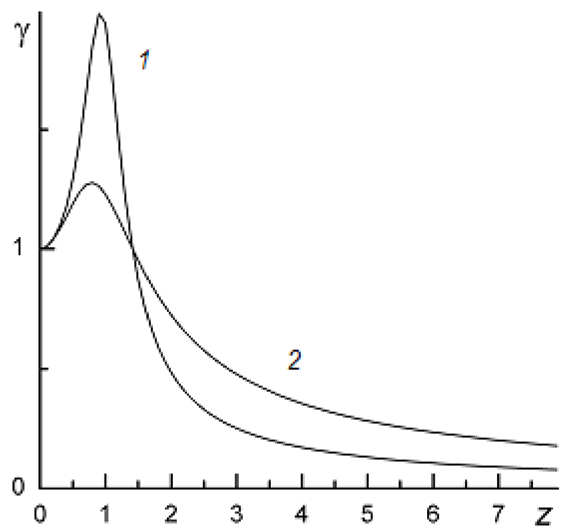
Решением этого квадратного уравнения является величина

$$u_1 = \frac{\sqrt{1+8\lambda^2} - 1}{4\lambda^2}. \qquad (27)$$

Можно показать, что вторая производная от f по u в этой точке отрицательна, т. е. функция $f(u_1)$ действительно имеет максимальное значение, при этом

$$\gamma_{\max} = \sqrt{f(u_1)} = \sqrt{\frac{8\lambda^4}{8\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1 + \sqrt{1+8\lambda^2}}}. \qquad (28)$$

Эта величина, как уже отмечалось, больше единицы при любых значениях λ, и она тем больше, чем меньше λ. Как видно из (21), $\gamma \to 0$ при $z \to \infty$. Поведение γ в зависимости от z при различных значениях λ представлено на рис. 2.



1 – λ = 0,3; *2* – λ = 0,7

Рис. 2

Вывод, который следует из проведенного анализа, состоит в том, что защита от колебаний является эффективной, когда безразмерная частота z удовлетворяет условию $z > \sqrt{2}$ при любом значении λ, или $p > \sqrt{2}\omega$. Имея в виду определение собственной частоты системы (3), условие эффективности виброзащиты можно представить в виде

$$p > \sqrt{\frac{2c}{m}}\,. \tag{29}$$

Частота возмущающей силы, вообще говоря, может быть какой угодно, и повлиять на нее практически невозможно. Но параметры системы поддаются регулировке, так что, подбирая соответствующие значения жесткости и массы, всегда можно обеспечить выполнение условия (29) и, следовательно, сделать защиту от колебаний эффективной. Параметр λ при этом тоже играет определенную роль: при выполнении условия (29), как это видно из рис. 2, γ уменьшается с уменьшением λ.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Коловский, М. З. Динамика машин / М. З. Коловский. – Л.: Машиностроение, 1989. – 263 с.
2. Комаров, М. С. Динамика механизмов и машин / М. С. Комаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 296 с.
3. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
4. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
5. Теория механизмов и машин / К. В. Фролов [и др.]; под ред. К. В. Фролова. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.

Дополнительная

1. Зиновьев, В. А. Основы динамики машинных агрегатов / В. А. Зиновьев, А. П. Бессонов. – М.: Машиностроение, 1964. – 240 с.
2. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 559 с.
3. Механическое оборудование предприятий строительных материалов, изделий и конструкций / С. Г. Силенок [и др.]. – М.: Машиностроение, 1990. – 416 с.
4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – Т. 2: Динамика. – 496 с.
5. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Соколов, В. И. Современные промышленные центрифуги / В. И. Соколов. – М.: Машиностроение, 1967. – 524 с.
7. Коловский, М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М. З. Коловский. – М.: Наука, 1966. – 317 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИНАМИКА МАШИН И ВИБРОЗАЩИТА

Составители: **Белов** Владлен Васильевич
Грода Ярослав Геннадьевич

Редактор И. О. Гордейчик

Подписано в печать 24.04.2008. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,7. Уч.-изд. л. 2,7.
Тираж 100 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.