УДК 517.977

В. В. Крахотко[1], Г. П. Размыслович[1], В. В. Игнатенко[2]
[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

H-УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе рассматривается проблема *H*-управляемости, полной *H*-управляемости и полной управляемости по отношению к выходу системы. Основным объектом исследования выступают дескрипторные динамические системы и динамические системы с запаздыванием по управлению. Показано, что траектории рассматриваемых динамических систем являются решениями специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых известны критерии управляемости. Необходимые и достаточные условия различных видов управляемости описаны в терминах определяющих уравнений, которые построены на начальных системах.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, дифференциально-алгебраические системы, управляемость динамических систем.

V. V. Krakhotko[1], G. P. Razmyslovich[1], V. V. Ignatenko[2]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

H-CONTROLLABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS

The report considers the problem of *H*-controllability, full *H*-controllability and complete controllability with respect to the system output. The main objects of study are descriptor dynamical systems and dynamical systems with control delay. It is shown that the trajectories of the considered dynamical systems are solutions of specially designed systems of ordinary differential equations for which controllability criteria are known. Necessary and sufficient conditions for various types of controllability are described in terms of defining equations that are built on initial systems.

Key words: linear differential systems, differential-algebraic systems, controllability of dynamical systems.

Введение. В теории оптимального управления очень важную роль играет получение параметрических критериев различных видов управляемости (условной, относительной, полной и т. д.) для различных видов динамических систем. В последнее время очень большое внимание уделяется исследованию управляемости дескрипторных систем, когда матрица при операторе дифференцирования вырождена.

Основная часть. Рассмотрим систему управления

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \ge 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, A_0, A, B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $x_0 \in R^r$, $\det A_0 = 0$.

Пусть система (1) удовлетворяет условию совместности [1]. Тогда ее решение может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{A_0^d A t} A_0 A_0^d q + \int_0^t e^{A_0^d A(t-s)} A_0^d Bu(s)\,ds + \\ + \left(E_n - A_0 A_0^d\right) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(A_0 A^d\right)^i Bu^{(i)}(t), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 = A_0 A_0^d q + \left(E_n - A_0 A_0^d\right) \times \\ \times \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(A_0 A^d\right)^i A^d Bu^{(i)}(0), \tag{3}$$

где A_0^d и A^d – обратные матрицы Драйзина к матрицам A_0 и A соответственно; число k – индекс матрицы A_0, $q \in R^n$, $u^{(i)}(0) \in R^r$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Здесь мы предполагаем, что управление $u(t)$, $t \ge 0$, – это достаточно гладкая *r*-мерная вектор-функция. В данном случае можно показать, что решение (2) системы (1) является выходом системы

$$\dot{Y} = \hat{A} Y + \hat{B} v,\ x = CY \tag{4}$$

с начальным условием

$$Y(0)=Y_0=\left(q,\ u^i(0),\ i=1,2,...,k\right),$$

где $Y=\left(y,u^1,...,u^k\right),\ v=u^{(k)},\ \hat{A}=\left(\hat{A}_{pq}\right),\hat{B}=\left(\hat{B}_{p1}\right)$, $p=1,...,k+1,\ q=1,...,k+1$ представляют собой блочные матрицы. Кроме того,

$$\hat{A}_{11}=A_0^dA,\ \hat{A}_{12}=A_0^dB;$$
$$\hat{A}_{23}=\hat{A}_{34}=...=\hat{A}_{k\,k+1}=E_r,\ \hat{A}_{ij}=0,$$

для всех остальных индексов p и q

$$\hat{B}_{k+1,1}=E^r,\ \hat{B}=0,\ i=1,...,k,$$
$$C=[A_0A_0^d,\left(E_n-A_0A_0^d\right)A^dB,...,$$
$$(-1)^{k-1}\left(E_n-A_0A_0^d\right)\left(A_0A^d\right)^{k-1}A^dB].$$

Мы полагаем, что

$$\Omega_0=\Big\{z\in R^n\,\Big|\,z=A_0A_0^dq+\left(E_n-A_0A_0^d\right)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left(A_0A^d\right)^iA^dBu^{(i)}(0),\ q\in R^n,$$
$$u^{(i)}(0)\in R^r,\ i=\overline{0,k-1}\Big\}.$$

Пусть H – постоянная $n\times n$-матрицы.

Определение 1. Система (1) называется H-управляемой, если для каждого $x_0(\cdot)\in\Omega_0$ существует момент времени $t_1<+\infty$ и гладкое управление $u(t),\ t\in[0,\ t_1]$, такие, что $x(0)=x_0$ и $Hx(t_1)=0$.

