Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

В 3-х частях

**Часть 1. Механика. Молекулярная физика
и термодинамика**

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением по химико-технологическому
образованию в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования
по химико-технологическим специальностям*

Минск 2021

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.3я73
Ф50

Авторы:
*Д. В. Кленицкий, А. В. Буцень, В. Р. Мадьяров,
Н. Н. Крук, Е. В. Фарафонтова, И. В. Вершиловская*

Под общей редакцией *Д. В. Кленицкого*

Рецензенты:
кафедра «Техническая физика» Белорусского национального
технического университета (кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой *И. А. Хорунжий*);
доктор физико-математических наук, доцент, профессор
кафедры математики и физики учреждения образования
«Белорусская государственная академия связи» *Л. Л. Гладков*

Физика. Сборник задач : учеб.-метод. пособие для студентов
Ф50 химико-технологических специальностей : в 3 ч. / Д. В. Кленицкий [и др.] ; под общ. ред. Д. В. Кленицкого. – Минск : БГТУ, 2021. – Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика и термодинамика. – 196 с.
ISBN 978-985-530-923-0.

Сборник задач содержит более 700 задач по механике, молекулярной физике и термодинамике. В издание включены краткие теоретические сведения, а также примеры решения задач. В конце сборника приведены ответы к задачам и справочная информация.

Пособие предназначено для студентов химико-технологических специальностей учреждений высшего образования, может использоваться также студентами инженерно-технических специальностей.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-530-923-0 (Ч. 1)
ISBN 978-985-530-922-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении дисциплины «Физика» студентами химико-технологических, технических и инженерных специальностей учреждений высшего образования большое значение имеет развитие навыков применения теоретических знаний на практике. При этом умение решать задачи является ключевым.

Данное издание подготовлено согласно учебным планам нового поколения и отвечает требованиям учебных программ по дисциплине «Физика» для студентов I ступени обучения соответствующих специальностей. Учебно-методическое пособие предназначено для использования на практических занятиях, выполнения контрольных работ и индивидуальных заданий, а также для самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Физика». Пособие составляет единое целое вместе с учебником, электронными конспектами лекций по дисциплине «Физика» и лабораторным практикумом.

При составлении данного сборника задач использован многолетний опыт проведения практических занятий по дисциплине «Физика» со студентами I ступени обучения всех специальностей профессорско-преподавательским составом кафедры физики БГТУ. Для удобства в каждом параграфе приведены основные соотношения и формулы, необходимые для решения задач, рассмотрены примеры решения типовых задач по соответствующему разделу курса. В конце сборника даны ответы к задачам. Пособие также включает приложения, содержащие сводку основных физических констант и справочные таблицы.

Параграфы подготовлены: доцентом Д. В. Кленицким (§ 1–6, приложение), ассистентом А. В. Буценем (§ 7, приложение), доцентом В. Р. Мадьяровым (§ 8–10), заведующим кафедрой Н. Н. Круком (предисловие, методические указания, § 11), доцентом Е. В. Фарафонтовой (§ 12, 13), старшим преподавателем И. В. Вершиловской (§ 14–17).

Доцент Д. В. Кленицкий осуществлял общее руководство авторским коллективом, вносил предложения и давал рекомендации по улучшению авторского оригинала.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

При решении задач рекомендуется придерживаться следующей последовательности действий:

1) приступая к решению задачи, студент должен предварительно ознакомиться с теоретическим материалом по теме, установить, какие физические явления и законы положены в основу данной задачи; необходимо выписать значения заданных в условии физических величин, а также дополнительные данные, выявленные при анализе условия задачи;

2) если того требует характер задачи, сделать схематический рисунок или чертеж и изобразить на нем известные (в первую очередь векторные) величины; при необходимости выбрать систему координат, причем оси следует выбрать так, чтобы проекции векторов на них выражались наиболее простым образом;

3) составить уравнения (систему уравнений), выражающие взаимосвязь между физическими величинами, относящимися к рассматриваемой задаче;

4) решить систему уравнений; решение получают, как правило, в общем виде, обозначив все физические величины соответствующими буквами и производя с ними нужные выкладки и преобразования;

5) проверить полученную формулу на соответствие размерностей: если размерности величин, стоящих в формуле слева и справа от знака равенства, не сходятся, то решение является неверным;

6) перейти к подстановке числовых данных, выраженных в системе единиц СИ (точность расчета должна соответствовать точности величин, приведенных в условии); значения обязательно подставляются в основных единицах системы СИ;

7) оценить полученный ответ на правдоподобность (например, скорость тела не может оказаться больше скорости света в вакууме и т. п.); проанализировать полученный результат, так как часто в задаче требуется сделать качественный вывод на основе полученного числового значения либо функциональной зависимости.

МЕХАНИКА

§ 1. Кинематика материальной точки

Основные формулы и законы

Векторный способ описания движения

1. Кинематический закон движения:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки.

2. Перемещение:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{1.2}$$

где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ – радиус-векторы соответственно начального и конечного положения материальной точки.

3. Вектор средней скорости:

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.3}$$

где Δt – промежуток времени, за который перемещение $\Delta\vec{r}$ произошло.

4. Среднее ускорение:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}, \tag{1.4}$$

где $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$ – изменение скорости за время Δt.

5. Скорость (мгновенная скорость):

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.5}$$

6. Ускорение (мгновенное ускорение):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{1.6}$$

7. Путь, пройденный точкой:

$$s = \int_0^t \upsilon dt, \tag{1.7}$$

где υ – модуль скорости материальной точки

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}. \tag{1.8}$$

8. Средняя (путевая) скорость:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{s}{\Delta t}, \tag{1.9}$$

где Δt – промежуток времени, за который путь s был пройден.

9. Закон сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_{\text{отн}} + \vec{\upsilon}_2, \tag{1.10}$$

где $\vec{\upsilon}_1$ – скорость тела относительно неподвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}_{\text{отн}}$ – скорость тела относительно подвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}_2$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Координатный способ описания движения

10. Кинематический закон движения:

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t), \tag{1.11}$$

где x, y, z – координаты (декартовые) точки.

11. Радиус-вектор и его модуль:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \;\; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{1.12}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат.

12. Скорость и ее модуль:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}, \;\; \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, \tag{1.13}$$

где компоненты вектора скорости

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \;\; \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \;\; \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.14}$$

13. Ускорение и его модуль:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \;\; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{1.15}$$

где компоненты вектора ускорения

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \;\; a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}, \;\; a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}. \tag{1.16}$$

Естественный (траекторный) способ описания движения

14. Кинематический закон движения:

$$l = l(t), \tag{1.17}$$

где l – дуговая координата точки.

15. Скорость и ее модуль:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\tau \vec{\tau}, \ \ \upsilon = |\upsilon_\tau|, \tag{1.18}$$

где υ_τ – проекция вектора $\vec{\upsilon}$ на направление единичного касательного к траектории вектора $\vec{\tau}$, направленного в сторону увеличения дуговой координаты

$$\upsilon_\tau = \frac{dl}{dt}. \tag{1.19}$$

16. Ускорение и его модуль:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \ \ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \tag{1.20}$$

где $\vec{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение; $\vec{a}_n$ – нормальное (центростремительное) ускорение

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau}, \ \ \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}, \tag{1.21}$$

где ρ – радиус кривизны траектории; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к траектории, перпендикулярный касательной к траектории.

