

А. К. Вершина, д-р техн. наук, профессор, БГТУ;
С. Д. Латушкина, канд. техн. наук, ГНУ «ФТИ НАН Беларуси»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ «ПОКРЫТИЕ – ОСНОВА» В ПРОЦЕССАХ ПЛАЗМЕННО-ВАКУУМНОГО НАПЫЛЕНИЯ

Mathematic modeling results of term elastic condition of coating basis system (basis is cylinder unlimited in thermal relation) are presented modeling is realized by Myzhelishvili's coupling method and total formulations of level plane sum of term elasticity. These formulations were transformed in special form for fields limited by circumference.

Введение. В качестве конструкционных материалов, предназначенных для работы в условиях больших механических и тепловых нагрузок, в машиностроении часто применяют композиционные материалы, которые, кроме того, должны обладать высокой износ- и коррозионной стойкостью [1]. Перспективным направлением создания композиционных материалов, обеспечивающих достижение необходимого комплекса свойств, является нанесение различных упрочняющих покрытий, в том числе и плазменно-вакуумными методами.

В процессе формирования покрытий указанными методами поверхность конденсации перемещается по нормали к основе. Происходящее при этом изменение температуры приводит к расширению в системе «покрытие – основа». Вследствие наличия в системе разнородных по теплофизическим свойствам материалов и градиента температуры по сечению тепловое расширение происходит в стесненных условиях, что вызывает возникновение внутренних напряжений, трансформирующихся в остаточные. Последние являются одним из основных факторов, влияющих на прочность сцепления покрытия с подложкой, и это определяет актуальность вопроса определения температурных напряжений, вносящих основной вклад в остаточные напряжения покрытий [2].

Ряд исследователей (см., например, [3]) отмечают исключительную сложность задачи математического описания напряжений из-за дискретного характера формирования слоев покрытия, наличия пор, разнородности физико-механических свойств материалов покрытия и основы, наличия переходной зоны и т. д. Это определяет актуальность разработки инженерных методов расчета напряжений, основанных на допущениях и упрощениях реальных условий образования напряжений.

Основная часть. Модель формирования термоупругих напряжений в системе «покрытие – основа».

Предположим, что основа представляет собой бесконечный цилиндр, подвергаемый в процессе плазменно-вакуумного нанесения покрытий разогреву плазменным потоком известной мощности. Полагаем, далее, что взаимо-

действие отдельных компонентов плазмы с модифицируемой поверхностью основы можно заменить модельным непрерывным процессом и проводить расчеты на основе существующих теорий механики сплошной среды. Сформированное покрытие и основа в конце процесса конденсации имеют температуры T_1 и T_2 , которые в общем случае не равны между собой. Определим термоупругие напряжения, возникающие в указанной системе в силу различия теплофизических свойств материалов основы и покрытия и условий охлаждения.

1. Общие формулы термоупругости для изотропных областей, ограниченных окружностью.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом сопряжения, развитым академиком Мухелишвили Н. И. [4], и приведем общие формулы плоской задачи термоупругости для области, ограниченной окружностью [5].

Пусть упругое изотропное тело занимает одну из областей S^+ ($|z| < R$) или S^- ($|z| > R$), ограниченных окружностью L радиуса R , где $z = x + iy = re^{i\theta}$ – комплексная переменная.

Учитывая, что между компонентами напряжений в декартовых $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и полярных $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ координатах существуют зависимости

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y; \quad (1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + i\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \times e^{2i\theta}, \quad (2)$$

на основании формул

$$\sigma_x + \sigma_y = [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \quad (3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[z\Phi'(z) + \psi(z)]; \quad (4)$$

$$2\mu(u + iv) = \chi\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \psi(z) + \beta\psi_0(z) \quad (5)$$

