УДК 517.966

В. В. Горячкин, доц., канд. физ.-мат. наук;
В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
В.В. Игнатенко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Управление в условиях интервальной неопределенности [1, 5] занимает важное место в общей проблеме управления. В докладе рассматривается управляемость интервальной системы (ансамбля систем) с запаздыванием по управлению, для которой получены достаточные условия управляемости.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2u(t-h), \tag{1}$$

$$x(0) = x_{*,} \in X^*, x(t^*) = x^* \in X^*, \quad u(\cdot) = \{u(t) \equiv 0, t \in [-h, 0]\}.$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $X^*, X_* \subset R^n; A \in R^{n\times n}$, $B_1, B_2 \in R^{n\times r}$

– неопределенные матрицы со значениями в замкнутых интервалах

$$\underline{A} \le A \le \overline{A}, \underline{B}_1 \le B_1 \le \overline{B}_1, \underline{B}_2 \le B_2 \le \overline{B}_2, \tag{2}$$

t^* – фиксированный момент времени, $h > 0$ – число (запаздывание). Матричные и векторные неравенства следует понимать поэлементно. Множества

$$X_* = \left\{x \in R^n : \underline{x}_* \le x_* \le \overline{x}_*\right\}, \quad X^* = \left\{x \in R^n : \underline{x}^* \le x^* \le \overline{x}^*\right\}$$

– это заданные параллепипедные множества (брусы в R^n) [3].

Матрицы A, B_1, B_2, удовлетворяющие (2), будем называть допустимыми.

Ансамблем систем будем называть совокупность систем вида (1), коэффициенты которых – допустимые матрицы, принимающие значения в интервалах (2) независимо друг от друга.

Введем кусочно-постоянные управления

$$u(t) = u^k, \tau_{k-1} \le t < \tau_k, k = 1, 2, ..., s, \tag{3}$$

с фиксированными моментами разрыва первого рода $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_s = t^*$, векторы $u^1, u^2, ..., u^s$ принадлежат множеству $U \subset R^r$, которое определяется конечной системой линейных неравенств.

Обозначим через $X(t) \in R^n$ – множество фазовых состояний $x(t)$ ансамбля (1) для некоторого кусочно-постоянного управления (3) $u(t)$ в момент времени t, $0 \le t \le t^*$, с начальным состоянием $x_* = x(0) \in X_*$ при любых допустимых матрицах A, B_1, B_2.

Ставится следующая задача: для любого начального состояния из множества X_* определить кусочно-постоянное управление (3) (одно и тоже для всех систем ансамбля), при котором выполняется включение $X(t^*) \subset X^*$. Если поставленная задача разрешима в этом смысле, то будем говорить об управляемости ансамбля систем.

Множество векторов $x(t^*)$ ансамбля систем (1) в момент времени $t = t^*$, отвечающее всем допустимым A, B_1, B_2 и начальному состоянию x_*, образует множество $X(t^*)$.

Можно показать, что внешняя интервальная оценка [3] множества $X(t^*)$ примет вид

$$\underline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k - \Delta C_k\left|u^k\right|\right) \le x \le \overline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k + \Delta C_k\left|u^k\right|\right), \qquad (4)$$

где $\left|u^k\right|$ понимается как вектор модулей координат вектора u^{k}, а векторы d и матрицы C_k вычисляются по параметрам системы (1).

Пусть $\varepsilon \ge 0, \varepsilon \in R^n$ – любой вектор. Обозначим

$X_\varepsilon^* = \left\{x \in R^n : x^* - \varepsilon \le x \le x^* + \varepsilon\right\}$

замкнутую ε - окрестность бруса X^*. Из полученной оценки (4), следует, что $X(t^*) \subset X_\varepsilon^*$ имеет место тогда, когда

$$\underline{d} + \sum_{i=1}^{n}(C_{0k}u^k - \Delta C_k\left|u^k\right|) \ge \underline{x}^* - \varepsilon, \quad \overline{d} + \sum_{i=1}^{n}(C_{0k}u^k + \Delta C_k\left|u^k\right|) \le \overline{x}^* + \varepsilon. \qquad (5)$$

Составим по условиям (5) задачу нелинейного программирования

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \to \min, \\
\underline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k - \Delta C_k\left|u^k\right|\right) \ge \underline{x}^* - \varepsilon, \\
\overline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k + \Delta C_k\left|u^k\right|\right) \le \overline{x}^* + \varepsilon, \\
\varepsilon \ge 0, u^k \in U, k = \overline{1,s}.
\end{gathered} \qquad (6)$$

Таким образом, в задаче (6) ищется управление (3) , для которого внешняя оценка множества $X(t^*)$ находится в минимальной $\varepsilon-$

окрестности бруса X^* (под минимальной ε – окрестностью бруса понимается окрестность бруса с минимальной нормой вектора $\varepsilon : \|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$).

Задачу (6) можно переписать в виде следующей эквивалентной задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&e' \cdot \varepsilon \to \min,\\
&-\sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k - \Delta C_k w^k\right) - \varepsilon \le \underline{d} - \underline{x}^*, \quad \overline{d} + \sum_{k=1}^{s}\left(C_{0k}u^k + \Delta C_k w^k\right) - \varepsilon \le \overline{d} + \overline{x}^*, \qquad (7)\\
&\varepsilon \ge 0, \quad -w^k \le u^k \le w^k, \quad u^k \in U, w^k \ge 0, \quad k = \overline{1,s}, \quad e' = (1,1,...,1).
\end{aligned}$$

где неизвестными будут ε и $u^k, w^k, k = \overline{1,s}.$

Ясно, что в задаче (7) множество планов не пусто и целевая функция ограничена на нем снизу, значит решение задачи (7) существует. Следовательно, откорректированная постановка задачи управляемости ансамбля (1) звучит так: для любого начального состояния из множества X_* определить кусочно – постоянное управление (одно и тоже для всех систем ансамбля) и минимальный $\varepsilon -$брус множества X^*, что выполняется включение $X\left(t^*\right) \subset X_\varepsilon^*$.

Теорема. Для управляемости ансамбля систем (1) в классе кусочно - постоянных функций достаточно, чтобы разрешимая задача линейного программирования (7) имела оптимальный план $\left(\varepsilon^0, u^{k0}, w^{k0}, k = \overline{1,s}\right)$. В этом случае соответствующее управление переводит пучок траекторий системы из X_* в минимальную ε^0- окрестность бруса X^*. Если в решении $\varepsilon^0 = 0$, то задача решается точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. С.392.

2. 3.Жалён Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М.- Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2007. С.468.

3. Ащепков Л.Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальной линейной системы // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 51–56.

4. Гайшун И.В., Горячкин В.В. Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2016. №2. С. 6-9.

5. Гайшун И.В., Горячкин В.В., Крахотко В.В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук.2014. № 3. С. 5–9.