Частные случаи движений материальной точки

17. Равномерное движение:

$$a_\tau = 0, \ \ \upsilon_\tau = \text{const}, \ \ l = l_0 + \upsilon_\tau t, \tag{1.22}$$

где l_0 – начальная дуговая координата точки.

18. Равнопеременное движение:

$$a_\tau = \text{const}, \ \ \upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + a_\tau t, \ \ l = l_0 + \upsilon_{0\tau} t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \tag{1.23}$$

где $\upsilon_{0\tau}$ – проекция начальной скорости на вектор $\vec{\tau}$.

19. Переменное движение:

$$a_\tau \neq \text{const}, \ \ \upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + \int_0^t a_\tau dt, \ \ l = l_0 + \int_0^t \upsilon_\tau dt. \tag{1.24}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + (\beta t^2 + \gamma)\vec{j}$, где α = 2,5 м/с, β = 1 м/с^2 и γ = 1 м. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график; 2) перемещение и вектор средней скорости за время Δt = 2 с от начала движения при t = 0; 3) скорость и ускорение точки, а также угол между ними в момент времени t = 2 с; 4) путь, пройденный точкой за время Δt = 2 с от начала движения при t = 0, а также среднюю (путевую) скорость за это время.

Решение. 1. Сравнив радиус-вектор материальной точки, приведенный в условии, с разложением радиус-вектора в декартовой системе координат (см. формулу (1.12)), найдем зависимость координат материальной точки от времени

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t^2 + \gamma, \quad z = 0. \tag{1.25}$$

Подставив значения α, β, γ из условия задачи, получим

$$x = 2{,}5t, \quad y = t^2 + 1, \quad z = 0, \tag{1.26}$$

где все величины выражены в системе СИ, т. е. координаты – в метрах, а время – в секундах.

Из (1.26) следует, что материальная точка движется в плоскости xy, а первые два уравнения представляют собой уравнение линии, заданной в параметрической форме, вдоль которой и происходит движение, т. е. уравнение траектории. Для получения уравнения линии в обычном виде как зависимости, связывающей координаты x и y, исключим из первых двух уравнений параметр t (время). Для этого выразим время из первого уравнения и подставим его во второе уравнение, в результате получим уравнение траектории

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{2{,}5} \\ y = t^2 + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{25}x^2 + 1. \tag{1.27}$$

Уравнение (1.27) является уравнением параболы, ветви которой направлены вверх, а траектория представляет собой правую ветвь этой параболы (рис. 1.1), соответствующей $x > 0$. В начальный момент времени при t = 0 точка имеет координаты x = 0 и y = 1 м. При t = 2 с ее координаты x = 5 м и y = 5 м.

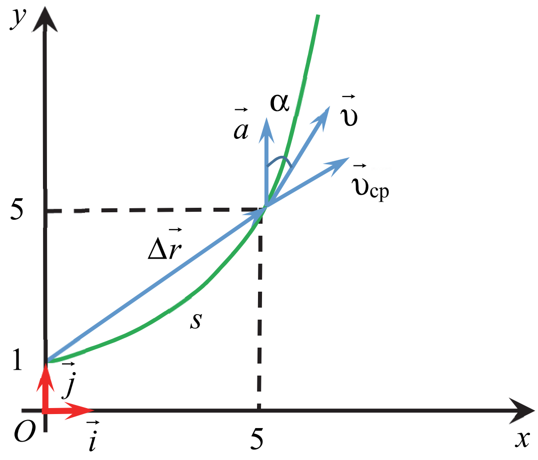


Рис. 1.1

2. Перемещение точки $\Delta\vec{r}$ определим по формуле (1.2), принимая во внимание, что радиус-векторы в начальный момент времени при $t = 0$ и через промежуток времени $\Delta t = 2$ с в момент времени $t = 2$ с имеют вид

$$\vec{r}_1 = \gamma\vec{j},\ \ \vec{r}_2 = 2\alpha\vec{i} + (4\beta + \gamma)\vec{j}. \qquad (1.28)$$

Тогда

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\alpha\vec{i} + 4\beta\vec{j}. \qquad (1.29)$$

Модуль перемещения

$$\Delta r = \sqrt{4\alpha^2 + 16\beta^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4 \text{ м}. \qquad (1.30)$$

Используя (1.29), найдем вектор средней скорости $\vec{\upsilon}_{ср}$ (см. формулу (1.3)) и его модуль $\upsilon_{ср}$ за промежуток времени $\Delta t = 2$ с

$$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \alpha\vec{i} + 2\beta\vec{j}, \qquad (1.31)$$

$$\upsilon_{ср} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2} = \sqrt{10{,}25} \approx 3{,}2 \text{ м/с}. \qquad (1.32)$$

3. Вычислим скорость точки (см. формулу (1.5)), продифференцировав радиус-вектор по времени

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j}. \qquad (1.33)$$

Отсюда зависимость модуля скорости от времени

$$\upsilon = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}. \qquad (1.34)$$

Значение скорости в момент времени $t = 2$ с

$$\upsilon = \sqrt{\alpha^2 + 16\beta^2} = \sqrt{22{,}25} \approx 4{,}7 \text{ м/с}. \qquad (1.35)$$

Определим ускорение точки (см. формулу (1.6)), продифференцировав скорость (см. формулу (1.33)) по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 2\beta\vec{j}. \qquad (1.36)$$

Модуль ускорения

$$a = 2\beta = 2 \text{ м/с}^2. \qquad (1.37)$$

Скорость точки направлена по касательной к траектории, а ускорение, как это следует из (1.36), направлено вдоль оси y (см. рис. 1.1) и не зависит от времени.

Угол φ между скоростью и ускорением найдем, используя определение скалярного произведения между векторами и его представление в декартовой системе координат

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}\vec{a}}{\upsilon a} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z}{\upsilon a}. \qquad (1.38)$$

Приняв во внимания соотношения (1.33)–(1.37), получим

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}\vec{a}}{\upsilon a} = \frac{\alpha \cdot 0 + 2\beta t \cdot 2\beta + 0 \cdot 0}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} \cdot 2\beta} = \frac{2\beta t}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}}. \qquad (1.39)$$

При $t = 2$ с

$$\cos\varphi = \frac{4\beta}{\sqrt{\alpha^2 + 16\beta^2}} = \frac{4}{\sqrt{22{,}25}} \approx 0{,}848. \qquad (1.40)$$

Отсюда

$$\varphi = \arccos(0{,}848) \approx 32°. \qquad (1.41)$$

4. Путь, пройденный материальной точкой, определим по (1.7) с учетом зависимости модуля скорости от времени (см. формулу (1.34))

$$s = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^2 \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}\, dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2} t\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} + \frac{\alpha^2}{4\beta} \ln(2\beta^2 t + \beta\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=\sqrt{\alpha^2+16\beta^2}+\frac{\alpha^2}{4\beta}\ln\left(\frac{4\beta+\sqrt{\alpha^2+16\beta^2}}{\alpha}\right)=$$

$$=\sqrt{22,25}+\frac{25}{16}\ln\left(\frac{4+\sqrt{22,25}}{2,5}\right)\approx 6,7 \text{ м.} \qquad (1.42)$$

Среднюю (путевую) скорость найдем, используя определение (1.9)

$$\upsilon_{\text{ср}}=\frac{s}{\Delta t}=\frac{6,7}{2}\approx 3,3 \text{ м/с.} \qquad (1.43)$$

Пример 2. Поезд метрополитена между станциями движется прямолинейно с ускорением, проекция которого на направление движения зависит от расстояния s, пройденного от станции, по закону $a_x = a_0 - bs$, где $a_0 = 0{,}4$ м/с^2, $b = 4 \cdot 10^{-4}$ с$^{-2}$. Определите: 1) зависимость от времени расстояния s, скорости и ускорения поезда; 2) время движения поезда между станциями; 3) максимальную скорость поезда; 4) расстояние между станциями.

