В. М. СОБОЛЕВСКИЙ

# ДЕФОРМАЦИЯ АНИЗОТРОПНОГО НЕОДНОРОДНОГО И НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО ДИСКА

Исследуем упругую деформацию кругового диска радиусов $r$ и $R$, обладающего цилиндрической ортотропной анизотропией с полюсом анизотропии в центре. Модули Юнга $E_\rho$, $E_\theta$, коэффициенты Пуассона $\mu_\rho$, $\mu_\theta$ и коэффициенты линейного теплового расширения $\alpha_\rho$, $\alpha_\theta$ его являются функциями радиального расстояния $\rho$. Диск находится под действием равномерных внутреннего $(p)$ и внешнего $(q)$ давлений и радиального теплового потока $t = t(\rho; \tau)$.

Запишем уравнения обобщенного закона Гука, дополненные температурными членами [1, 2]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= A_{11} \frac{du}{d\rho} + A_{12} \frac{u}{\rho} - \left( A_{11}\alpha_\rho + A_{12}\alpha_\theta \right) t; \\ \sigma_\theta &= A_{12} \frac{du}{d\rho} + A_{23} \frac{u}{\rho} - \left( A_{12}\alpha_\rho + A_{23}\alpha_\theta \right) t, \end{aligned}\right| \tag{1}$$

где
$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_\rho}{1-\mu_\rho \mu_\theta}; \\ A_{12} &= \frac{E_\rho \mu_\theta}{1-\mu_\rho \mu_\theta}; \\ A_{23} &= \frac{E_\theta}{1-\mu_\rho \mu_\theta}, \end{aligned}\right| \tag{2}$$

а $E_\rho$, $E_\theta$, $\mu_\rho$, $\mu_\theta$, $\alpha_\rho$, $\alpha_\theta$ — соответственно модули Юнга, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного теплового расширения в радиальном и тангенциальном направлениях функции $\rho$.

Дифференциальное уравнение равновесия в применении к рассматриваемой задаче [1, 2]

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия на внутренней $\rho = r$ и внешней $\rho = R$ поверхностях диска

$$\sigma_\rho \Big|_{\rho=r} = -p, \quad \sigma_\rho \Big|_{\rho=R} = -q. \tag{4}$$

Подставив значения компонентов радиального и тангенциального напряжений (1) в уравнение равновесия (3), найдем

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{A_{11}}\frac{dA_{11}}{d\rho}\right)\frac{du}{d\rho} + \frac{1}{A_{11}}\left(\frac{dA_{12}}{d\rho} - \frac{A_{23}}{\rho}\right)u = \varphi(\rho), \tag{5}$$

где $\varphi(\rho) = \frac{1}{A_{11}}\frac{d}{d\rho}\left[\left(A_{11}\alpha_\rho + A_{12}\alpha_\Theta\right)t\right] + \left[\left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}}\right)\alpha_\rho + \frac{A_{12} - A_{23}}{A_{11}}\alpha_\Theta\right]\frac{t}{\rho}$. (6)

Решения уравнения (5) не выражаются в общем случае через элементарные функции, и интеграл его не приводится к квадратурам. Поэтому рассмотрим частные случаи уравнения (5).

1. Пусть $E_\rho = E_{\rho n}\rho^n$, $E_\Theta = E_{\Theta n}\rho^n$, $\mu_\rho = \text{const}$, $\mu_\Theta = \text{const}$, (7)
где $n$ — произвольное вещественное число.

В этом случае уравнение (5) приводится к неоднородному уравнению Эйлера

$$\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + (1+n)\rho\frac{du}{d\rho} - \left(k^2 - \frac{n^2}{4}\right)u = \varphi(\rho), \tag{8}$$

где $k^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}} - n\mu_\Theta$;

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho^{n-2}}\frac{d}{d\rho}\left[\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta\alpha_\Theta\right)t\rho^n\right] + \left[\left(1 - \mu_\Theta\right)\alpha_\rho + \frac{E_{\rho n}\mu_\Theta - E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\alpha_\Theta\right]. \tag{19}$$

Общий интеграл уравнения (8)

$$u = \left[C_1 + \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{-k+\frac{n}{2}+1}d\rho\right]\rho^{k-\frac{n}{2}} +$$

$$+ \left[C_1 - \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{k+\frac{n}{2}+1}d\rho\right]\rho^{-k-\frac{n}{2}}. \tag{10}$$

