

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА РУБОК ГЛАВНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ С УЧЕТОМ СРОКОВ ПРИМЫКАНИЯ ЛЕСОСЕК

The models for incorporating adjacency and green-up constraints into forest management planning models are considered. Two models are analyzed: Unit Restricted Model (URM) and Area Restricted Model (ARM). A binary formulation for final felling scheduling problem with even flow, green-up and adjacency constraints is presented. The formulation was solved for 10 forest enterprises of the Republic of Belarus. The size of problems ranged from 237 to 2367 stands. The problems were solved by means of branch and bound algorithm.

The computational time varied from 10 seconds to about an hour. On average ARM showed better results than URM in terms of number of constraints and computational time. Number of constraints was lower by 18% and the average computational time – by 32%. In terms of objective function's value no substantial difference between two models was detected.

**Введение.** По мере развития вычислительной техники и роста потребностей практики лесного хозяйства круг задач, решаемых методами математического программирования, неуклонно расширяется. В настоящей работе будет рассмотрено одно из относительно новых приложений метода линейного программирования – оптимизация плана рубок леса с учетом сроков примыкания лесосек.

**Модели для учета сроков примыкания лесосек.** В 1999 г. А. Мюррей [1] предложил две модели для учета сроков примыкания лесосек в задаче планирования рубок леса. Первой из них была модель с ограничениями по участкам (URM). Эта модель подробно рассмотрена в зарубежной литературе [2, 3, 4]. Аналогичный подход к формированию ограничений использовался в работе [5]. Модель с ограничениями по площади (ARM) появилась позднее. Первое обращение к ней можно найти в работе [6]. Ее решение с помощью точных методов приведено в работах [7, 8].

Методологический подход для обеспечения сроков примыкания лесосек, применяемый зарубежными исследователями, предполагает ограничение максимально допустимой площади вырубki (МДПВ), а не ограничение площади лесосеки, как это зафиксировано в Правилах рубок леса [9]. Площадь вырубki – это суммарная площадь данной лесосеки и всех участков, смежных по отношению к данному, вырубленных в течение срока примыкания лесосек. Этот подход будет использоваться и в настоящей работе.

**Модель с ограничениями по участкам (МОУ).** МОУ вводит запрет на одновременное проведение рубки любых двух смежных участков вне зависимости от их площади. Это требование выполняется за счет введения в задачу линейного программирования набора ограничений вида

$$x_{it} + x_{jt} \leq 1, \quad j \in J_i, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $x_{it}$  – двоичная переменная, принимающая значения 1 в случае рубки  $i$ -того участка в  $t$ -том

году и 0 в противном случае;  $J_i$  – совокупность всех выделов эксплуатационного фонда смежных по отношению к  $i$ -тому выделу;  $n$  – продолжительность периода планирования, лет.

Рассмотрим гипотетический лесной массив, все участки которого достигли возраста спелости и могут быть назначены в рубку (рис. 1). Для выполнения сроков примыкания лесосек при использовании модели с ограничениями по участкам ограничения вида (1) должны быть введены для следующих пар участков: А + В, В + С, С + D, D + E, D + F, E + F, F + G. При этом, если МДПВ равна 5 га, то одновременная рубка таких пар участков, как А + В, D + E, D + F, E + F не приведет к превышению МДПВ. Однако полностью отказаться от этих ограничений нельзя, поскольку в случае их отсутствия одновременно поступить в рубку смогут участки D, E и F, что приведет к нарушению МДПВ (6,1 га).