могут быть получены следующие зависимости для компонент напряжений в полярных координатах:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \quad (6)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[z\Phi'(z) + \psi(z)] \frac{z}{z}; \quad (7)$$

$$2\mu(u + iv) = \chi\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \psi + \beta\psi_0, \quad (8)$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона; $\chi = 3-4\nu$ и $\beta = \alpha_0 E$ для плоской деформации, $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ и $\beta = \frac{2\alpha_0 E}{1+\nu}$ в случае плоского напряженного состояния, α_0 – температурный коэффициент линейного расширения; $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные голоморфные функции в области S^+ или S^- , $\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$, $\psi_0(z) = \int \psi_0(z) dz$, $\psi_0(z)$ – комплексный потенциал температуры T :

$$T = 2\operatorname{Re}\psi_0(z). \quad (9)$$

Переходя в равенстве (7) к сопряженным значениям и затем вычитая его из (6), а также дифференцируя обе части равенства (8) по θ , получим:

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi'(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\psi(z)}, \quad (10)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \theta}(u + iv) = iz \left[\begin{array}{l} \chi\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + \bar{z}\overline{\Phi'(z)} + \\ + \frac{\bar{z}}{z} \cdot \overline{\psi(z)} + \beta\psi_0(z) \end{array} \right]. \quad (11)$$

Распространяя определение функции $\Phi(z)$ на область, не занятую телом, по формуле

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z} \overline{\Phi'\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z^2} \overline{\psi\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad (12)$$

и заменяя в ней z на $\frac{R^2}{z}$, а также исключая в выражениях (10) и (11) функцию $\psi(z)$, получим зависимости для написания граничных условий, которым должна удовлетворять функция $\Phi(z)$ на контуре L при заданных смещениях или внешних напряжениях:

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left[\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)} \right], \quad (13)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \theta}(u + iv) = iz \left\{ \begin{array}{l} \chi\Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \times \\ \times \left[\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)} \right] + \beta\psi_0(z) \end{array} \right\}. \quad (14)$$

После того, как будет найдено решение соответствующей краевой задачи, компоненты напряжений в любой точке области, занимаемой телом, найдем, используя соотношения (6) и (13).

2. Постановка и решение задачи термоупругости для системы «покрытие – основа».

Предположим, что сформированное в результате напыления покрытие занимает область S_1^- , а основа – область S_2^+ . Обозначим далее через L общий контур указанных областей, L_1 – внешний контур области, R – радиус основы, R_1 – радиус покрытия (рисунок).

В силу малости толщины сформированного покрытия в сравнении с радиусом цилиндра перепадом температур по толщине покрытия можно пренебречь и положить, что $T_1 = \text{const}$, а распределение температуры по радиусу цилиндра представим следующей зависимостью:

$$T_2(r) = T_0 + (T_1 - T_0) \left(\frac{r}{R_2} \right)^n,$$

где T_0 – температура (постоянная) в центре цилиндра; n – положительное число.

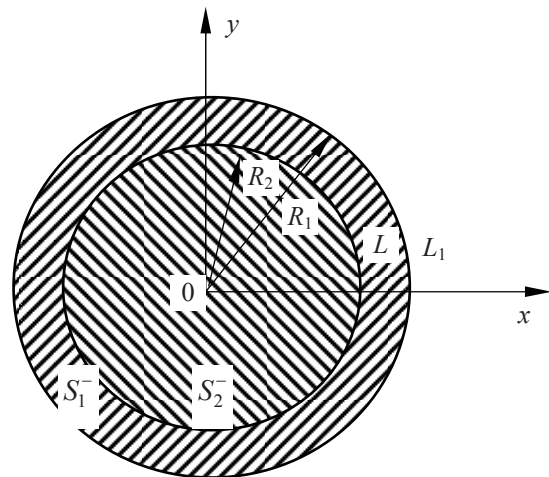


Рисунок. Принятая для расчета система основа (цилиндр) – покрытие (кольцо)

