

А.А. Тенгаева, ассоц. проф., канд. физ.- мат. наук
(КазНАУ, г. Алматы, Казахстан)

БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ ОДНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

В случае самосопряженной спектральной задачи с точечным спектром система ее собственных функций образует полную ортонормированную систему в L_2 , т.е. базис пространства L_2 . В случае несамосопряженных задач система собственных функций может оказаться неполной. Тогда приходится их дополнять, так называемыми, присоединенными функциями (при их наличии).

Если рассмотреть оператор Шредингера на некотором конечном интервале G числовой оси $Lu = -u''(x) + q(x)u$ с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$, то цепочки присоединенных функции, соответствующих собственной функции $u_{k_0}(x)$ и собственному значению λ_k , можно построить [1] по формуле

$$Lu_{ki} = \lambda_k u_{ki} - u_{k,i-1}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

В работах [2-5] используются формулы

$$Lu_{ki} = \lambda_k u_{ki} - \sqrt{\lambda_k} u_{k,i-1}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

В работе [2] предлагают для построения цепочек присоединенных функций пользоваться формулой

$$Lu_{ki} = \lambda_k (u_{ki} - u_{k,i-1}), i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Проблема способа построения присоединенных функций возникает в случае несамосопряженных задач, когда они обладают бесконечным числом присоединенных функций. Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad u'(0) = 0, \quad u(0) = u(1), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

которая является несамосопряженной за счет краевых условий. Собственными значениями этой задачи являются числа $\lambda_k = (2k\pi)^2, k = 0, 1, 2, \dots$. Соответствующими собственными функциями являются функции $u_0 = 1, u_{k_0} = \sqrt{2} \cos 2k\pi x, k = 1, 2, 3, \dots$

Полученная система собственных функций не является полной в $L_2(0,1)$, поэтому дополним их присоединенными функциями.

1. Построение цепочек присоединенных функций по формуле (1). Нам необходимо найти решение неоднородного уравнения

$$-u_{ki}''(x) + \lambda_k u_{ki} = u_{k,i-1}$$

удовлетворяющее краевым условиям (4). Присоединенных функций, отвечающих собственной функции $u_0(x)=1$ нет. Собственным функциям $u_{k_0}(x)$ отвечают присоединенные функции, удовлетворяющие уравнению $-u_{k_1}''(x) = \lambda_k u_{k_1}(x) - u_{k_0}(x)$

Число $(2k\pi)^2$ является двукратным корнем соответствующего характеристического уравнения, то стандартным приемом решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, находим $u_{k_1} = \frac{\sqrt{2}x}{4k\pi} \sin 2k\pi x$

Система собственных и присоединенных функций задачи (4)

$$\{u_{k_0} = 1, u_{k_0} = \sqrt{2} \cos 2k\pi x, u_{k_1} = \frac{\sqrt{2}x}{4k\pi} \sin 2k\pi x\}. \quad (5)$$

Биортогонально сопряженная система

$$\{v_0 = 2(1-x), v_{k_1} = \frac{16k\pi}{\sqrt{2}} \sin 2k\pi x, v_{k_0} = \frac{4(1-x)}{\sqrt{2}} \cos 2k\pi x\} \quad (6)$$

состоит из собственных $\{v_0, v_{k_1}\}$ и присоединенных $\{v_{k_0}\}$ функций сопряженной задачи $-v'' = \bar{\lambda}v, v(1) = 0, v'(0) = v'(1)$.

Теорема 1. Каждая из систем (5), (6) образует безусловный базис пространства $L_2(0,1)$.

Доказательство теоремы мгновенно следует из результатов работы [3] и $|u_{ki}| |v_{ki}| \leq const., i = 0,1, \forall k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов / Успехи матем.наук, 1971. Т. 26, Вып. 4 (160). С. 15-41.

2. Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Об одном подходе к определению присоединенных функции дифференциальных операторов / Труды международной научной практической конференции, 2006.

3. Сарсенби А.М. Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка / Доклады НАН РК. 2006. №1, С.44-48.

4. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка / Дифференциальные уравнения, 1986. Т.22, №12, С. 2059-2071.

5. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условиям/ Дифференциальные уравнения, 1977. Т 13, №2. С.294-304.