УДК 519.86

Н. Н. Буснюк
Белорусский государственный технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОЗАВИСИМОСТИ СТОИМОСТИ И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРОЕКТА В СЕТЕВЫХ ЗАДАЧАХ

В зависимости от количества и качества имеющихся у организации трудовых ресурсов и сложности проекта все задачи сетевого планирования можно разбить на виды, к каждому из которых затем разрабатывать специальные эффективные методы решения.

Проект, которому соответствует сетевой граф, характеризуется двумя качественными показателями (критериями) – длительностью выполнения проекта и стоимостью проекта. Первый показатель равен длине критического пути (если веса дуг представляют продолжительности работ), второй характеризуется суммой весов всех дуг графа (если длительность выполнения работы прямо пропорциональна затратам на ее выполнение). Для случая, когда количество работников совпадает с количеством работ, второй показатель будет оптимален (минимален) при расстановке работников в соответствии с решением задачи о назначениях – нахождением совершенного паросочетания минимального веса в полном двудольном графе. Такое оптимальное решение находится точно за полиномиальное время. Возникает вопрос, насколько таким способом найденное решение близко к решению задачи по первому критерию.

В статье доказана теорема о том, что расстановка рабочих на работы в соответствии с оптимальным (минимальным) решением задачи о назначениях дает сколь угодно плохое решение задачи сетевого планирования, а также приведены примеры сетей для некоторых частных случаев дискретной задачи сетевого планирования.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, задача сетевого планирования, задача о назначениях, оптимизация, длительность выполнения проекта, стоимость проекта.

N. N. Busnyuk
Belarusian State Technological University

RESEARCH OF INTERDEPENDENCE OF COST AND PROJECT DURATION IN NETWORK TASKS

Depending on the quantity and quality of the organization’s labor resources and the complexity of the project, all network planning tasks can be divided into types, and then special effective methods of solution can be developed for each of them.

The project, which corresponds to the network graph, is characterized by two qualitative indicators (criteria) – the duration of the project and the cost of the project. The first indicator is equal to the length of the critical path (if the weight of the arc represents the duration of the work), the second is characterized by the sum of the weights of all the arcs of the graph (if the work duration is directly proportional to the cost of its implementation). For the case when the number of employees coincides with the number of jobs, the second indicator will be optimal (minimum) when arranging the employees in accordance with the solution of the assignment problem – finding the perfect matching of minimum weight in a full bipartite graph. Such an optimal solution can be found exactly in polynomial time. The question arises of how close the solution found to the solution of the problem by the first criterion.

The article proved the theorem that the placement of workers in accordance with the optimal (minimum) solution to the assignment problem gives an arbitrarily poor solution to the network planning problem, as well as examples of networks for some special cases of the discrete network planning problem.

Key words: network chart, critical path, network planning task, assignment task, optimization, project duration, project cost.

Введение. В зависимости от количества и качества имеющихся у организации трудовых ресурсов и сложности проекта все задачи сетевого планирования (ЗСП) можно разбить на виды, к каждому из которых затем разрабатывать специальные эффективные методы решения. В [1] сетевые дискретные задачи были разделены на 4 группы:

1А. $m \geq n$, a_{ij} – константы по всем i,
2А. $m < n$, a_{ij} – константы по всем i,
1Б. $m \geq n$, a_{ij} – переменные по i,
2Б. $m < n$, a_{ij} – переменные по i,

где n – количество работ; m – количество работников; a_{ij} – элемент матрицы A длительностей выполнения работы j работником i.

Если нет разницы, кого из работников назначать на любую из работ (т. е. их качественные показатели одинаковы), и работников в достаточном количестве при любой структуре сетевого графа, то такая постановка задачи равносильна случаю 1А. Данная задача сетевого планирования решается однократным применением любого известного метода для решения *задачи сетевого планирования* (нахождение критического пути в сетевом графе) [2].

Если качественные показатели работников разные и работников достаточно для того, чтобы любая работа могла начаться сразу после завершения всех предшествующих ей работ (т. е. нет простоев работ), то критический путь в сети будет разным в зависимости от способа расстановки (назначений) работников на работы. Такая ситуация равносильна случаю 1Б.