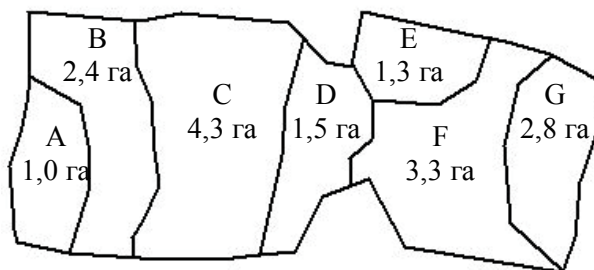


Рис. 1. Гипотетический лесной массив, состоящий из 7 выделов

**Модель с ограничениями по площади (МОП).** Принцип формирования ограничений при использовании этой модели более сложный. Однозначный запрет на рубку смежных участков здесь отсутствует. Вместо этого вводятся ограничения при проведении рубки в группах смежных участков, которые формируются по особому принципу. Каждая из таких групп может содержать неограниченное число смежных участков и должна подчиняться двум требованиям. Во-первых, суммарная площадь выделов,

входящих в группу, должна быть больше МДПВ. Во-вторых, не должно быть групп участков, удовлетворяющих первому условию и в то же время являющихся составной частью данной группы. Например, группа участков А + В + С + D избыточна по отношению к А + В + D.

В зарубежной литературе было предложено, как минимум два алгоритма формирования групп участков, отвечающих приведенным требованиям [7, 8]. В настоящем исследовании использовался алгоритм, схожий с описанным в работе К. Кроува и др. [8].

Для каждой из групп участков в  $p$  рамках МОП вводится следующий набор ограничений:

$$\sum_{i \in I_p} x_{it} \leq q_p - 1, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $I_p$  – совокупность выделов в  $p$ -том ограничении МОП;  $q_p$  – количество участков в  $p$ -том ограничении МОП.

Тем самым запрещается только рубка одновременно всех участков группы, тогда как рубка части участков является допустимой.

Приведем список ограничений, вводимых в задачу для лесного массива, изображенного на рис. 1, при использовании МОП и МДПВ = 5 га. Для обеспечения сроков примыкания лесосек ограничения вида (2) должны быть сформированы для следующих групп: В + С, С + D, D + E + F, F + G. По сравнению с МОУ количество ограничений оказалось меньшим (4 против 7). Кроме того, стала возможной одновременная рубка участков А + В, D + E, D + F и E + F, которая неоправданно запрещалась при использовании МОУ.

Ограничения (1) и (2) применимы лишь в случае срока примыкания, равного одному году. При более длительном сроке примыкания лесосек принцип формирования ограничений более сложный. Графически он представлен на рис. 2 для насаждений А и В при пятилетнем периоде планирования и трехлетнем сроке примыкания.

		годы периода планирования				
		1	2	3	4	5
№ ограничения	А	$x_{a1}$	$x_{a2}$	$x_{a3}$	$x_{a4}$	$x_{a5}$
	В	$x_{b1}$	$x_{b2}$	$x_{b3}$	$x_{b4}$	$x_{b5}$
	1	+	+	+		
	2		+	+	+	
	3			+	+	+

Рис. 2. Формирование ограничений при 3-летнем сроке примыкания лесосек

В случае рубки участка А должен вводиться запрет на рубку участка В, распространяющийся на три года. При этом набор таких запретов должен охватывать весь период планирования, поскольку заранее неизвестно, когда будет назначен в рубку участок А.

**Методы и объекты исследования.** Для анализа моделей составления плана рубок с учетом сроков примыкания лесосек была разработана математическая модель задачи линейного программирования для нескольких хозяйственных секций.

Целевой функцией задачи является максимизация дисконтированной таксовой стоимости древесины от реализации плана рубок главного пользования при минимуме отклонений от установленного размера пользования:

$$z = \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{n+1} c_{it} x_{it} - \sum_{h \in H} (p^p (v_h^{p, \min} + v_h^{p, \max}) + \sum_{t=1}^n p^a (v_{ht}^{a, \min} + v_{ht}^{a, \max})), \quad (3)$$

где  $I$  – совокупность всех участков, включенных в расчет;  $c_{it}$  – дисконтированная таксовая стоимость запаса  $i$ -того выдела в  $t$ -том году, тыс. руб.;  $H$  – совокупность хозяйственных секций, включенных в расчет;  $p^a, p^p$  – величина штрафов за отклонения от установленного размера пользования по годам и за период соответственно;  $v_h^{p, \min}, v_h^{p, \max}$  – отклонения от минимальных и максимальных ограничений по размеру пользования для хозяйственной секции  $h$  за ревизионный период;  $v_{ht}^{a, \min}, v_{ht}^{a, \max}$  – отклонения от годовых минимальных и максимальных ограничений по размеру пользования в  $t$ -том году для хозяйственной секции  $h$ .

