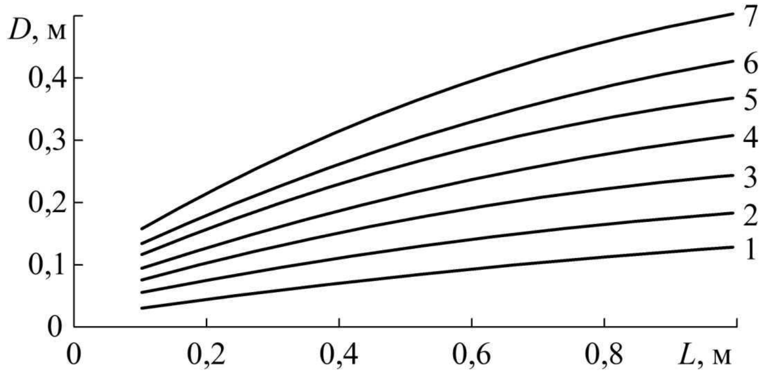

Рисунок 2 – Зависимость минимального диаметра улавливаемых капель от геометрических размеров сепарационного элемента: 1-3 мкм; 2-5 мкм; 3-7 мкм; 4-9 мкм; 5-11 мкм; 6-13 мкм; 7-25 мкм

ЛИТЕРАТУРА

1. Тронов В. П. Сепарация газа и сокращение потерь нефти. – Казань : «Фен», 2002. – 408 с.
2. Шкоропад Д. Е, Новиков О. П. Центрифуги и сепараторы для химических производств. – М. : Химия, 1987. – 256 с.
3. Левданский Э. И., Левданский А. Э. Высокоэффективные проточные процессы и аппараты. – Минск : БГТУ. – 2001. – 234 с.
4. Марков В. А., Волк А. М., Ершов А. И. Исследование оттока жидкости через отверстия прямоточно-центробежного элемента // Инженерно-физический журнал : 1991. – Т. 61, № 1. – С. 82-87.
5. Волк А. М., Терешко Е. В. Анализ сил, действующих на твердую частицу в сплошном потоке // Труды БГТУ. – 2015. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 10-14.

УДК 517.968

Л. Д. Яроцкая, канд. физ.-мат. наук, доц.;
О. Н. Пыжкова, канд. физ.-мат. наук, доц.
(БГТУ, г. Минск)

СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛА КОНТОРОВИЧА–ЛЕБЕДЕВА С ИНТЕГРАЛОМ ТИПА КОШИ

Интегральные преобразования являются одним из важнейших математических инструментов при решении интегральных и сходных с ними уравнений. С их помощью простые уравнения непосредственно сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, а более сложные – к линейным краевым задачам аналитических функций. В частности, уравнения типа свертки Фурье рассмотрены в книге [1]. При решении краевых задач теории аналитических функций комплексного переменного применяются интеграл типа Коши и различные его обобщения [2].

Пусть $F(\tau)$ – интегрируемая на контуре L (замкнутом или разомкнутом) функция. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

называется *интегралом типа Коши*. Он определяет функцию, аналитическую в плоскости с разрезом по контуру L. В случае прямой

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} F^+(z), \ \operatorname{Im} z > 0, \\ F^-(z), \ \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Если плотность $F(\tau)$ принадлежит пространству $L_2(\mathrm{R})$ и удовлетворяет условию Гельдера, то существуют предельные значения функций $F^{\pm}(z)$ на действительной оси и они связаны с плотностью F интеграла формулами, носящими имя Ю. В. Сохоцкого [2]:

$$F^+(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x}d\tau,$$

$$F^-(x) = -\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x}d\tau$$

или

$$F^+(x) - F^-(x) = F(x), \qquad F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x}d\tau.$$

Интегралы в последних формулах понимаются как особые в смысле главного значения.

Интеграл Конторовича – Лебедева от $f(t)$ рассмотрим в виде следующей функции параметра τ:

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} K_{i\tau}(t) f(t)\,dt, \ -\infty < \tau < \infty, \qquad (1)$$

где $K_{i\tau}(x)$ – функция Макдональда – одно из линейно независимых решений $u(x)$ дифференциального уравнения Бесселя

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \left(1 - \frac{\tau^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Отметим интегральное представление для функции Макдональда [3]:

$$K_{i\tau}(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}\,u}\cos(\tau u)\,du. \qquad (2)$$

Интеграл (1) возникает в известном в литературе интегральном разложении произвольной функции, записанной в виде аналогов интеграла Фурье

$$xf(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\,d\tau\int_0^\infty K_{i\tau}(y)f(y)\,dy.$$

Данное представление порождает пару преобразований Конторовича – Лебедева, причем интегрирование в одной из формул осуществляется по индексу специальной функции, входящей в ядро. Установлено [4], что все известные в литературе преобразования по индексу композиционно связаны с (1) в силу универсальности структуры их ядер, относящихся к гипергеометрическим функциям.