Проект, которому соответствует сетевой граф, характеризуется двумя качественными показателями (критериями) – длительностью выполнения проекта и стоимостью проекта. Первый показатель равен длине критического пути (если веса дуг представляют продолжительности работ), второй характеризуется суммой весов всех дуг графа (если длительность выполнения работы прямо пропорциональна затратам на ее выполнение). Для случая $m = n$ второй показатель будет оптимален (минимален) при расстановке работников в соответствии с решением *задачи о назначениях* – нахождением совершенного паросочетания минимального веса в полном двудольном графе. Такое оптимальное решение находится точно за полиномиальное время. Возникает вопрос, насколько таким способом найденное решение близко к решению задачи по первому критерию.

Целью данной статьи является оценка длины критического пути при расстановке работников в соответствии с решением задачи о назначениях для произвольного сетевого графа.

Основная часть. Легко привести примеры сетей, когда расстановка работников в соответствии с минимальным решением задачи о назначениях приводит к критическому пути наименьшей длины. Первый пример – сеть содержит лишь один путь, т. е. в каждое промежуточное событие входит одна работа и из него выходит также одна работа (рис. 1).

Рис. 1. Сеть состоит из одного пути

Второй пример – сеть, в которой все дуги параллельны, т. е. сеть содержит n путей (рис. 2).

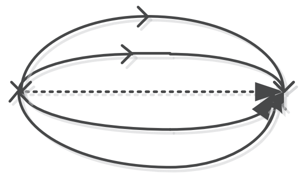

Рис. 2. Сеть содержит n путей

Теорема. При расстановке рабочих на работы в соответствии с минимальным решением задачи о назначениях в общем случае можно получить сколь угодно длинный критический путь.

Доказательство. Для простоты изложения допустим, что n – четное число, т. е. $n = 2r$. В качестве сети G возьмем граф, в котором r параллельных дуг соединяют источник со стоком, и еще есть путь длины r дуг (рис. 3).

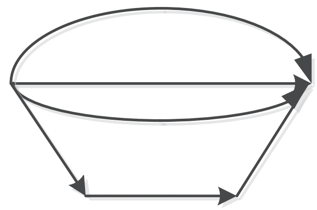

Рис. 3. Пример сети для $r = 3$

Занумеруем дуги сети следующим образом. Путям длины 1 присвоим номера от 1 до r, дугам $r + 1$ пути – номера от $r + 1$ до $2r$.

В качестве матрицы A возьмем матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & & \ldots & \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ & & \ldots & \\ \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \end{bmatrix}.$$

Все элементы первых r строк равны 1, элементы оставшихся r строк равны α, где α – сколь угодно большое натуральное число. Тогда любое паросочетание, задаваемое такой матрицей, будет минимальным веса $\alpha(r + 1)$. Если на первые r работ назначить работников с номерами от 1 до r, на остальные – оставшихся работников, то в сети получится критический путь длины αr. Если же назначить работников с номерами от 1 до r на работы с номерами от $r + 1$ до $2r$, то получим в сети пути длины r и α. Таким образом, при той же стоимости проекта время его выполнения сократилось в r (либо α) раз. Поскольку r и α – любые целые положительные числа, то теорема доказана.

(По определению сетевой граф не содержит параллельных дуг. Мы здесь рассматриваем более общий случай. От сети с параллельными дугами можно перейти к обычному сетевому графу, разбив каждую из параллельных дуг на две, с узлом посередине (т. е. применить операцию гомеоморфизма). В нашем примере можно таким образом добавить $2r$ узлов, длина всех путей возрастет вдвое, а величина оценки сохранится (уменьшение в r либо α раз).)

Если же брать в расчет меньшее количество работников (это всегда возможно при повторных назначениях), то полученный в рассмотренном примере худший по длине критический путь может быть недостижим.

Например, если назначать лишь первых двух работников на все работы, то худший случай достижим при как можно большем простое работ на $r + 1$ пути. Если два работника выполнят вначале работы, соответствующие первым r дугам, то весь проект будет выполнен за $1{,}5r$. Если же сразу один работник возьмется за работы на $r + 1$ пути, а второй – за остальные работы, то весь проект будет выполнен за время r. Данный пример иллюстрирует, что, во-первых, увеличение количества работников в общем случае не приводит к получению лучшего решения, и, во-вторых, что уменьшение количества задействованных работников, влекущее возникновение простоев некоторых работ, тем не менее, может привести к оптимальному решению.

Таким образом, показали, что при переменных a_{ij} различным назначениям работников будут соответствовать различные решения (критические пути).

Если решать задачу методом итераций, улучшая начальный план, то не очевидно, какой начальный план (назначения работников) будет наиболее эффективным в смысле минимизации количества итераций. Скорость получения оптимума зависит от структуры сети. Если проверять каждое назначение, то в случае $m = n$ затратим $O(n!*L)$ операций, где L – сложность решения ЗСП.

