УДК 517.977

И. М. Борковская, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Свойство устойчивости является одним из важнейших свойств реальной системы управления. Возможность обеспечить устойчивость с помощью некоторого управляющего воздействия лежит в основе задачи стабилизации. В докладе обсуждаются некоторые результаты исследования стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем с помощью линейных регуляторов, построенных по типу обратной связи.

Рассмотрим гибридную дифференциально-разностную систему в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), t \geq 0 \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [0, h), \tag{3}$$

где $x_1(t) \in R^{n_1}, x_2(t) \in R^{n_2}, u(t) \in R^r, h > 0, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – действительные постоянные матрицы соответствующих размеров; $u = u(\cdot)$ – внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие – управление; $\psi(\cdot)$ – начальная кусочно-непрерывная n_2 - вектор-функция.

Под решением системы (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную n_1-вектор-функцию $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывную n_2-вектор-функцию $x_2(\cdot)$, которые для всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (1). Это решение начальной задачи (1) – (3) для каждого начального значения $x_{10} \in R^{n_1}$ и кусочно-непрерывной n_2-вектор-функции $\psi(\cdot)$ существует и единственно. Наряду с системой (1), (2) рассмотрим линейную обратную связь следующих типов:

– в виде простейшего регулятора:

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t), \tag{4}$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы. Такой регулятор не выводит замкнутую систему за пределы рассматриваемого класса;

– в виде регулятора с интегральными составляющими типа свертки:

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t) + \int_0^t Q_1(s)x_1(t-s)ds + \int_0^t Q_2(s)x_2(t+h-s)ds, \tag{5}$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы, $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ – матрицы-функции соответствующих размеров, причем элементы функциональных матриц $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными функциями с конечным носителем $H > 0$, $Q_1(\cdot) \equiv 0, Q_2(\cdot) \equiv 0$ для $t > H$.

Невозмущенную систему (с выключенным управлением) назовем спектрально устойчивой, если все ее спектральные решения являются асимптотически устойчивыми. Понятие спектральной устойчивости является некоторым ослаблением понятия асимптотической устойчивости, однако во многих случаях решение представляется в виде линейных комбинаций спектральных решений, в таких случаях эти понятия равнозначны.

Исследуем задачу стабилизации системы (1), (2) при воздействии регуляторов (4), (5), то есть задачу нахождения матриц Q_1, Q_2, $Q_1(\cdot)$, $Q_2(\cdot)$, при которых замкнутая система является устойчивой в том или ином смысле – асимптотически устойчивой, если не оговорено иное.

Теорема 1. Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda h} I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \quad \forall \lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda > 0. \qquad (6)$$

Теорема 2. Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то выполняется условие

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_2, \forall \lambda \in C, |\lambda| < 1. \qquad (7)$$

Показано, что верна следующая теорема:

Теорема 3. Необходимые условия (6), (7) стабилизируемости системы (1), (2) (в скалярном случае) в шкале регуляторов (5) являются и достаточными.

Приводится пример построения регулятора с интегральными элементами, стабилизирующего дифференциально-разностную систему.