Обозначим через $L_{\nu,2}(\mathrm{R}_+)$ пространство суммируемых с квадратом функций со степенным весом, норма которого определяется формулой

$$\|f\|_{\nu,2}=\left(\int_0^\infty x^{2\nu-1}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Заметим, что в случае $\nu=1/2$ пространство $L_{\nu,2}(\mathrm{R}_+)$ совпадает с пространством $L_2(\mathrm{R}_+)$.

Функция комплексного переменного $F(z)$, определяемая интегралом

$$F(z)=\int_0^\infty K_{iz}(t)f(t)\,dt, \qquad (3)$$

будет аналитической в той области комплексной плоскости $z=x+iy$, где подынтегральная функция в (3) имеет непрерывную производную по параметру z и интеграл от нее равномерно сходится. Используя формулу [4]:

$$K_{iz}(x)=\frac{1}{2}\int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\beta+iz\beta}\,d\beta,\quad \delta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right), \qquad (4)$$

оценивая $F'(z)$ с помощью обобщенного неравенства Минковского, можно показать, что $F(z)$ – аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1-\nu$, если $f(x) \in L_{\nu,2}(\mathrm{R}_+)$, $0 < \nu < 1$.

Пусть $f(x) \in L_2(\mathrm{R}_+)$. Показано [4], что функция, представимая интегралом Конторовича – Лебедева (1), исчезает на бесконечности и является бесконечно дифференцируемой функцией и, следовательно, удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем $\lambda \le 1$. Установим связь интеграла (3) с интегралом типа Коши с плотностью $F(\tau)$ по оси. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau - z}\int_{0}^{\infty}K_{i\tau}(t)f(t)dt.$$

Воспользовавшись представлением (4) при $\delta = 0$, в силу абсолютной сходимости поменяв порядок интегрирования в полученном повторном интеграле, можем представить интеграл типа Коши в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}f(t)dt\int_{-\infty}^{0}e^{-t\operatorname{ch}u}du\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}f(t)dt\int_{0}^{\infty}e^{-t\operatorname{ch}u}du\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau.$$

Величина внутреннего интеграла по τ будет различной в зависимости от того, какой знак имеет действительный параметр u и в какой полуплоскости лежит комплексный параметр z. Применяя лемму Жордана, а затем теорему о вычетах, будем иметь

при $u > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} e^{izu}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

при $u < 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -e^{izu}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) пусть $\operatorname{Im} z > 0$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}f(t)\int_{0}^{\infty}e^{-t\operatorname{ch}u+iuz}du\,dt;$$

2) пусть $\operatorname{Im} z<0,$ тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau-z}d\tau=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}f(t)\int_{-\infty}^{0}e^{-t\operatorname{ch}u+iuz}du\,dt.$$

Поскольку интеграл типа Коши представляет собой аналитическую функцию в плоскости с разрезом по действительной оси, то функции, определенные по формулам

$$F^{+}(z)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}f(t)\int_{0}^{\infty}e^{-t\operatorname{ch}u+iuz}du\,dt,\; F^{-}(z)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}f(t)\int_{-\infty}^{0}e^{-t\operatorname{ch}u+iuz}du\,dt,$$

будут аналитическими соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Кроме того, можно записать аналоги формул Сохоцкого

$$F^{+}(x)-F^{-}(x)=\int_{0}^{\infty}f(t)\int_{0}^{\infty}e^{-t\operatorname{ch}u}\cos(ux)du\,dt=F(x),$$

$$F^{+}(x)+F^{-}(x)=i\int_{0}^{\infty}f(t)\int_{0}^{\infty}e^{-t\operatorname{ch}u}\sin(ux)du\,dt=i\int_{0}^{\infty}f(t)M_{ix}(t)dt.$$

Отметим, что функция $M_{ix}(t)$ рассматривалась в [6] в качестве ядра интегрального преобразования по индексу. Полученные результаты могут быть применены для решения интегральных уравнений в свертках, которые с помощью преобразования Конторовича – Лебедева могут быть сведены к краевой задаче Римана для полуплоскости в классе функций, исчезающих на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.

2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.

4. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.

5. Яроцкая Л. Д. Об уравнении с двумя ядрами типа свертки Конторовича – Лебедева // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 31–35.