Соответствующие напряжения находим по формулам (1), подставляя в них значение $u$ из уравнения (10):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \lambda_k\left[C_1 + \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{-k+\frac{n}{2}+1}d\rho\right]\rho^{k-\frac{n}{2}-1} + \\
&+ \lambda_{-k}\left[C_2 - \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{k+\frac{n}{2}+1}d\rho\right]\rho^{-k+\frac{n}{2}-1} - T(\rho); \\
\sigma_\Theta &= \left(k + \frac{n}{2}\right)\lambda_k\left[C_1 + \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{-k+\frac{n}{2}+1}d\rho\right]\rho^{k-\frac{n}{2}-1} + \\
&+ \left(-k + \frac{n}{2}\right)\lambda_{-k}\left[C_2 - \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{k+\frac{n}{2}+1}d\rho\right]\rho^{-k+\frac{n}{2}-1} - T_1(\rho),
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где
$$\left.\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{E_{\rho n}\left(k - \frac{n}{2} + \mu_\Theta\right)}{1 - \mu_\rho \mu_\Theta};\\
\lambda_{-k} &= \frac{E_{\rho n}\left(-k - \frac{n}{2} + \mu_\Theta\right)}{1 - \mu_\rho \mu_\Theta};\\
T(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{1 - \mu_\rho \mu_\Theta}\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta \alpha_\Theta\right) t\rho^n;\\
T_1(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{1 - \mu_\rho \mu_\Theta}\left(\mu_\Theta \alpha_\rho + \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}} \alpha_\Theta\right) t\rho^n.
\end{aligned}\right| \quad (12)$$

Определяя произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ из граничных условий (4) и подставляя полученные значения в равенства (11) и (10), найдем распределение напряжений и смещений:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{1}{1 - a^{2k}}\left[\left(P_k a^{k - \frac{n}{2} + 1} - Q\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{k + \frac{n}{2} - 1} - \right.\\
&\left. - \left(P_{-k} a^{k - \frac{n}{2} + 1} - Q a^{2k}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{k - \frac{n}{2} + 1}\right] - T(\rho);\\
\sigma_\Theta &= \frac{1}{1 - a^{2k}}\left[\left(k + \frac{n}{2}\right)\left(P_k a^{k - \frac{n}{2} + 1} - Q\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{k + \frac{n}{2} - 1} - \right.\\
&\left. - \left(-k + \frac{n}{2}\right)\left(P_{-k} a^{k - \frac{n}{2} + 1} - Q a^{2k}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{k - \frac{n}{2} + 1}\right] - T_1(\rho);
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{R^{1-n}}{1 - a^{2k}}\left[\frac{1}{\lambda_k}\left(P_k a^{k - \frac{n}{2} + 1} - Q\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{k - \frac{n}{2}} - \right.\\
&\left. - \frac{1}{\lambda_{-k}}\left(P_{-k} a^{k - \frac{n}{2} + 1} - Q a^{2k}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{k + \frac{n}{2}}\right],
\end{aligned} \quad (14)$$

где
$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{r}{R};\\
P_k &= p - T(r) + I_k(\rho);\\
P_{-k} &= p - T(r) + I_{-k}(\rho);\\
Q &= q - T(R);
\end{aligned}\right| \quad (15)$$

$$
\left.\begin{aligned}
I_k(\rho) &= \frac{r^{-k+\frac{n}{2}-1}}{2k}\left\{\lambda_{-k}\int_r^R \varphi(\rho)\rho^{k+\frac{n}{2}+1}\,d\rho +\right.\\
&\left.+\lambda_k\left[R^{2k}\int_R^\rho \varphi(\rho)\rho^{-k+\frac{n}{2}+1}\,d\rho - r^{2k}\int_r^\rho \varphi(\rho)\rho^{-k+\frac{n}{2}+1}\,d\rho\right]\right\};\\
I_{-k}(\rho) &= \frac{r^{k+\frac{n}{2}-1}}{2(-k)}\left\{\lambda_k\int_r^R \varphi(\rho)\rho^{-k+\frac{n}{2}+1}\,d\rho +\right.\\
&\left.+\lambda_{-k}\left[R^{-2k}\int_R^\rho \varphi(\rho)\rho^{k+\frac{n}{2}+1}\,d\rho - r^{-2k}\int_r^\rho \varphi(\rho)\rho^{k+\frac{n}{2}+1}\,d\rho\right]\right\}.
\end{aligned}\right| \quad (15)
$$

2. Пусть

$$
E_\rho = E_{\rho n}\rho^n,\quad E_\Theta = E_{\Theta n}\rho^n,\quad 1-\mu_\rho\mu_\Theta = (\mu_\rho\mu_\Theta)_n\,\rho^n,\quad \mu_\Theta = \mu_{\Theta n}\rho^n, \quad (16)
$$

где $n$ — произвольное вещественное число.