Задача имеет следующие ограничения:

$$x_{it} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad t = 1, \dots, n + 1, \quad (4)$$

$$\sum_{t=1}^{n+1} x_{it} \leq 1, \quad i \in I; \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I_h} v_{it} x_{it} + v_{ht}^{a, \min} \geq L_h (1 - d_h^{\text{ann}}), \quad h \in H; \quad t = 1, \dots, n; \quad (6)$$

$$\sum_{i \in I_h} v_{it} x_{it} - v_{ht}^{a, \max} \leq L_h (1 + d_h^{\text{ann}}), \quad h \in H; \quad t = 1, \dots, n; \quad (7)$$

$$\sum_{i \in I_h} \sum_{t=1}^n v_{it} x_{it} + v_h^{p, \min} \geq n L_h (1 - d_h^{\text{per}}), \quad h \in H; \quad (8)$$

$$\sum_{i \in I_h} \sum_{t=1}^n v_{it} x_{it} - v_h^{p, \max} \leq n L_h (1 + d_h^{\text{per}}), \quad h \in H, \quad (9)$$

где  $I_h$  – совокупность участков хозяйственной секции  $h$ , включенных в расчет;  $v_{it}$  – запас в  $i$ -том выделе в  $t$ -том году, м<sup>3</sup>;  $L_h$  – расчетная лесосека по руб-

кам главного пользования для хозсекции  $h$ ,  $m^3$ ;  $d_h^{ann}$ ,  $d_h^{per}$  – максимально допустимые отклонения размера пользования по запасу от расчетной лесосеки по годам и за ревизионный период соответственно.

Выражение (4) требует одновременности рубки отдельных участков. Неравенство (5) запрещает рубку участка более одного раза за ревизионный период. Ограничения (6), (7) устанавливают допустимые годовые отклонения от расчетной лесосеки по запасу. Если отклонения превышают установленный лимит, то при помощи штрафных переменных  $v_{ht}^{a,min}$  и  $v_{ht}^{a,max}$  начисляется штраф, уменьшающий значение целевой функции. Ограничения (8) и (9) аналогичным образом устанавливают допустимые отклонения от установленного размера пользования по запасу за ревизионный период.

Ограничения по сроку примыкания лесосек представлены в двух вариантах: с использованием МОУ (10) и МОП (11):

$$\sum_{t=y}^{y+e_h-1} (x_{it} + x_{jt}) \leq 1, \quad (10)$$

$i \in I, j \in J, y = 1, \dots, n - e_h + 1;$

$$\sum_{i \in I_p} \sum_{t=y}^{y+e_h-1} x_{it} \leq q_p - 1, \quad (11)$$

$p \in P, y = 1, \dots, n - e_h + 1,$

где  $y$  – номер ограничения по сроку примыкания для данной пары или группы участков;  $e_h$  – срок примыкания лесосек для хозсекции  $h$ ;  $P$  – совокупность всех ограничений МОП.

Оптимальные планы рубок были составлены для 10 лесхозов Беларуси. Исходными данными были сформированы на основании проектов геоинформационной системы (ГИС) «Лесные ресурсы». Расчет выполнялся для 6 хозяйственных секций лесов второй группы: сосновой по суходолу, ело-

вой, дубовой, березовой, черноольховой и осиновой. В расчет включались все выделы спелого и перестойного леса, где возможно проведение главного пользования. Длительность периода планирования составляла 10 лет. Краткая характеристика объектов расчета приведена в табл. 1.