Пусть $\Phi_j(z)$, μ_j , χ_j ($j = 1, 2$) – комплексные потенциалы напряжений и упругие постоянные областей S_1^- и S_2^+ соответственно. Распространим по формуле (12) определение функции $\Phi_1(z)$ на область S_1^+ ($|z| < R$), а $\Phi_2(z)$ на область S_2^- ($|z| > R$). Тогда напряженное состояние покрытия и основы может быть определено с использованием следующих отношений:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \left[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} \right]; \quad (15)$$

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi_j(z) - \frac{R^2}{r^2} \overline{\Phi_j\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \left[\overline{\Phi_j(z)} - \bar{z} \overline{\Phi_j'(z)} \right]. \quad (16)$$

Для компонент перемещений имеет место следующая зависимость:

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \theta}(u + iv) = \left\{ \begin{aligned} & \chi_j \Phi_j(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_j \left(\frac{R^2}{z} \right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \times \\ & \times \left[\overline{\Phi_j(z)} - \overline{z} \Phi_j'(z) \right] + \beta_j \Psi_{0j}(z). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Удовлетворяя на общем контуре L ($|z| = R$) покрытия и основы граничным условиям

$$(\sigma_r + i\tau_{r\theta})^+ = (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^-; \quad (18)$$

$$(u + iv)^+ = (u + iv)^-, \quad (19)$$

на основании формул (16) и (17) получаем граничные условия для функций $\Phi_j(z)$ в виде

$$\Phi_2^+ - \Phi_2^- = \Phi_1^- - \Phi_1^+; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 (\chi_2 \Phi_2^+ + \Phi_2^- + \beta_2 \Psi_{02}) = \\ = \mu_2 (\chi_1 \Phi_1^+ + \Phi_1^- + \beta_1 \Psi_{01}), \end{aligned} \quad (21)$$

где Φ_j^+ и Φ_j^- – предельные значения функции $\Phi_j(z)$ на контуре L со стороны областей S_j^+ и S_j^- соответственно, а, согласно (9),

$$\Psi_{0j} = \frac{1}{2} T_j. \quad (22)$$

Путем несложных преобразований соотношений (20), (21) с учетом (22) получим

$$(\Phi_2 + \Phi_1)^+ - (\Phi_2 + \Phi_1)^- = 0; \quad (23)$$

$$(\Phi_2 - m_1 \Phi_1)^+ + m_2 (\Phi_2 - m_1 \Phi_1)^- = n_0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 = \frac{1 + \chi_1}{m_0(1 + \chi_2)}, \quad m_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \\ m_2 = \frac{m_0 + \chi_1}{1 + m_0 \chi_2}, \quad n_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\beta_1 T_1 - m_0 \beta_2 T_2); \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1 + \chi_1 + m_0(1 + \chi_2)}{m_0(1 + \chi_2)(1 + m_0 \chi_2)}.$$

Граничным условиям (23), (24) удовлетворим, если положим, что

$$\Phi_2 + \Phi_1 = C_0(z \in S^- + S^+); \quad (25)$$

$$\Phi_2 - m_1 \Phi_1 = n_0 + C_1 m_2(z \in S^+); \quad (26)$$

$$\Phi_2 - m_1 \Phi_1 = -C_1(z \in S^-), \quad (27)$$

где C_0, C_1 – функции, зависящие от $r, S = S_1$ или S_2 .

Выражения (25)–(27) представляют собой две системы уравнений относительно функций $\Phi_j(z)$, определенных в соответствующих областях. Решая их, найдем:

$$\Phi_1 = \frac{1}{1 + m_1} (C_0 + C_1)(z \in S_1^-); \quad (28)$$

$$\Phi_1 = \frac{C_0 - C_1 m_2 - n_0}{1 + m_1} (z \in S_1^+); \quad (29)$$

$$\Phi_2 = \frac{C_0 m_1 + C_1 m_2 + n_0}{1 + m_1} (z \in S_2^+); \quad (30)$$

$$\Phi_2 = \frac{C_0 m_1 - C_1}{1 + m_1} (z \in S_2^-). \quad (31)$$

Для выполнения условия ограниченности напряженного состояния в точке $z = 0$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложения функции $\Phi_2(z)$ в окрестности нуля и бесконечно удаленной точки

$$\Phi_2(z) = A_0 + A_1 z + \dots \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

$$\Phi_2(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + \dots \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty$$