В этом случае уравнение (5) приводится к неоднородному обобщенному уравнению Бесселя

$$
\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho\frac{du}{d\rho} + \left(n\mu_{\Theta n}\rho^n - \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\right)u = \varphi(\rho), \quad (17)
$$

где

$$
\varphi(\rho) = \rho^2\frac{d}{d\rho}\left[\left(\alpha_\rho + \mu_{\Theta n}\rho^n\alpha_\Theta\right)t\right] + \left[\left(1-\mu_{\Theta n}\rho^n\right)\alpha_\rho +\right.
$$

$$
\left. + \frac{E_{\rho n}\mu_{\Theta n}\rho^n - E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\,\alpha_\Theta\right]t\rho. \quad (18)
$$

Общий интеграл уравнения (17) имеет вид

$$
u = \left[C_3 - i_{-\nu}(\rho)\right]I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) + \left[C_4 + i_\nu(\rho)\right]I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right), \quad (19)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\text{где } i_\nu(\rho) &= \int \frac{I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\
i_{-\nu}(\rho) &= \int \frac{I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;
\end{aligned}\right| \quad (20)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta = I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) I'_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) - I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) I'_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right);\\
&b = \frac{2}{n}\sqrt{n\mu_{\Theta n}};\\
&\nu = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}},
\end{aligned}\right| \quad (20)$$

причем, если $\nu$ — целое положительное число или нуль, то функцию Бесселя первого рода $I_{-\nu}$ нужно заменить на его же функцию второго рода $K_\nu$.

Соответствующие напряжения находим по формулам (1) подстановкой в них равенства (19):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \left[C_3 - i_{-\nu}(\rho)\right]\Phi_\nu(\rho) + \left[C_4 + i_\nu(\rho)\right]\Phi_{-\nu}(\rho) - T(\rho);\\
\sigma_\Theta &= \left[C_3 - i_{-\nu}(\rho)\right]\psi_\nu(\rho) + \left[C_4 + i_\nu(\rho)\right]\psi_{-\nu}(\rho) - T_1(\rho),
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_\nu(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left[I'_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) + \mu_{\Theta n}\rho^{n-1} I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)\right];\\
\Phi_{-\nu}(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left[I'_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) + \mu_{\Theta n}\rho^{n-1} I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)\right];\\
\psi_\nu(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left[\mu_{\Theta n}\rho^n I'_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) + \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\frac{1}{\rho} I'_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)\right];\\
\psi_{-\nu}(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left[\mu_{\Theta n}\rho^n I'_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right) + \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\frac{1}{\rho} I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)\right];\\
T(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left(\alpha_\rho + \mu_{\Theta n}\rho^n\alpha_\Theta\right)t;\\
T_1(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left(\mu_{\Theta n}\rho^n\alpha_\rho + \frac{E_{\Theta_n}}{E_{\rho n}}\alpha_\Theta\right)t.
\end{aligned}\right| \quad (22)$$

Определяя произвольные постоянными $C_3$ и $C_4$ из граничных условий (4) и подставляя полученные значения в формулы (21) и (19), найдем распределение напряжений и смещений:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{1}{\delta}\{[P_\nu\Phi_{-\nu}(R)+Q\Phi_{-\nu}(r)]\Phi_\nu(\rho)-\\&-[P_{-\nu}\Phi_\nu(R)+Q\Phi_\nu(r)]\Phi_{-\nu}(\rho)\}-T(\rho);\\ \sigma_\Theta &= \frac{1}{\delta}\{[P_\nu\Phi_{-\nu}(R)+Q\Phi_{-\nu}(r)]\psi_\nu(\rho)-\\&-[P_{-\nu}\Phi_\nu(R)+Q\Phi_\nu(r)]\psi_{-\nu}(\rho)\}-T_1(\rho);\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{1}{\delta}\left\{\left[P_{-\nu}\Phi_{-\nu}(R)+Q\Phi_{-\nu}(r)\right]I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)-\right.\\&\left.-\left[P_{-\nu}\Phi_\nu(R)+Q\Phi_\nu(r)\right]I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)\right\},\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

