Произведение $R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta_1}\right)R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta_2}\right)$, где $\operatorname{Im}\eta_1, \operatorname{Im}\eta_2 > 0$, ассоциировано с распределением $P\left(\frac{1}{x^2}\right)-i\pi\delta'$.

Приведенные в леммах 1 и 2 соотношения позволяют получить явное описание алгебры $A_{as}(\mathbb{R})$, которое содержится в следующем утверждении.

**Теорема 1.** *Элементы вида* $R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)$ *и* $R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta}\right)$ *являются образующими в алгебре* $A_{as}(\mathbb{R})$, *и произведение элементов алгебры однозначно определяется соотношениями, описанными в леммах 1 и 2.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Москва: Мир, 1968.

2. Шагова Т. Г. Самоподобные рациональные мнемофункции и их связь с аналитическим представлением распределений // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т.55, №3. – С. 288-298.

УДК 519.626.2

И. Ф. Соловьева, канд. физ.-мат. наук, доц. (БГТУ, г. Минск)

## ОБ ОДНОМ ИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Более ста лет прошло с основания теории пограничного слоя, однако, данная тема является актуальной и в наши дни. Это открытие принадлежит Людвигу Прандтлю. Он первый сформулировал и обосновал большую часть развития теории пограничного слоя.

Краевые задачи с малым параметром при старшей производной являются математическими моделями с очень сложным характером поведения решений. Решение такого рода задач быстро меняется вблизи граничных точек, то есть здесь мы наблюдаем наличие пограничных слоев.

Причина трудностей решения таких задач заключается не только в нелинейности большинства задач с пограничным слоем, хотя в результате этого тоже возникают определенные проблемы, но и в том, что очень малый параметр $\varepsilon$ стоит возле старшей производной.

Рассмотрим двухточечные краевые задачи, являющиеся математическими моделями диффузионно-конвективных процессов. Для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной они представимы в виде

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Диффузионным является слагаемое, содержащее производную второго порядка, а конвективным – слагаемое, содержащее производную первого порядка.

Первая из задач (1) является задачей с одним пограничным слоем, а задача (2) – задачей с двумя пограничными слоями.

Задачи такого вида получили название сингулярно возмущенных. Их решение быстро изменяется вблизи граничных точек, оно начинает неограниченно возрастать, что влечет за собой появление пограничных слоев, а, следовательно, и неустойчивость данного численного процесса.

Для численного решения краевых задач с пограничным слоем вида (1), (2) предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев соответствующих регулирующих множителей. Этот метод позволяет применять единый подход к решению краевых задач с одним и двумя пограничными слоями.

Краевые задачи вида (1), (2) представим в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \dfrac{f(x)}{\varepsilon} - \dfrac{a(x)}{\varepsilon} y_1 + \dfrac{b(x)}{\varepsilon} y, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(x)}{\varepsilon} + \dfrac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{4}$$

и граничными условиями вида

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B.$$

Введем в системы о. д. у. (3), (4) множители $m_2(x, \varepsilon) > 0$,

$m_1(x,\varepsilon) > 0$, регулирующие поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$. При их выборе учитываем, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$, $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы.

Исходную граничную задачу представим в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$. При решении задач Коши для функций $Q(x)$ и $u(x)$ применим прямой ход метода дифференциальной ортогональной прогонки. Проведя решение задачи Коши до конечной граничной точки, получаем начальное значение для функции $v(x)$ и осуществляем обратный ход прогонки для решения задачи последней задачи Коши. При этом движение идет с конца отрезка, а начальные условия уже получены за счет прямого хода прогонки.

Реализованные в предлагаемой модификации задачи Коши являются благоприятными в вычислительном отношении. При этом каждая задача Коши решается по формулам известных хорошо работающих численных методов, например, Рунге-Кутта, а также В-устойчивых и Д-устойчивых методов.

Решив три задачи Коши методом Рунге-Кутта четвертого порядка, и найдя функцию $Q(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$, $v(x)$, получим выражение для $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{aligned} m_1(x,\varepsilon)y_1(x) &= \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)v(x), \\ m_2(x,\varepsilon)y_2(x) &= \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)v(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Предложенная модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки позволяет избежать решения громоздких систем уравнений.

Пример. Рассмотрим краевую задачу с одним пограничным слоем.

$$\varepsilon y''(x) + 2xy'(x) + (1+x^2)y(x) = 0$$

с краевыми условиями вида:

$$y(-1) = 2, \quad y(1) = 1, \quad \varepsilon = 0{,}01.$$

Задача решалась по предложенной модификации метода дифференциальной ортогональной прогонки и реализовывалась с помощью пакета Mathcad.

Ее решение представлено в виде графика функции (рисунок 1).

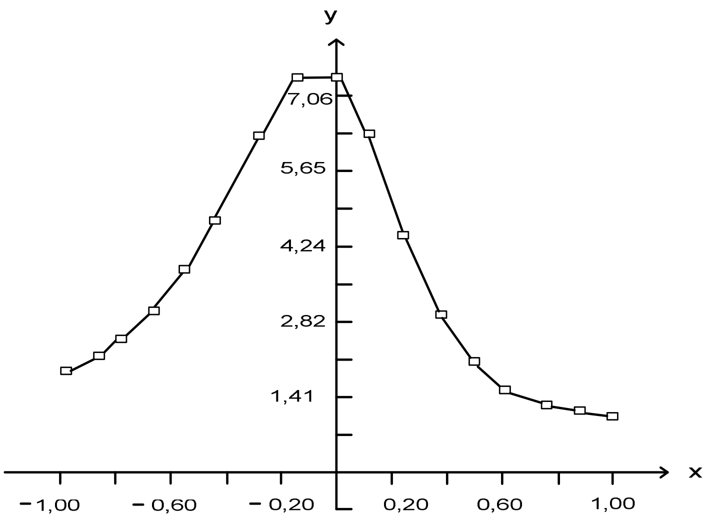


**Рисунок 1 – Решение краевой задачи
с одним пограничным слоем**

Приведение краевой задачи к совокупности задач Коши работает также в пользу рассматриваемой модификации метода. За счет введения регулирующих множителей в зонах пограничных слоев рост решений и особенно градиентов решений нейтрализуется и больше не вызывает осложнений в решениях.

Реализация метода с помощью пакета Mathcad доступна, удобна в обращении и легко представляется графиками.

УДК 517.956.32

Е. В. Устилко, ассист. (БГТУ, г. Минск)

## О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕНОЙ СТРУНЫ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ РЕЖИМЕ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

На множестве $\dot{G}_\infty = (0,\infty)\times(0,\infty)$ ставится смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t)\in \dot{G}_\infty,$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x),\ x\in(0,\infty),$$

$$\left[\alpha(t)(u_t(x,t) + a_1 u_x(x,t)) + \gamma(t)u(x,t)\right]\Big|_{x=0} = \mu(t),\ t\in(0,\infty),$$