Решение. 1. Воспользуемся соотношениями для модуля скорости (1.8) и компоненты ускорения (1.16) с учетом, что $\upsilon_x = \upsilon$

$$\begin{cases}\upsilon=\dfrac{ds}{dt}\\ a_x=\dfrac{d\upsilon}{dt}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dt=\dfrac{ds}{\upsilon}\\ d\upsilon=a_x dt\end{cases} \Rightarrow d\upsilon=a_x\frac{ds}{\upsilon}. \qquad (1.44)$$

По отношению к данным из условия формула (1.44) примет вид

$$\upsilon d\upsilon=(a_0-bs)ds. \qquad (1.45)$$

Проинтегрируем (1.45) с учетом, что на станции отправления скорость $\upsilon_0=0$ и расстояние $s = 0$

$$\int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=\int_0^{s}(a_0-bs)ds \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2}=a_0 s-\frac{bs^2}{2}. \qquad (1.46)$$

Отсюда получим зависимость скорости поезда от пройденного пути

$$\upsilon=\sqrt{(2a_0-bs)s}. \qquad (1.47)$$

Из (1.8) с учетом (1.47) следует, что

$$\upsilon=\frac{ds}{dt}=\sqrt{(2a_0-bs)s} \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{(2a_0-bs)s}}=dt. \qquad (1.48)$$

Проинтегрировав (1.48), найдем

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(2a_0 - bs)s}} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bs}{2a_0 - bs}} = t. \qquad (1.49)$$

Из (1.49) следует зависимость расстояния s от времени

$$\frac{bs}{2a_0 - bs} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\sqrt{b}t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2a_0}{b} \frac{\operatorname{tg}^2(\sqrt{b}t/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\sqrt{b}t/2)}. \qquad (1.50)$$

Приняв во внимание в (1.50) определение тангенса и выражение для синуса половинного аргумента, получим

$$s = \frac{a_0}{b}(1 - \cos(\sqrt{b}t)). \qquad (1.51)$$

Продифференцировав (1.51) по времени, найдем зависимость скорости поезда от времени

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{a_0}{\sqrt{b}} \sin(\sqrt{b}t). \qquad (1.52)$$

Продифференцировав (1.52) по времени (или подставив (1.51) в ускорение из условия), получим зависимость проекции ускорения на направления движения от времени

$$a_x = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_x = a_0 \cos(\sqrt{b}t). \qquad (1.53)$$

2. Время движения поезда между станциями определим из равенства скорости поезда (см. формулу (1.52)) нулю на станциях. Это имеет место при $t = 0$ на станции отправления и на станции прибытия в момент времени, который определяется соотношением

$$\sqrt{b}t = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{\sqrt{b}} = \frac{3{,}14}{\sqrt{4 \cdot 10^{-4}}} = 157 \text{ с}. \qquad (1.54)$$

3. Скорость поезда максимальна в момент времени, когда синус в (1.52) равен единице

$$\upsilon_{\max} = \frac{a_0}{\sqrt{b}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{4 \cdot 10^{-4}}} = 20 \text{ м/с}. \qquad (1.55)$$

4. Расстояние между станциями найдем, подставив время прибытия (см. формулу (1.54)) в расстояние s (см. формулу (1.51))

$$s_0 = \frac{2a_0}{b} = \frac{2 \cdot 0{,}4}{4 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^3 \text{ м} = 2 \text{ км}. \qquad (1.56)$$

Пример 3. Тело бросили с высоты h = 8 м со скоростью υ_0 = = 10 м/с горизонтально. Определите: 1) во сколько раз радиус кривизны ρ траектории при падении тела на Землю отличается от радиуса кривизны начала траектории; 2) с какой скоростью надо бросить тело, чтобы центр кривизны начала траектории находился на земной поверхности. Сопротивлением воздуха пренебречь.

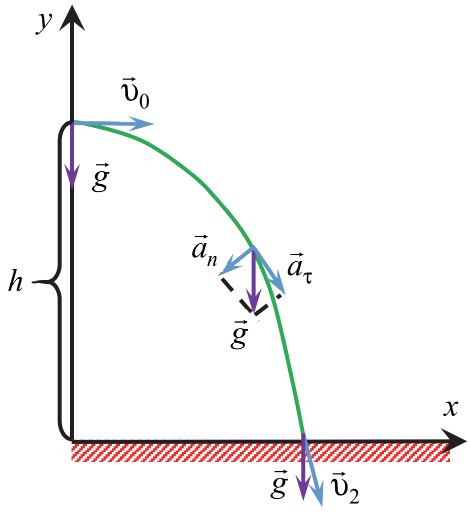


Рис. 1.2

Решение. Тело вблизи поверхности Земли, если пренебречь сопротивлением воздуха, двигается с ускорением свободного падения g = 9,8 м/с^2, направленным перпендикулярно поверхности Земли.

Определим траекторию движения тела относительно Земли. Начало отсчета выберем на поверхности Земли под точкой бросания, ось x направим вдоль поверхности Земли, а ось y – перпендикулярно ей (рис. 1.2).

Компоненты вектора скорости вдоль соответствующих осей и модуль скорости определяются соотношениями

$$\upsilon_x = \upsilon_0, \;\; \upsilon_y = -gt, \tag{1.57}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}. \tag{1.58}$$

Вдоль оси x движение является равномерным, а вдоль оси y – равноускоренным. Зависимости координат тела от времени имеют вид

$$x = \upsilon_0 t, \;\; y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.59}$$

Выразив из первого уравнения (1.59) время и подставив его во второе уравнение, получим уравнение траектории тела

$$y = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2. \tag{1.60}$$

Уравнение (1.60) является уравнением параболы, ветви которой направлены вниз. Тело движется по ветви этой параболы, соответствующей $x > 0$ (рис. 1.2).

1. Используя (1.20), полное ускорение тела $\vec{g}$ разложим на тангенциальное $\vec{a}_\tau$ и нормальное $\vec{a}_n$ ускорения

$$\vec{g} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.61)$$

Модуль полного ускорения

$$g = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.62)$$

Тангенциальное ускорение определим по формуле (1.21) с учетом $\upsilon_\tau = \upsilon$ и соотношений (1.57), (1.58)

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{g^2 t}{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad a_\tau = -g\frac{\upsilon_y}{\upsilon}. \qquad (1.63)$$

Нормальное ускорение найдем из (1.62) с учетом (1.58) и (1.63)

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = g\sqrt{1 - \frac{\upsilon_y^2}{\upsilon^2}} \quad \Rightarrow \quad a_n = g\frac{\upsilon_x}{\upsilon}. \qquad (1.64)$$

Используя определение нормального ускорения (1.21) и формулу (1.64), найдем радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\upsilon^3}{g\upsilon_x}. \qquad (1.65)$$

Из (1.65) следует, что отношение радиусов кривизны траектории при падении на Землю ρ_2 и начала траектории ρ_1 определяется соотношением

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^3, \qquad (1.66)$$

где υ_1, υ_2 – скорости тела соответственно в начале траектории и при его падении на Землю.