где $\delta=\Phi_\nu(r)\cdot\Phi_{-\nu}(R)-\Phi_\nu(R)\cdot\Phi_{-\nu}(r);$

$$\left.\begin{aligned}&P_\nu=-p+T(r)+I_\nu(\rho);\\&P_{-\nu}=-p+T(r)+I_{-\nu}(\rho);\\&Q=q-T(R);\\&I_k(\rho)=\Phi_{-\nu}(r)\int_r^R\frac{I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho+\\&+\frac{\Phi_\nu(R)\Phi_{-\nu}(r)}{\Phi_{-\nu}(R)}\int_R^\rho\frac{I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho-\Phi_\nu(r)\int_r^\rho\frac{I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\&I_{-k}(\rho)=\Phi_\nu(r)\int_r^R\frac{I_{-\nu}\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho+\\&+\frac{\Phi_{-\nu}(R)\Phi_\nu(r)}{\Phi_\nu(R)}\int_R^\rho\frac{I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho-\Phi_{-\nu}(r)\int_r^\rho\frac{I_\nu\left(b\rho^{\frac{n}{2}}\right)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho.\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

3. Пусть

$$E_\rho = E_{\rho n}(A+B\rho)^n, \quad E_\Theta = E_{\Theta n}(A+B\rho)^n, \quad \mu_\rho = \text{const}, \; \mu_\Theta = \text{const}, \tag{26}$$

где $A$, $B$, $n$ — произвольные вещественные числа.

В этом случае уравнение (5) приводится к неоднородному обобщенному гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$\rho^2(A+B\rho)\frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho\left[A+(n+1)B\rho\right]\frac{du}{d\rho} +$$

$$+\left[-A\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}} + \left(n\mu_\Theta - \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\right)B\rho\right]u = \varphi(\rho), \tag{27}$$

где
$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{(A+B\rho)^{n-1}}\frac{d}{d\rho}\left[\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta\,\alpha_\Theta\right)t(A+B\rho)^n\right] +$$

$$+\left[\left(1-\mu_\Theta\right)\alpha_\rho + \frac{E_{\rho n}\mu_\Theta - E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\alpha_\Theta\right]t\rho(A+B\rho). \tag{28}$$

Общий интеграл уравнения (27)

$$u = [C_5 - i_2(\rho)]\,F_1(\rho) + [\,C_6 + i_1(\rho)]\,F_2(\rho), \tag{29}$$

где
$$\left.\begin{aligned}
&F_1(\rho) = \rho^k F\left(\alpha, \beta, \gamma; -\frac{B}{A}\rho\right)^k;\\
&F_2(\rho) = \rho^{k+1-\gamma}F\left(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; -\frac{B}{A}\rho\right)^{1-\gamma+k};\\
&i_1(\rho) = \int\frac{F_1(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\
&i_2(\rho) = \int\frac{F_2(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\
&\Delta = F_1(\rho)\cdot F_2'(\rho)\,F_2(\rho)\cdot F_1'(\rho);\\
&k = \sqrt{\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}};\\
&\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = k + \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2+4\left(\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}} - n\mu_\Theta\right)};\\
&\gamma = 1+2k.
\end{aligned}\right| \tag{30}$$