Применялся упрощенный алгоритм выбора расчетной лесосеки. В случае обеспеченности спелым лесом принималась лесосека равномерного пользования. При дефиците спелых лесов рассчитывалась лесосека, устанавливающая десятилетний срок использования эксплуатационного фонда. При наборе участков в рубку устанавливались 15-процентные допустимые ежегодные отклонения от расчетной лесосеки по запасу для сосновой, еловой и дубовой хозсекций, а также от суммарной лесосеки по мягколиственному хозяйству. Допустимые отклонения от расчетной лесосеки за пятилетие и за ревизионный период устанавливались на уровне 5%. Использованный размер отклонений соответствует практике составления планов рубок белорусским лесоустройством [10].

Штрафы за отклонения от установленного размера пользования принимались заведомо большими: 20 тыс. руб./ $m^3$  для годовых ограничений и 50 тыс. руб./ $m^3$  для пятилетних и десятилетних ограничений. Они были введены в задачу для ослабления ограничений по размеру пользования и гарантированного получения допустимых решений.

Сроки примыкания и МДПВ устанавливались согласно Правилам рубок леса для лесов второй группы. Срок примыкания лесосек для сосны, ели и дуба равнялся 3 годам, для мягколиственных пород – 1 году. МДПВ принималась равной 5 га для хвойных пород и дуба и 10 га для мягколиственных. В случае смежности двух участков, для которых должны применяться разные нормативы, использовались более строгие требования.

Таблица 1

Характеристика объектов расчета

Лесхоз	Площадь, га	Запас, тыс. $m^3$	Количество выделов по преобладающим породам						Расчетная лесосека, тыс. $m^3$
			С	Е	Д	Б	ОЛЧ	ОС	
Глубокский	1340,6	294,6	98	47	0	199	59	45	27,2
Кобринский	727,2	175,7	69	0	3	13	124	28	16,5
Костюковичский	6191,2	1634,6	450	247	22	349	234	391	136,2
Мозырский	2933,7	710,5	520	0	163	50	107	79	60,0
Осиповичский	6697,1	1844,9	693	186	64	662	461	301	155,5
Оршанский	3376,5	890,2	102	69	1	395	181	397	67,1
Россонский	5947,1	1334,1	876	178	1	493	173	48	130,9
Сморгонский	1318,5	348,4	69	135	14	23	1	100	34,8
Столбцовский	2093,8	582,3	147	67	0	100	162	20	45,1
Щучинский	1065,4	264,1	186	49	10	63	146	24	26,4

Основой для формирования пространственных ограничений выступала таблица смежности участков. В ней для каждого из выделов, включенных в расчет, приводятся номера смежных по отношению к нему выделов. Таблицы смежности по каждому из лесхозов формировались в ArcView GIS. Формирование задач линейного программирования выполнялось с помощью программы на языке VBA, написанной автором в среде MS Excel. Для решения задач использовалась программная библиотека LpSolve 5.5. Все расчеты были выполнены на компьютере с процессором Athlon тактовой частотой 1,66 GHz и 512 Mb оперативной памяти.

Решение задач целочисленного линейного программирования идет в следующей последовательности [11]. Первоначально в задаче снимаются все ограничения по целочисленности переменных и решается задача линейного программирования с ослабленными ограничениями. В случае рассматриваемой задачи набор ограничений (4), заменяется ограничениями:

$$x_{it} \leq 1, \quad i \in I, t=1, \dots, n+1. \quad (12)$$

После нахождения оптимального решения выполняется округление целочисленных переменных при помощи алгоритма ветвей и границ. В настоящем исследовании алгоритм ветвей и границ выполнялся только до нахождения первого допустимого решения.

Расчет оптимальных планов рубок выполнялся в четырех вариантах: а) для задачи с непрерывными переменными без ограничений по срокам примыкания лесосек (ограничения 5–9, 12); б) для задачи с двоичными переменными без учета ограничений по сроку примыкания (4–9); в) для задачи с двоич-

ными переменными и МОУ (4–10); г) для задачи с двоичными переменными и МОП (4–9, 11).