Перейдем к рассмотрению случаев 2А и 2Б.

В [1] показано, что простоев работ для случая 2А можно избежать, если $m \geq g$, где g – максимально возможное число одновременно выполняемых работ в сети G. При таком варианте имеем классическую ЗСП.

Можно привести пример, когда для одних и тех же сети G и величины $m < g$ в случае 2А простой работы неизбежен, а в случае 2Б простоя можно избежать (рис. 4). При таких постановках задач в случае 2Б решением задачи будет длина критического пути графа G, а в случае 2А в сеть G нужно добавлять новые дуги, соответствующие времени простоя, и повторно находить критические пути.

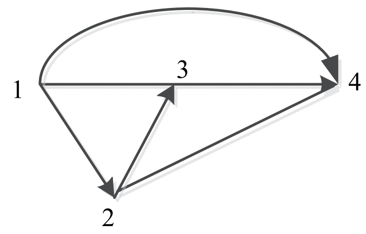

Рис. 4. Сеть из шести работ и четырех событий

Пусть работы занумерованы следующим образом (таблица).

Дуги и соответствующие им номера работ

Номер работы	1	2	3	4	5	6
Дуга графа	14	12	13	23	24	34

И пусть матрица A в случае 2А имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

При такой матрице назначений (длительностей работ) работы 12 и 13 выполнятся раньше работы 14, если все три работы начать одновременно (в момент времени $t = 0$). В момент времени $t = 1$ одна из работ 23 или 24 будет простаивать минимум одну единицу времени, пока закончится работа 13. Если работник с этой работы перейдет на работу 23 (24), начнется простой работы 34. Если же работник после завершения работы 13 приступит к работе 34, одна из работ 23 или 24 будет уже простаивать минимум две единицы времени. Номера работников не играют роли, кто из них на какую работу назначен.

В случае же 2Б на этом же сетевом графе, когда производительности работников разные, простоев можно избежать.

Пусть матрица A в случае 2Б имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Здесь уже играет роль, какого работника на какую работу назначать. В момент времени $t = 0$ все три работника приступят к выполнению трех работ. Если работник i назначен на работу jk, будем применять обозначение $i \in jk$.

Пусть $2 \in 14$, $1 \in 12$, тогда $3 \in 13$. В момент $t = 1$ работники 1 и 2 закончат текущие работы и могут приступить к работам 23 и 24. А работу 34 может выполнить работник 3 сразу же после завершения работы 13.

Приведенный пример показывает, что в более сложной задаче 2Б (по количеству перебора всех вариантов назначений работников) критический путь находится за одну итерацию (проход графа) [3]. В случае 2А критический путь нужно искать каждый раз для модифицированной сети.

Заключение. Таким образом, оптимизация стоимости проекта за счет сокращения времени выполнения работ и увеличения числа работников, выполняющих эти работы, может создать в сети критический путь, удлиняющий время выполнения всего проекта (по сравнению с достижимым минимальным временем) в α раз, где α – количество работ, либо длительность работы.

Поэтому представляется интересным создание методов поиска локально-оптимальных решений одновременно по обоим критериям: стоимости проекта и длительности проекта. Эти методы должны учитывать такие практические ситуации, когда в некоторые моменты времени простаивают работы (т. е. имеем параллельные работы); простаивают работники (количество параллельных работ уменьшилось); один и тот же работник может назначаться последовательно на несколько работ проекта [1, 4, 5].

Литература

1. Буснюк Н. Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2019. № 2. С. 101–104.
2. Плескунов М. А. Задачи сетевого планирования. Екатеринбург: Урал. ун-т, 2014. 92 с.
3. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.
4. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 170–172.
5. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод решения задачи сетевого планирования при ограниченных трудовых ресурсах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 126–128.

References

1. Busnyuk N. N. Varieties of the network planning problem, some methods of their solution and algorithmic estimates. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2, pp. 101−104 (In Russian).
2. Pleskunov M. A. *Zadachi setevogo planirovaniya* [Network planning problems]. Ekaterinburg, Ural'skiy universitet Publ., 2014. 92 p.
3. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus' Publ., 2014. 216 p.
4. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Optimal solution method of assignment problem in network planning. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 170−172 (In Russian).
5. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Solution method of network planning task with restricted labor resources. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 126−128 (In Russian).

Информация об авторе

Буснюк Николай Николаевич − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Information about the author

Busnyuk Nikolay Nikolaevich − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Поступила после доработки 19.11.2019