Определение 2. Система (1) называется полностью H-управляемой, если для каждого $x_0(\cdot)\in\Omega_0$ существует момент времени $t_1<+\infty$ и гладкое управление $u(t),\ t\geq 0$, такие, что решение $x(t),\ t\geq 0$, системы (1) обладает свойством $x(0)=x_0$ и $Hx(t)\equiv 0,\ t\geq t_1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Система (1) H-управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\Big(H\,A_0A_0^d,(-1)^jH\left(E_n-A_0A_0^d\right)\times$$
$$\times\left(A_0A^d\right)^jA^dB,\ j=\overline{0,k-1};$$
$$H\left(A_0^dA\right)^iA_0^dB,\ i=\overline{0,n-1}\Big)=\operatorname{rank}\Big((-1)^jH\times$$
$$\times\left(E_n-A_0A_0^d\right)\left(A_0A_0^d\right)^jB,\ j=\overline{0,k-1};$$
$$H\left(A_0^dA\right)^iA_0^dB,\ i=\overline{0,n-1}\Big).$$

Теорема 2. Система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left(L,\bar{H}\left(A_0^dA\right)^iA_0^dB,\ j=\overline{0,k-1}\right)=$$
$$=\operatorname{rank}\left(L,\bar{H}\right),$$

где

$$L=\begin{bmatrix} H_1 & ... & H_k\\ HA_0^dB & ... & H_{k-1}\\ H\left(A_0^dA\right)B & ... & H_{k-2}\\ ... & ... & ...\\ H\left(A_0^dA\right)^{n+k-2}A_0^dB & ...\ H\left(A_0^dA\right)^{n-1}A_0^dB & \end{bmatrix},$$

$$\bar{H}=\begin{bmatrix} HA_0^dA_0\\ HA_0^dA\\ H\left(A_0^dA\right)^2\\ ...\\ H\left(A_0^dA\right)^{n+k-1}\end{bmatrix},$$

$$H_{j+1}=(-1)^jH\left(E_n-A_0A_0^d\right)\left(A_0A^d\right)^jA^dB,$$
$$i=\overline{0,k-1}.$$

Доказательства теорем 1 и 2 легко вытекают из представления системы (1) в виде (4) с использованием результатов [2].

Рассмотрим системы (1) и (4). Введем соответствия

$$\begin{gathered}x(t)\to X_t,u(t)\to U_t,y(t)\to Y_t,\\ u^i(t)\to U_t^i,\ p\to\Delta.\end{gathered}\tag{5}$$

Здесь X_t,Y_t и U_t,U_t^i – матрицы размеров $n\times r$ и $r\times r$ соответственно; $p\equiv\dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, а Δ – оператор сдвига

$$\left(\Delta^iX_t=X_{t+i};\Delta^iU_t=U_{t+i};\Delta^iU_t^j=U_{t+i}^j\right).$$

Используя уравнение (4) и соответствия (5), мы переходим к следующим реккурентным соотношениям:

$$\begin{gathered}Y_{t+1}=A_0^dAY_t+A_0^dBU_t^1,\ U_{t+1}^i=U_t^{t+1},\ j=\overline{0,k-1},\\ U_{t+1}^k=U_{t+k},\ X_t=C\left[Y_t,U_t^1,...,U_t^k\right],t\geq 0,\end{gathered}\tag{6}$$

при условии, что

$$Y_t\equiv 0,\ t=0,...,k-1,\ U_t\equiv 0,\ t\neq k,$$
$$U_k=E_r.$$

Вышеприведенные соотношения (6) называются *определяющими уравнениями* для системы управления (1).

Через X_t^* мы обозначим решение определяющих уравнений (6) с условиями

$$Y_1 = E_n \text{ и } U_t \equiv 0,\ t \ge 0.$$

Тогда теоремы 1 и 2 можно сформулировать в терминах решений определяющих уравнений.

Теорема 1*. Система (1) является H-управляемой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left(HX_1^*,\ HX_i,\ i=\overline{1,n+k}\right) = \\ = \operatorname{rank}\left(HX_i,\ i=\overline{1,n+k}\right).$$

Теорема 2*. Система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left(L,\ \bar{H}X_i,\ i=\overline{1,n+k}\right) = \operatorname{rank}\left(L\bar{H}\right),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} HX_k & \dots & HX_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ HX_{n+2k-1} & \dots & HX_{n+k} \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} HX_1^* \\ \dots \\ HX_{n+k}^* \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты могут быть перенесены на дискретные системы и системы с запаздыванием [3, 4].

Например, рассмотрим систему управления вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_2u(t-h) + \\ + \int_0^h B(s)u(t-s)\,ds,\ t \ge 0 \qquad (7)$$

с начальным условием

$$x_0 = x(0),\ u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0)\},$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r B$; A, B_1, B_2 – постоянные матрицы соответствующих размеров; $B(t)$ – $n \times r$-матрица-функция; x_0 – n-вектор; $\varphi(t)$ – кусочно-непрерывная n-векторная функция.

Определение 3. Система (7) называется полностью H-управляемой для любого вектора $x_0 \in R^n$ и любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(t), t \in [-h, 0)$, если существуют момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$, и управление $u(t)$, $t \in [0,\ t_1 - h]$, $u(t) \equiv 0$, $t \ge t_1 - h$, такие, что траектория $x(t)$, $t \ge 0$, системы (7) удовлетворяет условиям

$$x(0) = x_0,\ Hx(t) \equiv 0,\ t \ge t_1.$$

Предположим, что в любой момент времени t, $t \ge 0$, состояние $x(t)$ системы (7) неизвестно, а управление $u(t)$, $t \ge 0$, выбирается из условия, что выход

$$y(t) = Hx(t),\ t \ge 0,\ y_0 = y(0) \qquad (8)$$

системы (7) известен.