удовлетворяли условиям

$$A_0 + \overline{B_0} = 0, \quad B_1 = 0. \quad (32)$$

Требую, чтобы на контуре L_1 выполнялось условие

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_1,$$

и удовлетворяя условию (32), определим функции C_0 и C_1 , входящие в выражения (28)–(31):

$$C_0 = \frac{n_0}{b_0}; \quad C_1 = \frac{a_0 n_0}{b_0}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 = \delta_1(1 + m_1) - 1; \quad b = (1 - \delta_1)(m_2 - 1) - \\ - m_1(2 - \delta_1 + \delta_1 m_2); \quad \delta_1 = \left(\frac{R}{R_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Phi_1 = \frac{n_0(1 + a_0)}{b_0(1 + m_1)} (z \in S_1^-); \quad (34)$$

$$\Phi_1 = \frac{n_0(1 - b_0 - a_0 m_2)}{b_0(1 + m_1)} (z \in S_1^+); \quad (35)$$

$$\Phi_2 = \frac{n_0(m_1 + a_1 m_2 + b_0)}{b_0(1 + m_1)} (z \in S_2^+); \quad (36)$$

$$\Phi_2 = \frac{n_0(m_1 - a_1)}{b_0(1 + m_1)} (z \in S_2^-). \quad (37)$$

Используя формулы (15), (16) и (34)–(37), определим компоненты напряжений в покрытии (область S_1^-):

$$\sigma_r = \frac{n_0}{b_0(1+m_1)} \left\{ \begin{aligned} &2(1+a_0) - \frac{R^2}{r^2} \times \\ &\times [2-b_0+a_0(1-m_2)] \end{aligned} \right\}; \quad (38)$$

$$\sigma_\theta = \frac{n_0}{b_0(1+m_1)} \left\{ \begin{aligned} &2(1+a_0) + \frac{R^2}{r^2} \times \\ &\times [2-b_0+a_0(1-m_2)] \end{aligned} \right\}; \quad (39)$$

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (40)$$

Аналогично определим напряженное состояние основы (область S_2^+):

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{n_0}{b_0(1+m_1)} \times \left\{ \begin{aligned} &2(m_1+a_0m_2+b_0) - \frac{R^2}{r^2} \times \\ &\times [2m_1+a_0(m_2-1)+b_0] \end{aligned} \right\}; \quad (41)$$

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (42)$$

Выводы. Полученные зависимости позволяют рассчитать термоупругие напряжения,

возникающие в цилиндре и покрытии, сформированном плазменно-вакуумным методом, в процессе остывания системы. Кроме того, на основе приведенных формул нетрудно определить критическое значение температуры T_1 , при которой покрытие теряет устойчивость.

Литература

1. Гречихин, Л. И. Упругие напряжения в тонкопленочных покрытиях при ионно-плазменном упрочнении алюминиевых сплавов металлическими и интерметаллическими соединениями на основе титана / Л. И. Гречихин, С. А. Иващенко, Е. В. Макаревич // Физика и химия обработки материалов. – 2002. – № 4. – С. 57–62.

2. Остаточные напряжения в покрытии из нитрида титана, осажденного в вакууме / Н. В. Матвеев [и др.] // Проблемы прочности. – 1985. – № 5. – С. 90–93.

3. Остаточные напряжения: учеб. пособие / Ж. А. Мрочек [и др.]. – Минск: УП «Технопринт», 2003. – 352 с.

4. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Изд-во АН СССР. – 1954.

5. Прусов, И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов. – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 200 с.