**Результаты.** Количество ограничений МОП оказалось в среднем на 18,4 % меньше по сравнению с формулировкой МОУ. Лишь в случае Оршанского лесхоза МОУ оказалась в незначительном преимуществе (около 0,7%). Общее количество ограничений колебалось от 200 для Кобринского лесхоза до 18 тыс. для Осиповичского лесхоза в случае МОУ и от 150 до 13 тыс. для этих же лесхозов в случае МОП.

На рис. 3 приведено время решения разных формулировок задачи для 5 лесхозов. Время решения для формулировок со сроками примыкания колебалось от 9,7 с (МОП для Кобринского лесхоза) до 61,9 мин (МОУ для Осиповичского лесхоза). В среднем время решения по сравнению с базовой формулировкой (а) оказалось на 92% больше для двоичных переменных (б), в 3–4 раза большим для формулировок (в, г). МОП (г) в среднем показала на 32% лучшее время решения по сравнению с МОУ (в), что согласуется с меньшим количеством ограничений по срокам примыкания лесосек, используемых МОП.

По мере увеличения количества выделов, включенных в расчет, наблюдается нелинейный рост времени вычислений. В случае Кобринского и Осиповичского лесхозов увеличение количества выделов в 10 раз привело к увеличению времени решения МОП в 172 раза. Коэффициенты оптимальности для трех вариантов расчета с двоичными переменными приводятся в табл. 2. Методика расчета этих показателей рассматривается в сопутствующей статье, посвященной анализу целевых функций.

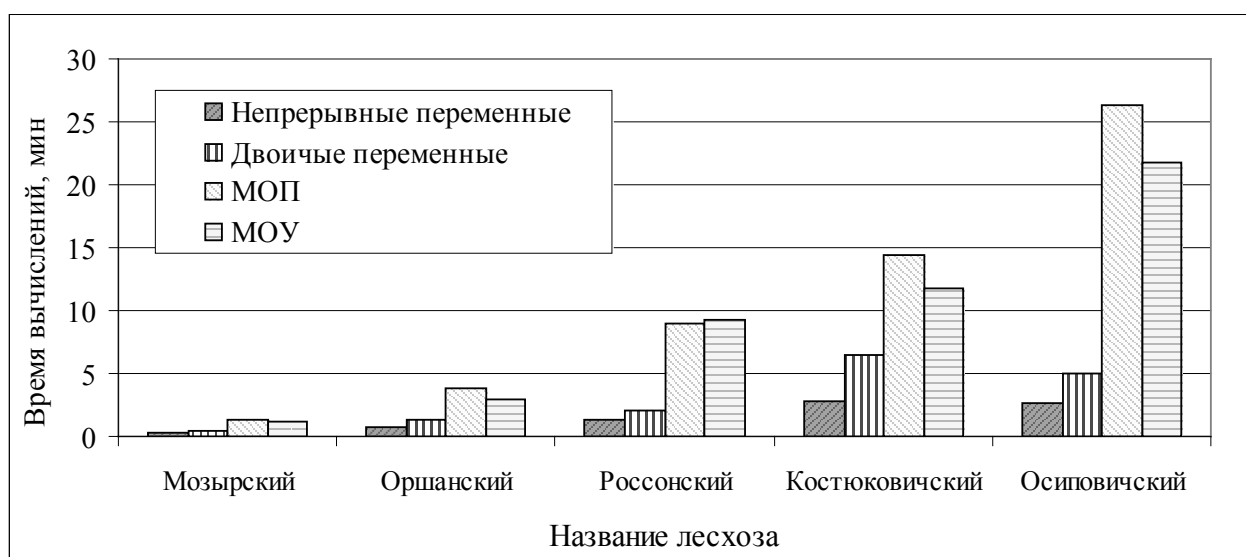


Рис. 3. Время решения задач для 5 лесхозов

**Коэффициенты оптимальности (КО) и суммарные годовые отклонения (СГО)  
от установленного размера пользования, %**

Показатель	ПО, %	КО, %			СГО от ограничений, %		
		базовый	МОУ	МОП	базовый	МОУ	МОП
Среднее	2,8	99,3	96,1	96,7	2,1	5,7	4,5
Ошибка среднего	±0,3	±0,3	±0,8	±0,7	±0,7	±2,1	±1,8

Для расчета потенциала оптимизации использовались значения целевой функции для задач на максимизацию и минимизацию с ослабленными ограничениями (а).

