элементов». Чтобы исследовать возникновение и путь трещины, для кортикальной и губчатой кости вводятся критические значения деформаций 0,0165 и 0,0387 соответственно [2]. Когда максимальный главный предел прочности на растяжение или сжатие превышает значение текучести, упругие свойства ткани снижаются до 1 МПа. Элементы со значением модуля Юнга равного единице, удаляются из модели, тем самым моделируется путь распространения трещины в области пострезекционного дефекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sternheim A., Yosibash. Z.* Pathological fracture risk assessment in patients with femoral metastases using CT-based finite element methods. A retrospective clinical study // Bone. – 2018. – Vol. 110. – P. 215-220.
2. *Marco M., Miguelez M.* Modelling of femur fracture using finite element procedures // Miguel Marco, Eugenio Giner, Ricardo Larraínzar-Garijo, José Ramón Caeiro, María Henar Miguélez // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 196. – P. 157-167.

УДК 519.2

А. М. Волк, доц., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

СВОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ОБОБЩЕННОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Обобщенное гамма-распределение, рассмотренное в работе Стейси в 1962 году [1] отличается своей универсальностью и широкой областью применения. Данное распределение включает в себя гамма-распределение, его частные случаи, распределения Рэлея, Максвелла, Вейбулла, Леви, Хи-квадрат и др. [2].

Это семейство также широко используется в прикладных задачах, связанных с вычислением надежностных характеристик, прогнозированием продолжительности лечения и затратами на медицинское обслуживание, расчетами инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений), обработкой изображений и дистанционным зондированием, а также используются в качестве описания дисперсного состава частиц дробления, моделей распределения доходов [2].

Рассмотрим функцию плотности распределение непрерывной неотрицательной случайной величины ξ в виде [3]

$$f\left(x;\beta,b,c\right)=\frac{|c|}{\beta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{b-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{c}\right),\quad x\geq 0 \tag{1}$$

при $b/c > 0$.

Параметр β является параметром масштаба, а b и c есть параметры формы. Выполним переход к безразмерной случайной величине $\eta = \xi / \beta$:

$$f\left(t;\beta,b,c\right)=\frac{|c|}{\beta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}t^{b-1}\exp\left(-t^{c}\right). \tag{2}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины η

$$F\left(t;\beta,b,c\right)=\frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_{0}^{t}\tau^{b-1}\exp\left(-\tau^{c}\right)d\tau \tag{3}$$

сводится к неполной гамма-функции для $c > 0$ [3].

$$F\left(t;\beta,b,c\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_{0}^{t^c}z^{\frac{b}{c}-1}\exp\left(-z\right)dz=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\gamma\left(\frac{b}{c},t^{c}\right).$$

Для распределения (1)-(3) определены начальные моменты порядка ν, удовлетворяющего условию $b+\nu > 0$, причем

$$\alpha_{\nu}\left(\eta\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)},\quad \alpha_{\nu}\left(\xi\right)=\beta^{\nu}\alpha_{\nu}\left(\eta\right)=\frac{\beta^{\nu}\Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}.$$

Выполним статистическую оценку параметров распределения (1) методом наибольшего правдоподобия [3,4].

Пусть имеется некоторая выборка $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ генеральной совокупности обобщенного Γ-распределения.

Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{|c|}{\beta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{b-1}\exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{c}\right\}. \tag{4}$$

Прологарифмируем данную функцию

$$L_n=LnL=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\frac{|c|}{\theta}-\ln\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)+\left(b-1\right)\ln\frac{x_i}{\theta}-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\right]=$$

$$= n\left[\ln\frac{|c|}{\beta} - \ln\Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\beta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^c\right]. \quad (5)$$

Находим частные производные функции (5):

$$\frac{\partial L_n}{\partial\beta} = -\frac{nb}{\beta} + \frac{c}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^c;$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial b} = -\frac{n}{c}\psi\left(\frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\beta};$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial c} = \frac{n}{c} + \frac{nb}{c^2}\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^c\ln\frac{x_i}{\beta}.$$

Приравнивая частные производные к нулю получим систему уравнений для определения статистических оценок распределения (1):

$$-\frac{nb}{\beta} + \frac{c}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^c = 0; \quad (6)$$

$$\frac{n}{c}\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\beta} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{n}{c} + \frac{nb}{c^2}\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^c\ln\frac{x_i}{\beta} = 0. \quad (8)$$

Условия существования и свойства статистических оценок определяются выполнением условий регулярности [5], основным из которых является знакоположительность матрицы информации Фишера для параметров b и c:

$$I_n(b,c) = -M\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} & \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial b\partial c} \\ \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial c\partial b} & \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} \end{bmatrix}.$$

Вычислим производные второго порядка функции (5), найдем их математические ожидания, обозначим $b/c = k$ и получим:

$$I_n(k,c) = \frac{n}{c^2}\begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $D=1+2k\psi(k)+ k^2\psi'(k) +k[\psi'(k+1)+ \psi^2(k+1)]$.

Решение уравнений (6)-(8) дает статистическую оценку параметров распределения (1), для которых будут выполнятся условия регулярности, полученная матрица информации Фишера (9) является знакоположительной. Данные оценки будут состоятельными, асимптотически-несмещенными, эффективными, асимптотически-нормальными и ассимптотически-эффективными оценками [5]. При условии эффективности оценок система (6)-(8) имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stacy E.W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics, 1962, vol. 33, pp. 1187-1192.

2. Королев В.Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров / В. Ю. Королев, В.А. Крылов, В.Ю. Кузьмин В.Ю. // Информатика и её применения. 2011. т. 5 вып. 1. С. 31-38.

3. Волк, А.М. Статистическая оценка параметров обобщенного гамма-распределения. Труды БГТУ. – 2016. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 10–13.

4. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М. : Мир, 1975. 648 с.

5. Харин Ю.С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю.С. Харин, Н.М. Зуев, Е.Е. Жук. Минск : БГУ, 2011. 464 с.

УДК 517.977

А. А. Якименко, доц., канд. физ.-мат. наук

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В СЛАБОЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье производится обобщение результатов, полученных в [1], на одну трехмерную систему нейтрального типа в слабоциклическом случае.

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t > 0, \qquad (1)$$

где $A_i,\ i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, 1]$ («$'$»означает транспонирование).