Соответствующие напряжения находим по формулам (1) подстановкой в них значения $u$ из уравнения (29)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= [C_5 - i_2(\rho)]\,\Upsilon_1(\rho) + [C_6 + i_1(\rho)]\,\Upsilon_2(\rho) - T(\rho), \\ \sigma_\Theta &= [C_5 - i_2(\rho)]\,\Lambda_1(\rho) + [C_6 + i_1(\rho)]\,\Lambda_2(\rho) - T_1(\rho), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Upsilon_1(\rho) &= \frac{E_{\rho n}(A + B\rho)^n}{1 - \mu_\rho\,\mu_\Theta}\left[F_1'(\rho) + \mu_\Theta\,\frac{F_1(\rho)}{\rho}\right]; \\ \Upsilon_2(\rho) &= \frac{E_{\rho n}(A + B\rho)^n}{1 - \mu_\rho\,\mu_\Theta}\left[F_2'(\rho) + \mu_\Theta\,\frac{F_2(\rho)}{\rho}\right]; \\ \Lambda_1(\rho) &= \frac{E_{\Theta n}(A + B\rho)^n}{1 - \mu_\rho\,\mu_\Theta}\left[\mu_\rho\,F_1'(\rho) + \frac{F_1(\rho)}{\rho}\right]; \\ \Lambda_2(\rho) &= \frac{E_{\Theta n}(A + B\rho)^n}{1 - \mu_\rho\,\mu_\Theta}\left[\mu_\rho\,F_2'(\rho) + \frac{F_2(\rho)}{\rho}\right]; \\ T(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{1 - \mu_\rho\,\mu_\Theta}\,(\alpha_\rho + \mu_\Theta\,\alpha_\Theta)\,t(A + B\rho)^n; \\ T_1(\rho) &= \frac{E_{\Theta n}}{1 - \mu_\rho\,\mu_\Theta}\,(\mu_\rho\,\alpha_\rho + \alpha_\Theta)\,t(A + B\rho)^n. \end{aligned}\right| \tag{32}$$

Определяя произвольные постоянные $C_5$ и $C_6$ из граничных условий (4) и подставляя полученные значения в формулы (31) и (29), найдем распределение напряжений и смещений

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\delta}\{[P_1\Upsilon_2(R) + Q\Upsilon_2(r)]\,\Upsilon_1(\rho) - \\ &\quad + [P_2\Upsilon_1(R) + Q\Upsilon_2(r)]\,\Upsilon_2(\rho)\} - T(\rho); \\ \sigma_\Theta &= \frac{1}{\delta}\{[P_1\Upsilon_2(R) + Q\Upsilon_2(r)]\,\Lambda_1(\rho) - \\ &\quad - [P_2\Upsilon_1(R) + Q\Upsilon_1(r)]\,\Lambda_2(\rho)\} - T_1(\rho); \end{aligned}\right| \tag{33}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\delta}\{[P_1\Upsilon_2(R) + Q\Upsilon_2(r)]F_1(\rho) - \\ &\quad [P_2\Upsilon_1(R) + Q\Upsilon_1(r)]\,F_2(\rho)\}, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\delta = \Upsilon_1(r)\Upsilon_2(R) - \Upsilon_1(R)\cdot\Upsilon_2(r)$;

$$\left.\begin{aligned}
&P_1 = -p + T(r) + I_1(\rho);\\
&P_2 = -p + T(r) + I_2(\rho);\\
&Q = q - T(R);\\
&I_1(\rho) = \Upsilon_2(r)\int_r^R \frac{F_1(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho + \frac{\Upsilon_1(R)\Upsilon_2(r)}{\Upsilon_2(R)}\int_R^\rho \frac{F_2(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho -\\
&\qquad - \Upsilon_1(r)\int_r^\rho \frac{F_2(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\
&I_2(\rho) = \Upsilon_1(r)\int_r^R \frac{F_2(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho + \frac{\Upsilon_1(r)\Upsilon_2(R)}{\Upsilon_1(R)}\int_R^\rho \frac{F_1(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho -\\
&\qquad - \Upsilon_2(r)\int_r^\rho \frac{F_1(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

4. Пусть

$$E_\rho = E_{\rho n}e^{n\rho^k},\ E_\Theta = E_{\Theta n}e^{n\rho^k},\ 1-\mu_\rho\,\mu_\Theta = (\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n\,e^{n\rho^k},$$

$$\mu_\Theta = \text{const}, \tag{36}$$

где $n$, $k$ — произвольные вещественные числа.

В этом случае уравнение (5) приводится к неоднородному уравнению Эйлера

$$\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho\frac{du}{d\rho} - \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}u = \varphi(\rho), \tag{37}$$

где

$$\varphi(\rho) = \rho^2\frac{d}{d\rho}\left[\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta\alpha_\Theta\right)t\right] + \left[\left(1-\mu_\Theta\right)\alpha_\rho + \right.$$
$$\left. + \frac{E_{\rho n}\mu_\Theta - E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\alpha_\Theta\right]t\rho. \tag{38}$$

Общий интеграл уравнения (37)

$$u = \left[C_7 + \frac{1}{2k}\int\varphi(\rho)\rho^{-k+1}d\rho\right]\rho^k + \left[C_8 - \frac{1}{2k}\int\varphi(\rho)\rho^{k+1}d\rho\right]\rho^{-k}, \tag{39}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}}$. (40)