Скорость тела в начале траектории

$$\upsilon_1 = \upsilon_0. \qquad (1.67)$$

Скорость тела при падении на Землю найдем, подставив в (1.58) время движения тела, которое определим из (1.59) при условии $y = 0$

$$y = h - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (1.68)$$

Тогда

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2hg}. \qquad (1.69)$$

Следовательно,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\sqrt{1 + \frac{2hg}{\upsilon_0^2}}\right)^3 = \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 9{,}8}{10^2}}\right)^3 \approx 4{,}1. \qquad (1.70)$$

2. Чтобы центр кривизны начала траектории находился на земной поверхности, радиус кривизны начала траектории должен быть равен высоте h

$$\rho_1 = h. \qquad (1.71)$$

Из формулы (1.65) с учетом (1.67), (1.71) найдем

$$\rho_1 = \frac{\upsilon_1^3}{g\upsilon_0} = \frac{\upsilon_0^2}{g} \;\Rightarrow\; \upsilon_0 = \sqrt{g\rho_1} = \sqrt{gh} = \sqrt{9{,}8 \cdot 8} \approx 8{,}9 \text{ м/с}. \qquad (1.72)$$

Задачи

1.1. Расстояние от одной пристани до другой вниз по реке теплоход проходит за время Δt_1 = 8 ч. Возвращается он против течения за время Δt_2 = 10 ч. Скорость теплохода в стоячей воде υ = = 18 км/ч. Определите расстояние между пристанями и скорость течения реки.

1.2. На рис. 1.3 показана зависимость координаты легкового автомобиля *1* и мотоцикла *2* от времени, двигающихся вдоль оси x. Найдите скорость мотоцикла относительно автомобиля, а также промежуток времени, через который они встретятся. Чему равна координата места встречи?

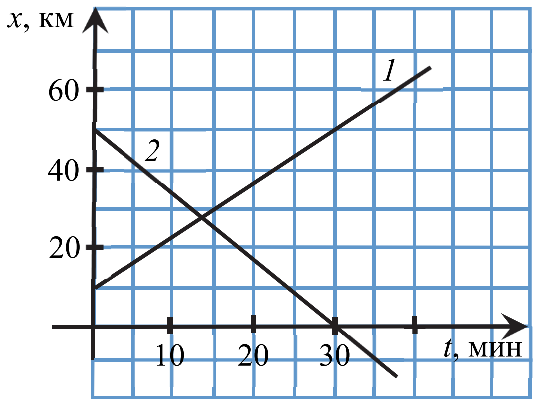


Рис. 1.3

1.3. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью $\upsilon_л$ = 3 км/ч, перпендикулярной течению. Скорость течения в реке всюду одинакова и составляет $\upsilon_т$ = 1,5 км/ч, ширина реки d = 100 м. Определите скорость лодки относительно берега, время переправы, а также расстояние, на которое снесет лодку вниз по течению реки.

1.4. Моторная лодка, двигаясь вниз по реке, обогнала плот. Через время Δt = 45 мин она повернула обратно и встретила плот на расстоянии s = 4 км ниже места первой встречи. Вычислите скорость течения реки, если при движении в обоих направлениях мотор лодки работал одинаково.

1.5. Требуется переправиться на катере из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Катер пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью $\upsilon_к$ = 6 км/ч. Скорость течения в реке всюду одинакова и равна $\upsilon_т$ = = 3 км/ч. Определите, под каким углом к отрезку AB должен двигаться катер, и его скорость относительно берега. Чему равно время переправы, если ширина реки d = 600 м?

1.6. Скорость течения реки шириной d = 160 м равна нулю у берегов и линейно возрастает по мере приближения к середине реки, где она достигает значения υ_0 = 5 км/ч (рис. 1.4). Катер переправляется из точки O на другой берег со скоростью $\upsilon_к$ = 4 км/ч относительно воды перпендикулярно скорости течения. Определите: 1) траекторию катера; 2) снос его вниз по течению реки от пункта отправления до места причала на другом берегу.

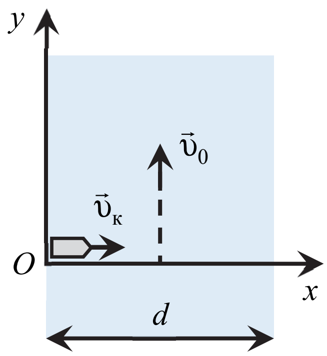


Рис. 1.4

1.7. Велосипедист проехал первую треть пути по шоссейной дороге со скоростью υ_1 = = 10 м/с, затем половину всего пути преодолел по проселочной дороге со скоростью υ_2 = 6 м/с, а оставшуюся часть пути – по лесной тропинке со скоростью υ_3 = 2 м/с. Вычислите среднюю скорость велосипедиста.

1.8. Одну треть всего времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью υ_1 = 40 км/ч, а оставшуюся часть времени – со скоростью υ_2 = 70 км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля?

1.9. На первом участке пути в течение промежутка $\Delta t_1 = 3\Delta t / 4$ (где Δt – полное время движения) средняя скорость тела в 2 раза больше его средней скорости в оставшийся промежуток времени. Определите среднюю скорость тела на первом участке пути, если средняя скорость на всем пути $\upsilon_{ср}$ = 14 км/ч.

1.10. Половину пути тело прошло со скоростью υ_1 = 2 м/с. На оставшейся части пути оно половину времени двигалось со скоростью

$\upsilon_2 = 5$ м/с, а последний участок – со скоростью $\upsilon_3 = 7$ м/с. Вычислите среднюю скорость тела за все время движения.

1.11. Два автомобиля движутся со скоростями $\upsilon_1 = 80$ км/ч и $\upsilon_2 = 60$ км/ч по двум взаимно перпендикулярным прямым дорогам к точке их пересечения. В момент времени $t = 0$ автомобили находились на расстояниях $s_1 = 100$ км и $s_2 = 50$ км от места пересечения дорог. Через сколько времени после этого расстояние между автомобилями станет наименьшим? Чему оно равно?

1.12. Из пункта A (рис. 1.5), находящегося на гравийной дороге, необходимо за кратчайшее время попасть на тракторе в пункт B, расположенный в поле на расстоянии $s = 20$ км от дороги. Скорость трактора по дороге в $n = 2{,}23$ раза больше его скорости по полю. На каком расстоянии x от точки D следует свернуть с дороги?

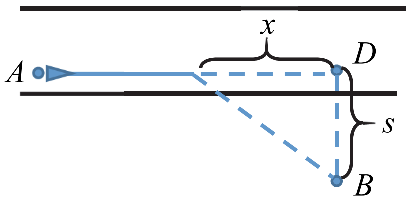


Рис. 1.5

1.13. Из города со скоростью $\upsilon_1 = 18$ м/с выезжает автомашина. Через время $\Delta t_1 = 20$ мин вслед за ней выезжает вторая автомашина. Найдите скорость υ_2 второй автомашины, если она догнала первую через время $\Delta t_2 = 1$ ч после начала своего движения.

1.14. График движения материальной точки в осях (t, x), где t – время в секундах, а x – координата в метрах, имеет вид двух отрезков прямых, соединяющих точки (1, 1), (2, 3) и (2, 3), (4, 4). Определите, во сколько раз отличаются скорости точки на первом и втором участках.

1.15. График зависимости x-координаты материальной точки от времени изображается прямой, проходящей через точки (0, 6) и (3, 0), где первое число – время t в секундах, а второе число – координата x в метрах. Чему равна проекция скорости точки на ось x?