Определение 4. Система (7) называется полностью управляемой по отношению к выходу (8), если для любого m-вектора y_0 и любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(t)$, $t \in [-h, 0)$, существуют момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$, и управление $u(t)$, $t \in [0,\ t_1 - h]$, $u(t) \equiv 0$, $t \ge t_1 - h$, такие, что траектория $y(t) \equiv 0$, $t \ge t_1$.

Теорема 3. Система (7) является полностью H-управляемой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left(\tilde{H}A^iB_h,\ i=\overline{0,k-1}\right) = \operatorname{rank}\left(\tilde{H}\right), \qquad (9)$$

где

$$B_h = B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_0^h e^{-As}B(s)\,ds,\ t \ge 0,$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} HA^i \\ \overline{i=0,k-1} \end{bmatrix},$$

здесь k – степень минимального многочлена матрицы A.

Доказательство. Пусть

$$x(t) = p(t) + \int_0^h M(s)u(t-s)\,ds,\ t \ge 0, \qquad (10)$$

где $p(t)$ – некоторая n-векторная функция, а $M(t)$, $t \in [0, h]$ – некоторая $n \times r$-матрица. Тогда из (7) следует, что

$$\dot{p}(t) + M(0)u(t) - M(h)u(t-h) + \\ + \int_0^h M'(s)u(t-s)\,ds = Ap(t) + \\ + \int_0^h AM(s)u(t-s)\,ds + B_1u(t) + \\ + B_2u(t-h) + \int_0^h B(s)u(t-s)\,ds. \qquad (11)$$

Теперь предположим, что $n \times r$-матричная функция $M(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM(s)}{ds} = AM(s) + B(s),\ s \in [0, h] \qquad (12)$$

с начальным условием

$$M(h) = -B_2. \qquad (13)$$

Исходя из (12) и (13), имеем

$$M(s) = -e^{A(s-h)}B_2 + \int_0^s e^{A(s-\tau)}B(\tau)\,d\tau.$$

Итак, на основании равенства (11) получим, что n-векторная функция $p(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет системе управления вида

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + \Big(B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_0^h e^{-As}B(s)\Big)dsu(t) \qquad (14)$$

с начальным условием

$$p(0) = x_0 + \int_0^h (-e^{-A(s+h)}B_2 + \int_h^s e^{-A(s+\tau)}B(\tau)\,d\tau)\varphi(s)\,ds.$$

Ясно, что система (7) является полностью H-управляемой тогда и только тогда, когда система (14) также является полностью H-управляемой. Из результатов работы [2] следует, что система (14) является полностью H-управляемой тогда и только тогда, когда выполняется равенство (9). Теорема доказана.

Теорема 4. Система (7) (имеется в виду, что $B(s) \equiv 0,\ s \in [0, h]$) управляема по выходу (8) тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left(\tilde{H}A^iB_h^*,\ i = \overline{0, k-1}\right) =$$

$$= \operatorname{rank}\left(\bar{H},\ H_{B_1}, H_{B_2}, \tilde{H}A^iB_h^*,\ i = \overline{0, k-1}\right),$$

где

$$H_{B_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & HB_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & HB_i & \ldots & HA^{k-3}B_i \\ HB_i & HAB_i & \ldots & HA^{k-2}B_i \end{bmatrix},\ i = 1, 2;$$

$$B_h^* = B_1 + e^{-Ah}B_2.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Заключение. В статье показано, что траектории дескрипторных систем являются решениями специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых известны критерии управляемости. Получены параметрические критерии H-управляемости, полной H-управляемости и полной управляемости по отношению к выходу системы, записанные в терминах решений определяющих уравнений.

Список литературы

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, № 3. P. 411–425.
2. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. К проблеме полной управляемости динамических систем // Дифференциальные уравнения. 1979. Вып. 15, т. 9. С. 1707–1709.
3. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. Полная управляемость на подпространство линейных систем с запаздыванием по управлению // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2009. № 3. С. 130–132.
4. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 5–7.

References

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol. 31, no. 3, pp. 411–425.
2. Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. On remark on complete controllability dynamic systems. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential equation], 1979, issue 15, vol. 9, pp. 1707–1709 (In Russian).
3. Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Complete controllability on the subspas of linear systems with delay in control. *Vestnik BGU* [Bulletin of BSU], series 1, Physics. Mathematics. Informatics, 2009, no. 3, pp. 130–132 (In Russian).
4. Ignatenko V. V., Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. On controllability of linear systems by descriptor regulators. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 5–7 (In Russian).

Информация об авторах

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры методов оптимального управления. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

Размыслович Георгий Прокофьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: razmysl@bsu.by

Игнатенко Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Information about the authors

Krakhotko Valeriy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Optimal Control Methods. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by

Razmyslovich Georgiy Prokof'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: razmysl@bsu.by

Ignatenko Vasiliy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Поступила после доработки 03.01.2020