Для формулировки задачи с двоичными переменными коэффициенты оптимальности высоки – в среднем 99,3%. При использовании дополнительных ограничений по срокам примыкания лесосек коэффициенты оптимальности снижаются и составляют 96,1% и 96,7% для МОУ и МОП соответственно. Несколько лучшее среднее значение для МОП статистически недостоверно.

Суммарные отклонения от установленного размера пользования приведены в табл. 2. Средняя величина отклонений существенно ниже для двоичной формулировки без дополнительных ограничений (около 2%) и достигает величины 4–5% при использовании ограничений по срокам примыкания лесосек. Величина отклонений МОП несколько ниже по сравнению с МОУ, однако различие статистически недостоверно. Отметим случаи очень больших отклонений от установленного размера пользования для Столбцовского и Глубокского лесхозов (10–20%). Причинами их стали крупные выделы (более 20–30 га) в составе эксплуатационного фонда при небольших размерах хозяйств.

**Заключение.** Обозначим достигнутые результаты и вопросы, требующие дальнейшего исследования.

1. В результате исследования были составлены планы рубок главного пользования с учетом сроков примыкания лесосек. Время решения задач в большинстве случаев находилось в пределах 30 мин.

2. МОП оказалась более эффективной по сравнению с МОУ с точки зрения времени вычислений и структуры налагаемых ограничений. Достоверных различий в значениях целевой функции между двумя моделями зафиксировано не было.

3. Для получения плана рубок, отвечающих требованиям Правил рубок леса при использо-

вании рассмотренных моделей ЛП, необходимо предварительно выполнить разделение на лесосеки таксационных выделов, площадь которых превышает МДПВ.

### Литература

1. Murray, A. T. Spatial restrictions in harvest scheduling / A. T. Murray // For. Sci. – 1999. – Vol. 45(1). – P. 45–52.
2. Yoshimoto, A. Comparative analysis of algorithms to generate adjacency constraints / A. Yoshimoto, J. D. Brodie // Can. J. For. Res. – 1994. – Vol. 24. – P. 1277–1288.
3. Murray, A. T. Measuring the efficacy of adjacency constraints structure in forest planning models / A. T. Murray, R. L. Church // Can. J. For. Res. – 1995. – Vol. 25. – P. 1416–1424.
4. McDill, M. E. Comparing adjacency constraint formulations for randomly generated forest planning problems with four age-class distributions / M. E. McDill, J. Braze // For. Sci. – 2000. – Vol. 46(3). – P. 423–436.
5. Гордеев, С. М. К вопросу очередности освоения лесосек / С. М. Гордеев, Г. А. Иванов // Лесной журнал. – 1992. – № 3. – С. 40–44.
6. Lockwood, C. Harvest scheduling with spatial constraints: a simulated annealing approach / C. Lockwood, T. Moore // Can. J. For. Res. – 1992. – Vol. 23. – P. 468–478.
7. McDill, M. E. Harvest scheduling with area-based adjacency constraints / M. E. McDill, S. A. Rebaun, J. Braze // For. Sci. – 2002. – Vol. 48(4). – P. 631–642.
8. Crowe, K. Solving the area-restricted harvest scheduling model using the branch and bound algorithm / K. Crowe, J. Nelson, M. Boyland // Can. J. For. Res. – 2003. – Vol. 33. – P. 1804–1814.
9. Правила рубок леса в Республике Беларусь. – Минск, 2004.
10. Ермакоў, В. Я. Лесаўпарадкаванне / В. Я. Ермакоў, А. А. Атрошчанка, М. П. Дзямід. – Мінск: БДТУ, 2002. – 498 с.
11. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха; пер. с англ. – 7-е изд. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.