1.16. Между двумя светофорами машина двигалась прямолинейно. На первом участке из состояния покоя она двигалась равноускоренно и набрала скорость $\upsilon = 20$ м/с, пройдя путь $s_1 = 0{,}1s$, где s – расстояние между светофорами. Затем машина двигалась равномерно и на последнем участке тормозила до остановки равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Вычислите среднюю скорость движения машины между светофорами.

1.17. Велосипедист на протяжении промежутка времени $\Delta t_1 = 1{,}3$ ч двигался строго на север со средней скоростью $\upsilon_1 = 25$ км/ч, а затем строго на восток со средней скоростью υ_2 = 20 км/ч в течение промежутка времени Δt_2 = 1,4 ч. На сколько путь велосипедиста за все время движения отличается от модуля его перемещения?

1.18. Материальная точка делает 1,5 оборота по окружности. Чему равно отношение пути, пройденного точкой, к модулю ее перемещения?

1.19. Вначале поезд двигался из состояния покоя прямолинейно с ускорением a = 0,22 м/с^2, затем равномерно, а в конце – замедляясь до остановки с тем же по модулю ускорением. Все время движения поезда Δt = 21 мин, а средняя скорость за это время $\upsilon_{ср}$ = 90 км/ч. Найдите время и скорость равномерного движения поезда.

1.20. Два неподвижных тела, расстояние между которыми s = = 280 м, одновременно начинают двигаться навстречу друг другу. Первое тело движется с постоянным ускорением a = 4 м/с^2, второе тело – равномерно со скоростью υ = 8 м/с. Через какое время тела встретятся?

1.21. Материальная точка движется вдоль оси x так, что проекция скорости υ_x как функция времени описывается графиком, представленным на рис. 1.6. Определите путь и перемещение материальной точки за время движения, а также среднюю путевую скорость и модуль вектора средней скорости за это время.

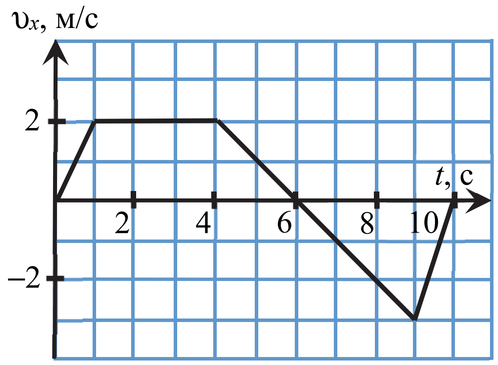


Рис. 1.6

1.22. Движение лифта в высотном здании при разгоне и торможении является равнопеременным с ускорением, равным по модулю a = 1 м/с^2. Скорость его равномерного движения υ = 2 м/с. Через какое время лифт поднимется на высоту h = 60 м?

1.23. Скорость материальной точки, двигающейся равноускоренно, при прохождении пути s изменилась от υ_0 = 2 м/с до υ_1 = 14 м/с. Найдите скорость точки в тот момент времени, когда она пройдет половину пути.

1.24. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор меняется со временем по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, где α = 6 м/с и β = = –4 м/с^2. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график;

2) перемещение и вектор средней скорости за время $\Delta t = 2$ с от момента начала движения при $t = 0$.

1.25. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, где $\alpha = 2$ м/с и $\beta = -0{,}5$ м/с^2. Найдите скорость и ускорение точки, а также угол между ними в момент времени $t = 2$ с.

1.26. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + (\beta + \gamma t)\vec{j}$, где $\alpha = 2$ м/с, $\beta = 1$ м и $\gamma = 4$ м/с. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график; 2) скорость и ускорение точки.

1.27. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = \alpha_1\cos(\omega t)\vec{i} + \alpha_2\sin(\omega t)\vec{j}$, где $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha = 0{,}5$ м, $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график, укажите направления движения по траектории; 2) путь, который пройдет точка за время $\Delta t = 4$ с от момента начала движения при $t = 0$.

1.28. Скорость материальной точки, движущейся вдоль оси x, изменяется со временем по закону $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0(1 - \alpha t)$, где $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость, модуль которой $\upsilon_0 = 0{,}2$ м/с, $\alpha = 0{,}1$ с$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ материальная точка находилась в начале координат. В какие моменты времени материальная точка будет находиться на расстоянии $s = 1$ м от начала координат?

1.29. Материальная точка движется в плоскости xy со скоростью $\vec{\upsilon} = \alpha\cos(\omega t)\vec{i} + \beta\sin(\omega t)\vec{j}$, где $\alpha = 6$ м/с, $\beta = 9$ м/с, $\omega = 3$ с$^{-1}$. При $t = 0$ координаты точки $x_0 = 0$ и $y_0 = -3$ м. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график, укажите направление движения по траектории; 2) перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = 3\pi / 2$ с от начала движения при $t = 0$.

1.30. Ускорение материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{a} = \alpha t\vec{i} + \beta\vec{j}$, где $\alpha = -2$ м/с^3, $\beta = 4$ м/с^2, а ее начальная скорость при $t = 0$ равна $\vec{\upsilon}_0 = \alpha_0\vec{i} + \beta_0\vec{j}$, где $\alpha_0 = 16$ м/с, $\beta_0 = -6$ м/с. В какой момент времени скорость точки перпендикулярна оси x? Чему равен модуль скорости в этот момент?

1.31. Разложение скорости материальной точки, движущейся в плоскости xy, в декартовой системе координат имеет вид $\vec{\upsilon} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где $\alpha = 2$ м/с, $\beta = 0{,}5$ с$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ координаты точки $x = y = 0$. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график; 2) скорость и ускорение точки в момент времени $t = 3$ с.

1.32. Материальная точка движется вдоль прямой согласно уравнению $x = \alpha t + \beta t^2$, где $\alpha = 3$ м/с, $\beta = -0{,}25$ м/с^2. Найдите путь и среднюю скорость движения точки в интервале времени от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 8$ с. Чему равно перемещение материальной точки?

1.33. Материальная точка движется вдоль оси x так, что ее координата изменяется со временем по закону $x = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, где $\alpha = 2$ м, $\beta = -4$ м/с, $\gamma = 2$ м/с^2. Какова средняя скорость точки за промежуток времени $\Delta t = 4$ с от начала движения при $t = 0$?

1.34. Материальная точка движется вдоль прямой по закону $x = \alpha t(1 + \beta t)$, где $\alpha = 3$ м/с, $\beta = -0{,}4$ с$^{-1}$. Определите промежуток времени от начала движения при $t = 0$, по истечении которого точка вернется в исходное положение, а также путь, который она пройдет при этом. Чему равна скорость и ускорение в этом положении?

1.35. Уравнения движения материальной точки, движущейся в плоскости xy, имеют вид $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 + \beta t)$, где $\alpha = 5$ м/с, $\beta = -0{,}25$ с$^{-1}$. В какой момент времени угол между скоростью и ускорением станет равен $\varphi = 45°$? Чему равны скорость и ускорение в этот момент времени?

1.36. Материальная точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha\sin(\beta t)$, $y = \alpha(1 - \cos(\beta t))$, где $\alpha = 3$ м, $\beta = 2$ с$^{-1}$. Определите: 1) траекторию точки; 2) скорость и ускорение точки, а также угол между ними. Постройте графически траекторию, укажите направления скорости и ускорения.

1.37. Материальная точка движется в плоскости xy так, что уравнения движения имеют вид $x = \alpha_1 t + \beta_1$, $y = \alpha_2 t + \beta_2$, где $\alpha_1 = 3$ м/с, $\beta_1 = 3$ м, $\alpha_2 = 4$ м/с, $\beta_2 = -3$ м. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график; 2) скорость и ускорение точки.