Соответствующие напряжения находим по формулам (1), подставляя в них значение $u$ из уравнения (39):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \lambda_k\left[C_7 + \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{-k+1}d\rho\right]\rho^{k+1} + \\
&+ \lambda_{-k}\left[C_8 - \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{k+1}d\rho\right]\rho^{-k+1} - T(\rho); \\
\sigma_\Theta &= k\lambda_k\left[C_7 + \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{-k+1}d\rho\right]\rho^{k+1} - \\
&- k\lambda_{-k}\left[C_8 - \frac{1}{2k}\int \varphi(\rho)\rho^{k+1}d\rho\right]\rho^{-k+1} - T_1(\rho),
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{E_{\rho n}(k+\mu_\Theta)}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}; \\
\lambda_{-k} &= \frac{E_{\rho n}(-k+\mu_\Theta)}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}; \\
T(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta\,\alpha_\Theta\right)t; \\
T_1(\rho) &= \frac{E_{\rho n}}{(\mu_\rho\,\mu_\Theta)_n}\left(\mu_\Theta\,\alpha_\rho + \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\alpha_\Theta\right)t.
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Определяя произвольные постоянные $C_7$ и $C_8$ из граничных условий (4) и подставляя полученные значения в формулы (41) и (39), найдем распределение напряжений и смещений:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{1}{1-a^{2k}}\left[\left(P_k a^{k+1} - Q\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} - \right. \\
&\left. - \left(P_{-k}a^{k+1} - Qa^{2k}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{k+1}\right] - T(\rho); \\
\sigma_\Theta &= \frac{k}{1-a^{2k}}\left[\left(P_k a^{k+1} - Q\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} - \right. \\
&\left. - \left(P_{-k}a^{k+1} - Qa^{2k}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^{k+1}\right] - T_1(\rho);
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

$$u = \frac{R}{1-a^{2k}}\left[\frac{1}{\lambda_k}\left(P_k a^{k+1} - Q\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^k - \frac{1}{\lambda_{-k}}\left(P_{-k}a^{k+1} - Qa^{2k}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^k\right], \quad (44)$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
&a = \frac{r}{R};\\
&P_k = p - T(r) + I_k(\rho);\\
&P_{-k} = p - T(r) + I_{-k}(\rho);\\
&Q = q - T(R);\\
&I_k(\rho) = \frac{r^{-k-1}}{2k}\Bigg\{\lambda_{-k}\int_r^R \varphi(\rho)\rho^{k+1}\,d\rho + \\
&+\lambda_k\left[R^{2k}\int_R^\rho \varphi(\rho)\rho^{-k+1}\,d\rho - r^{2k}\int_r^\rho \varphi(\rho)\rho^{-k+1}\,d\rho\right]\Bigg\};\\
&I_{-k}(\rho) = \frac{r^{k-1}}{-2k}\Bigg\{\lambda_k\int_r^R \varphi(\rho)\rho^{-k+1}\,d\rho + \\
&+\lambda_{-k}\left[R^{-2k}\int_R^\rho \varphi(\rho)\rho^{k+1}\,d\rho - r^{-2k}\int_r^\rho \varphi(\rho)\rho^{k+1}\,d\rho\right]\Bigg\}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}
$$

5. Пусть $E_\rho = E_{\rho n}\, e^{n\rho^k}$, $E_\Theta = E_{\Theta n}\, e^{n\rho^k}$, $\mu_\rho = \text{const}$, $\mu_\Theta = \text{const}$, (46)

где $n$, $k$ — произвольные вещественные числа.

В этом случае уравнение (5) приводится к неоднородному обобщенному вырожденному гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$
\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho(nk\rho^k + 1)\frac{du}{d\rho} + \left(nk\mu_\Theta\rho^k - \frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\right)u = \varphi(\rho), \tag{47}
$$

где

$$
\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{e^{n\rho^k}}\frac{d}{d\rho}\left[\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta\alpha_\Theta\right)te^{n\rho^k}\right] + 
$$

$$
+\left[\left(1 - \mu_\Theta\right)\alpha_\rho + \frac{E_{\rho n}\mu_\Theta - E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}\alpha_\Theta\right]t\rho. \tag{48}
$$