1.38. Уравнения движения двух материальных точек, движущихся вдоль оси Ox, имеют вид $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1 t^2$ и $x_2 = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t^3$, где $\alpha_1 = -15$ м/с, $\beta_1 = 5$ м/с^2, $\alpha_2 = -4$ м/с^2, $\beta_2 = 1$ м/с^3. В какие моменты времени скорости точек будут одинаковы?

1.39. Тело бросили со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите: 1) траекторию точки, постройте ее график; 2) время движения; 3) высоту подъема и дальность полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.40. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (вверх). Определите: 1) перемещение камня за время движения; 2) скорость и угол падения камня на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.41. Из одной точки бросили одновременно два тела с одинаковой начальной скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Одно тело бросили вертикально вверх, а другое – под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Найдите расстояние между телами в момент времени $t = 2$ с после бросания. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.42. С зависшего над землей в безветренную погоду воздушного шара сбросили одновременно из одной точки два тела. Начальные скорости тел $\upsilon_{01} = 5$ м/с и $\upsilon_{02} = 20$ м/с направлены горизонтально в противоположные стороны. В какой момент времени угол между направлениями их скоростей станет равным 90°? Чему равно расстояние между телами в этот момент времени? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.43. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Определите, на какую максимальную высоту поднимется тело, а также время подъема. Чему равна скорость тела на высоте, равной половине максимальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.44. Дальность полета s тела, брошенного под углом α к горизонту, в 4 раза больше максимальной высоты подъема h: $s = 4h$. Найдите угол α броска к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.45. С воздушного шара, спускающегося вертикально вниз со скоростью $\upsilon = 2$ м/с, вертикально вверх бросили камень со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с относительно шара. Какое расстояние будет между шаром и камнем, когда камень достигнет максимальной высоты подъема? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.46. Тело дважды бросают с одинаковой по модулю начальной скоростью под углом к горизонту. Первый раз – на максимально возможное расстояние $s_{max} = 90$ м, при втором броске скорость тела в верхней точке траектории $\upsilon_2 = 15$ м/с. Определите углы, под которыми камень брошен в первый и во второй раз. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.47. Материальная точка движется по прямой, замедляясь с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости по закону $a = \alpha\sqrt{\upsilon}$, где $\alpha = 0{,}5$ м^{0,5}/с^{1,5}. В начальный момент времени при $t = 0$ скорость точки $\upsilon_0 = 4$ м/с. Определите промежуток времени, за который точка остановится, а также путь, пройденный за это время.

1.48. Модуль ускорения материальной точки, движущейся замедленно вдоль прямой, зависит от скорости по закону $a = \alpha\upsilon$, где $\alpha = 0{,}2$ с$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ скорость точки $\upsilon_0 = 2$ м/с. Определите промежуток времени, за который скорость точки уменьшится в 2 раза, а также путь, пройденный за это время.

1.49. Скорость частицы, движущейся в положительном направлении оси x, изменяется со временем по закону $\upsilon = \alpha\sqrt{x}$, где $\alpha = 4$ м^{0,5}/с. При $t = 0$ координата частицы $x = 0$. Определите зависимость скорости и ускорения частицы от времени. Найдите их значения в момент времени $t = 3$ с.

1.50. Модуль ускорения материальной точки, движущейся замедленно вдоль прямой, зависит от скорости по закону $a = \alpha\upsilon^2$, где $\alpha = 0{,}1$ м$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ скорость точки $\upsilon_0 = 20$ м/с. Определите скорость и ускорение точки в момент времени $t = 5$ с, а также путь, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t = 5$ с от начала движения при $t = 0$.

1.51. Ветер, проходя через лес, теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути ds изменение скорости $d\upsilon$ прямо пропорционально величине скорости υ и пройденному пути ds: $d\upsilon = -\alpha\upsilon ds$, где знак минус указывает, что скорость ветра уменьшается, и α – коэффициент пропорциональности. Чему равна скорость ветра, прошедшего в лесу путь $s = 150$ м, если скорость ветра до входа в лес $\upsilon_0 = 12$ м/с и после прохождения пути $s_1 = 1$ м скорость стала $\upsilon_1 = 11{,}8$ м/с?

1.52. Модуль скорости материальной точки зависит от времени по закону $\upsilon = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$, где $\alpha = 2$ м/с^2, $\beta = 0{,}5$ м/с^3, $\gamma = 1$ м/с^4. Определите путь и среднюю скорость точки за промежуток времени $\Delta t = 2$ с от начала движения.

1.53. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, изменяется со временем по закону $a = \alpha + \beta t$, где $\alpha = 1$ м/с^2 и $\beta = 2$ м/с^3. Найдите скорость точки спустя промежуток времени $\Delta t = 2$ с после начала движения из состояния покоя при $t = 0$. Какой путь она пройдет за это время?

1.54. Проекция ускорения материальной точки на ось x зависит от времени по закону $a_x = \alpha\cos(\beta t)$, где $\alpha = 8$ м/с^2, $\beta = \pi$ с$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ ее координата $x_0 = 0$ и скорость $\upsilon_0 = 0$. Определите координату точки в момент времени $t = 2{,}25$ с.

1.55. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 1$ м. Ее дуговая координата изменяется со временем по закону $l = \alpha + \beta t^2 / 12$, где $\alpha = 2$ м, $\beta = \pi$ м/с^2. Определите: 1) путь, пройденный точкой, и ее перемещение за время $\Delta t = 2$ с от начального момента времени при $t = 0$; 2) скорость тела, тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени $t = 2$ с.

1.56. Дуговая координата материальной точки, движущейся по дуге окружности радиусом $R = 1{,}5$ м, изменяется со временем по закону $l = \alpha\cos(\beta t)$, где $\alpha = 0{,}5$ м, $\beta = \pi$ с$^{-1}$. Найдите полное ускорение точки в моменты времени, когда 1) $l = 0$ и 2) $l = \pm 0{,}5$ м.

1.57. Дуговая координата материальной точки, движущейся по дуге окружности радиусом $R = 0{,}5$ м, изменяется со временем по закону $l = \alpha\sin(\beta t / 3)$, где $\alpha = 2$ м, $\beta = \pi$ с$^{-1}$. Определите скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени $t = 0{,}5$ с.

1.58. Зависимость пройденного материальной точкой пути по окружности радиусом $R = 1$ м от времени имеет вид $s = \alpha t + \beta t^2$, где $\alpha = 0{,}5$ м/с, $\beta = 2{,}5$ м/с^2. Найдите скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени $t = 2$ с.

1.59. Материальная точка движется в плоскости xy со скоростью $\vec{\upsilon} = \alpha y\vec{i} + \beta\vec{j}$, где $\alpha = 1$ с$^{-1}$, $\beta = 0{,}4$ м/с. При $t = 0$ координаты точки $x = y = 0$. Определите полное, тангенциальное, нормальное ускорения в момент времени $t = 1$ с, а также радиус кривизны траектории в этот момент времени.

1.60. Материальная точка движется равноускоренно по окружности радиусом $R = 2$ м. Начальная скорость точки $\upsilon_0 = 2$ м/с, тангенциальное ускорение $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Найдите путь и перемещение точки от начала движения при $t = 0$ к моменту времени $t = 2$ с. Чему равны средняя скорость и модуль вектора средней скорости?