Общий интеграл уравнения (47)

$$
u = [C_9 - i_4(\rho)]\,F_3(\rho) + [C_{10} + i_3(\rho)]\,F_4(\rho); \tag{49}
$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
&F_3(\rho) = \rho^{k\lambda} F(\alpha, \gamma; -n\rho^k);\\
&F_4(\rho) = \rho^{k(\lambda+1-\gamma)} F(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma; -n\rho^k);\\
&i_3(\rho) = \int \frac{F_3(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\
&i_4(\rho) = \int \frac{F_4(\rho)}{\Delta}\varphi(\rho)d\rho;\\
&\Delta = F_3(\rho)F_4'(\rho) - F_4(\rho)F_3'(\rho);\\
&\lambda = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}};\\
&\alpha = \frac{1}{k}\left(\mu_\Theta + \sqrt{\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}}\right);\\
&\gamma = 1 + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{E_{\Theta n}}{E_{\rho n}}}.
\end{aligned}\right\} \quad (50)
$$

Соответствующие напряжения находим по формулам (1) подстановкой в них значения $u$ из уравнения (49):

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_\rho = [C_9 - i_4(\rho)]\,\Gamma_1(\rho) + [C_{10} + i_3(\rho)]\,\Gamma_2(\rho) - T(\rho);\\
&\sigma_\Theta = [C_9 - i_4(\rho)]\,H_1(\rho) + [C_{10} + i_3(\rho)]\,H_2(\rho) - T_1(\rho),
\end{aligned}\right\} \quad (51)
$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
&\Gamma_1(\rho) = \frac{E_{\rho a}\, e^{n\rho^k}}{1-\mu_\rho\mu_\Theta}\left[F_3'(\rho) + \mu_\Theta\frac{F_3(\rho)}{\rho}\right];\\
&\Gamma_2(\rho) = \frac{E_{\rho n}\, e^{n\rho^k}}{1-\mu_\rho\mu_\Theta}\left[F_4'(\rho) + \mu_\Theta\frac{F_4(\rho)}{\rho}\right];\\
&H_1(\rho) = \frac{E_{\Theta n}\, e^{n\rho^k}}{1-\mu_\rho\mu_\Theta}\left[\mu_\rho F_3'(\rho) + \frac{F_3(\rho)}{\rho}\right];\\
&H_2(\rho) = \frac{E_{\Theta n}\, e^{n\rho^k}}{1-\mu_\rho\mu_\Theta}\left[\mu_\rho F_4'(\rho) + \frac{F_4(\rho)}{\rho}\right];\\
&T(\rho) = \frac{E_{\Theta n}}{1-\mu_\rho\mu_\Theta}\left(\alpha_\rho + \mu_\Theta\alpha_\Theta\right) te^{n\rho^k};\\
&T_1(\rho) = \frac{E_{\Theta n}}{1-\mu_\rho\mu_\Theta}\left(\mu_\rho\alpha_\rho + \alpha_\Theta\right) te^{n\rho^k}.
\end{aligned}\right\} \quad (52)
$$

Определяя произвольные постоянные $C_9$ и $C_{10}$ из граничных условий (4) и подставляя полученные значения в формулы (51) и (49), найдем распределение напряжений и смещений:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho = \frac{1}{\delta}\{[P_3\Gamma_2(R) + Q\Gamma_2(r)]\,\Gamma_1(\rho) -\\ - [P_4\Gamma_1(R) + Q\Gamma_1(r)]\Gamma_2(\rho)\} - T(\rho);\\ \sigma_\Theta = \frac{1}{\delta}\{[P_3\Gamma_2(R) + Q\Gamma_2(r)]\,H_1(\rho) -\\ - [P_4\Gamma_1(R) + Q\Gamma_1(r)]\,H_2(\rho)\} - T_1(\rho);\end{aligned}\right| \tag{53}$$