1.61. Дуговая координата материальной точки, движущейся по дуге окружности радиусом $R = 1$ м, изменяется со временем по закону $l = \alpha t^2$, где $\alpha = 0{,}5$ м/с^2. В какой момент времени тангенциальное ускорение точки равно нормальному? Чему равно полное ускорение в этот момент времени?

1.62. Тело бросили со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите тангенциальное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в момент времени, когда тело поднялось на высоту, равную половине максимальной высоты подъема. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.63. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы радиус кривизны начала траектории был в $\eta = 8$ раз больше, чем в вершине траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.64. Материальная точка движется по окружности со скоростью $\upsilon = \alpha t$, где $\alpha = 2$ м/с^2. Найдите полное ускорение точки в момент времени, когда она пройдет половину длины окружности после начала движения.

1.65. Материальная точка движется замедленно по окружности радиусом R = 0,5 м. В каждый момент времени ее тангенциальное ускорение по модулю равно нормальному ускорению. В начальный момент времени при t = 0 скорость точки υ_0 = 25 м/с. Чему равны скорость точки и ее полное ускорение в момент времени, когда она сделает один оборот по окружности?

1.66. Материальная точка движется по окружности радиусом R = 1 м. Ее скорость зависит от пройденного пути s по закону $\upsilon = \alpha\sqrt{s}$, где α = const. Найдите угол между вектором скорости и вектором полного ускорения в момент времени, когда точка пройдет путь s = 0,5 м.

1.67. Тангенциальное ускорение материальной точки a_τ = 2 м/с^2, а ее нормальное ускорение зависит от времени по закону $a_n = \alpha t^2$, где α = 4 м/с^4. В начальный момент времени при t = 0 точка покоилась. Определите радиус кривизны траектории и полное ускорение точки после прохождения пути s = 2 м.

1.68. Векторы скорости и ускорения материальной точки в некоторый момент времени имеют вид $\vec{\upsilon} = 2\vec{i} - 0{,}5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 0{,}2\vec{k}$ (все величины даны в системе СИ). Найдите тангенциальное ускорение и радиус кривизны траектории в этот момент времени.

1.69. Материальная точка движется в плоскости xy так, что уравнения движения имеют вид $x = \alpha t^3$, $y = \beta t^2$, где α = 2 м/с^3, β = 2 м/с^2. Определите скорость, ускорение точки, а также радиус кривизны траектории в момент времени t = 2 с.

1.70. Нормальное ускорение материальной точки, движущейся по окружности радиусом R = 4 м, зависит от времени по закону $a_n = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, где α = 4 м/с^2, β = 4 м/с^3, γ = 1 м/с^4. Найдите тангенциальное ускорение и путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt = 4 с от начала движения при t = 0.

1.71. Материальная точка начинает двигаться из состояния покоя по окружности радиусом R = 50 см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу второго оборота ее скорость υ = = 50 см/с. Чему равно нормальное ускорение точки в момент времени t = 10 с?

1.72. Материальная точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,5 м/с^2. В начальный момент времени при t = 0 точка покоилась. Определите полное ускорение точки в момент времени, когда она пройдет половину окружности после начала движения.

1.73. Материальная точка M движется в плоскости xy по криволинейной траектории в одну сторону (рис. 1.7). Ее тангенциальное ускорение зависит от угла φ между вектором скорости и осью Ox по закону $a_\tau = \alpha\cos\varphi$, где $\alpha = 2$ м/с^2. В начале координат при $x = 0$ ее скорость равна нулю. Чему равна скорость точки в момент времени, когда ее координата $x = 4$ м?

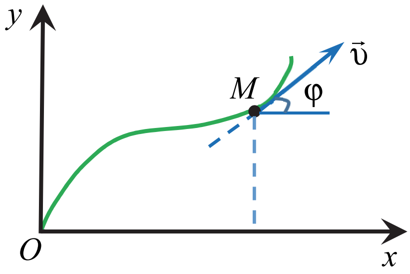


Рис. 1.7

1.74. Материальная точка начинает движение по окружности радиусом $R = 40$ см с постоянным тангенциальным ускорением. Через три оборота скорость точки $\upsilon = 2{,}5$ м/с. Найдите тангенциальное ускорение точки.

1.75. Дуговая координата материальной точки, движущейся по дуге окружности радиусом $R = 0{,}7$ м, изменяется со временем по закону $l = \alpha + \beta t^3$, где $\alpha = 0{,}5$ м, $\beta = 0{,}04$ м/с^3. Определите тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени, когда ее скорость $\upsilon = 0{,}27$ м/с.

§ 2. Кинематика вращательного движения твердого тела

Основные формулы и законы

1. Кинематический закон вращательного движения:

$$\varphi = \varphi(t), \tag{2.1}$$

где φ – угол поворота твердого тела.

2. Средняя угловая скорость:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{2.2}$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота твердого тела за время Δt.

3. Среднее угловое ускорение:

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{2.3}$$

где $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости за время Δt.

4. Угловая скорость (мгновенная угловая скорость):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.4}$$

5. Угловое ускорение (мгновенное угловое ускорение):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{2.5}$$

6. Связь угловой скорости с частотой ν и периодом *T*:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.6}$$

Связь между линейными и угловыми величинами

7. Связь между линейной и угловой скоростями:

$$\upsilon = \omega r, \tag{2.7}$$

где r – расстояние от точки тела до оси вращения.

8. Связь тангенциального и углового ускорений:

$$a_\tau = \varepsilon r. \tag{2.8}$$

9. Связь нормального ускорения с угловой скоростью:

$$a_n = \omega^2 r. \tag{2.9}$$

10. Полное ускорение точки тела:

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{2.10}$$

Частные случаи вращения твердого тела

11. Равномерное вращение:

$$\varepsilon = 0, \;\; \omega = \text{const}, \;\; \varphi = \omega t. \tag{2.11}$$

12. Равнопеременное вращение:

$$\varepsilon = \text{const}, \;\; \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \;\; \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{2.12}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

13. Переменное вращение:

$$\varepsilon \neq \text{const}, \;\; \omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt, \;\; \varphi = \int_0^t \omega dt. \tag{2.13}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = \omega_0(1 - e^{-\alpha t})$, где $\omega_0 = 6{,}5$ рад/с, $\alpha = 0{,}05$ с$^{-1}$. Определите: 1) зависимость угла поворота и углового ускорения от времени; 2) средние угловые скорость и ускорение, а также число оборотов за промежуток времени от начала вращения при $t = 0$ до момента времени, когда угловая скорость ω в 2 раза меньше установившейся угловой скорости ω_0.