$$u = \frac{1}{\delta}\{[P_3\Gamma_2(R) + Q\Gamma_2(r)]\,F_3(\rho) - [P_4\Gamma_1(R) + Q\Gamma_1(r)]\,F_4(\rho)\}, \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{где } \delta = \Gamma_1(r)\Gamma_2(R) - \Gamma_1(R)\Gamma_2(r);\\ &P_3 = -p + T(r) + I_3(\rho);\\ &P_4 = -p + T(r) + I_4(\rho);\\ &Q = q - T(R);\\ &I_3(\rho) = \Gamma_2(r)\int\limits_r^R \frac{F_3(\rho)}{\Delta}\,\varphi(\rho)d\rho + \frac{\Gamma_1(R)\Gamma_2(r)}{\Gamma_2(R)}\int\limits_R^\rho \frac{F_4(\rho)}{\Delta}\,\varphi(\rho)d\rho -\\ &\qquad - \Gamma_1(r)\int\limits_r^\rho \frac{F_4(\rho)}{\Delta}\,\varphi(\rho)d\rho;\\ &I_4(\rho) = \Gamma_1(r)\int\limits_r^R \frac{F_4(\rho)}{\Delta}\,\varphi(\rho)d\rho + \frac{\Gamma_1(r)\,\Gamma_2(R)}{\Gamma_1(R)}\int\limits_R^\rho \frac{F_3(\rho)}{\Delta}\,\varphi(\rho)d\rho -\\ &\qquad - \Gamma_2(r)\int\limits_r^\rho \frac{F_3(\rho)}{\Delta}\,\varphi(\rho)d\rho.\end{aligned}\right| \tag{55}$$

Соответствующие деформации находим по формулам $\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}$, $\varepsilon_\Theta = \frac{u}{\rho}$ подстановкой в них значения $u$ из уравнений (14), (24), (34), (44) и (54).

Эти решения можно применить и к деформации анизотропной неоднородной и неравномерно нагретой длинной толстостенной трубы.

Заметим, что из формул (13), (14) и (43), (44) вытекают формулы С. Г. Лехницкого [1] при $t = 0$, полученные нами при $n = 0$ [2].

Модули упругости изменяются по гиперболическому закону (7), (16), (26) $n < 0$ при: а) изменении температуры многих тел; б) закалке стальных деталей; в) изменении влажности древесины [3]; г) контурном прессовании древесины и пр.

Модули упругости древесины изменяются при больших степенях контурного прессования по степенному закону (7), (16) $n > 0$ или по биномиальному закону (26) $n > 0$, а при малых степенях контурного прессования — по экспоненциальному закону (36), (46) $k > 0$ [1].

## Литература


1. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. В. М. Соболевский. Упругое напряженное состояние анизотропного вращающегося кругового диска под действием центробежных сил, внутренней и внешней равномерно распределенных радиальных нагрузок и радиального теплового потока. Уч. зап. БГИНХ им. В. В. Куйбышева, вып. 6. Минск, 1958.
3. Л. М. Перелыгин, А. Х. Певцов. Механические свойства и испытания древесины. М., ОНТИ, 1934.



*А. З. ХАРТАНОВИЧ*


# ВЛИЯНИЕ СЕРНОКИСЛОЙ И ХЛОРИСТОЙ МЕДИ НА ФОРМУ КРИСТАЛЛОВ ХЛОРИСТОГО АММОНИЯ

Влияние примесей на форму кристаллов хлористого аммония было известно еще в прошлом веке.

Бедан заметил, что $NH_4Cl$ в присутствии $CuSO_4$ образует кубоэктаэдры. Фулон получил трапецоэдрические кристаллы нашатыря в присутствии $FeCl_3$. Ретгерс установил, что на огранку нашатыря влияют мочевина, $FeCl_3$, $CrCl_3$, $NiCl_2$, $CoCl_2$, $MnCl_2$, $(NH_4)_2SO_4$, $(NH_4)MoO_4$, слабее действуют $CdCl_2$, $ZnCl_2$, $CuCl_2$, $HgCl_2$.

Наблюдения ученых прошлого столетия и других исследователей носили случайный, качественный характер, без систематического количественного исследования, без описания точных условий, при которых происходил рост кристаллов. Поэтому выяснить причину и механизм действия примесей на величину и габитус кристаллов не удавалось.

Систематическое исследование влияния примесей разных ионов в растворе на габитус кристаллов $NH_4Cl$ и $NH_4Br$ провели Ю. Я. Тильманс [1] и В. Д. Кузнецов [2].

Ю. Я. Тильманс пытался выяснить причины дендритной кристаллизации нашатыря и исследовал «...механизм действия примесей разных ионов в растворе на огранку кристаллов, последовательное нарастание этих изменений, влияние температурного перепада при одновременном действии примесей», а также исследовал совместное действие разных примесей. Он установил количественное соотношение различных примесей и $NH_4Cl$, необходимое для