Решение. 1. Воспользуемся определением угловой скорости (2.4)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(1 - e^{-\alpha t}). \tag{2.14}$$

Проинтегрировав (2.14), найдем зависимость угла поворота от времени

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0(1 - e^{-\alpha t})dt \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega_0\left(t - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right). \tag{2.15}$$

Угловое ускорение определим, используя соотношение (2.5)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \omega_0 \alpha e^{-\alpha t}. \tag{2.16}$$

2. Найдем момент времени, когда угловая скорость ω меньше установившейся скорости ω_0 в 2 раза

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{\omega_0}{2} \\ \dfrac{\omega_0}{2} = \omega_0(1 - e^{-\alpha t}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha t} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\alpha}. \tag{2.17}$$

Подставив (2.17) в (2.15), определим угол, на который повернется тело к этому моменту времени

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right). \tag{2.18}$$

Тогда средняя угловая скорость (см. формулу (2.2)) за данный промежуток времени

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi}{t} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\text{ср}} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2\ln 2}\right) \approx 1{,}8 \text{ рад/с}. \tag{2.19}$$

Угловая скорость за этот промежуток времени изменяется от нуля до $\omega_0 / 2$. Следовательно, среднее угловое ускорение (см. формулу (2.3)) примет вид

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{2t} = \frac{\omega_0\alpha}{2\ln 2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{6{,}5 \cdot 0{,}05}{2\ln 2} \approx 0{,}23 \text{ рад/с}^2. \qquad (2.20)$$

Число оборотов, которое совершит тело, найдем, используя (2.18)

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi\alpha}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N = \frac{6{,}5}{2\pi \cdot 0{,}05}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \approx 4. \qquad (2.21)$$

Пример 2. Скорость точек боковой поверхности цилиндра, вращающегося вокруг своей оси симметрии, изменяется со временем по закону $\upsilon_1 = \alpha_1 t^2$, где $\alpha_1 = 12{,}5$ см/с^3, а точек цилиндра, находящихся на расстоянии $r = 20$ см ближе к оси цилиндра, – по закону $\upsilon_2 = \alpha_2 t^2$, где $\alpha_2 = 7{,}5$ см/с^3. Определите: 1) радиус цилиндра; 2) угловые скорость и ускорение в момент времени t_1, когда угол между вектором полного ускорения и вектором скорости произвольной точки цилиндра $\alpha = 45°$; 3) угол поворота за промежуток времени от начала вращения при $t = 0$ до момента времени t_1.

Решение. 1. Воспользуемся связью между линейной и угловой скоростями (см. формулу (2.7)). Из условия следует

$$\upsilon_1 = \omega R, \; \upsilon_2 = \omega(R - r), \qquad (2.22)$$

где ω – угловая скорость цилиндра; R – радиус цилиндра.

Из (2.22) найдем радиус цилиндра

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{R - r}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2} r. \qquad (2.23)$$

Принимая во внимание данные условия

$$R = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} r = \frac{12{,}5}{12{,}5 - 7{,}5} \cdot 20 = 50 \text{ см}. \qquad (2.24)$$

2. Зависимость угловой скорости цилиндра от времени

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{R} = \frac{\alpha_1 t^2}{R}. \qquad (2.25)$$

Используя (2.25) и (2.5), определим зависимость углового ускорения от времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2\alpha_1 t}{R}. \tag{2.26}$$

Угол α между вектором полного ускорения и вектором скорости численно равен углу между вектором полного ускорения и тангенциальным ускорением, тангенс которого равен отношению нормального ускорения к тангенциальному. Используя связи (2.8), (2.9) и формулы (2.25), (2.26), получим

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\alpha_1 t^3}{2R}. \tag{2.27}$$

Отсюда найдем момент времени t_1

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{2R}{\alpha_1}\mathrm{tg}\alpha} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 50}{12{,}5}\mathrm{tg}45} = 2 \text{ с}. \tag{2.28}$$

Угловая скорость (см. формулу (2.25)) и угловое ускорение (см. формулу (2.26)) при $t = t_1$

$$\omega = \frac{\alpha_1 t_1^2}{R} = \frac{12{,}5\cdot 2^2}{50} = 1 \text{ рад/с}, \tag{2.29}$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha_1 t_1}{R} = \frac{2\cdot 12{,}5\cdot 2}{50} = 1 \text{ рад/с}^2. \tag{2.30}$$

3. Угол поворота определим по (2.13) с использованием (2.25)

$$\varphi = \int_0^{t_1} \omega dt = \int_0^{t_1} \frac{\alpha_1 t^2}{R} dt = \frac{\alpha_1 t_1^3}{3R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{12{,}5\cdot 2^3}{3\cdot 50} \approx 0{,}7 \text{ рад}. \tag{2.31}$$

Задачи

2.1. Скорость точек обода равномерно вращающегося диска равна $\upsilon_1 = 3$ м/с, а точек, находящихся на расстоянии $r = 10$ см ближе к оси вращения, равна $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определите частоту вращения диска и его радиус.

2.2. На горном велосипеде установлена передача, соответствующая числу зубьев передней звезды $N_1 = 42$ и задней звезды $N_2 = 14$. С какой частотой велосипедист должен вращать педали, чтобы его скорость была равна $\upsilon = 20$ км/ч? Диаметр колеса велосипеда $d = 0{,}7$ м.

2.3. Гусеничный трактор движется со скоростью $\upsilon = 24$ км/ч. На сколько должна быть уменьшена скорость одной из гусениц трактора, чтобы он сделал поворот, при котором его центр тяжести перемещался бы по дуге окружности радиусом $R = 9$ м? Расстояние между гусеницами трактора $d = 1{,}5$ м.

2.4. Определите угловые скорости часовой, минутной и секундной стрелок на часах. Во сколько раз отличаются скорости концов минутной и часовой стрелок, если длина минутной стрелки в 2 раза больше часовой?

2.5. На горизонтальном валу, вращающемся с некоторой частотой ν, на расстоянии $l = 0{,}6$ м друг от друга закреплены два тонких диска. Пуля, летящая со скоростью $\upsilon = 480$ м/с вдоль вала, пробивает оба диска без потери скорости. Определите частоту вращения вала, если отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\varphi = 18°$.

2.6. Скорость точек боковой поверхности цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси симметрии, в $n = 1{,}6$ раза больше скорости точек, лежащих на расстоянии $r = 15$ см ближе к оси колеса. Чему равен радиус цилиндра?

2.7. Пильный диск *1* циркулярной пилы (рис. 2.1) диаметром $D = 500$ мм приводится во вращение электродвигателем *2* с помощью ременной передачи *3* между шкивом *4* диаметром $D_1 = 100$ мм, закрепленным на валу электродвигателя, и шкивом *5* диаметром $D_2 =$ $= 250$ мм, жестко закрепленным на валу пильного диска. Определите частоту вращения диска и скорость зубьев пилы, если частота вращения вала двигателя $\nu = 6000$ мин$^{-1}$.

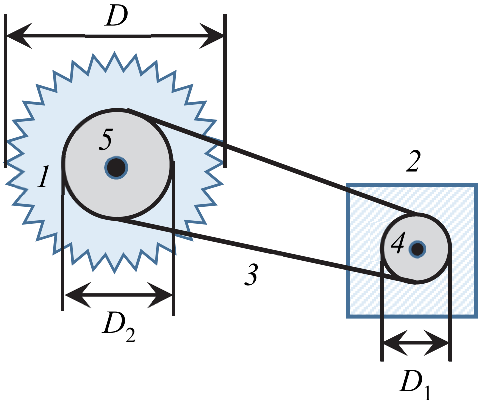


Рис. 2.1

2.8. Колесо радиусом $R = 0{,}4$ м катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью $\upsilon = 2$ м/с. Определите путь, проходимый точкой, лежащей на ободе колеса, между двумя последовательными моментами касания этой точкой поверхности. Чему равно ускорение этой точки и куда оно направлено?

2.9. Частота обращения несущего винта вертолета $\nu_1 = 200$ об/мин, а рулевого винта, расположенного на хвосте, – $\nu_2 = 1100$ об/мин.

Сколько оборотов сделают оба винта на пути $s = 50$ км при скорости полета $\upsilon = 180$ км/ч?

2.10. Искусственный спутник Земли, находящийся на геостационарной орбите, вращается по круговой орбите над экватором с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Определите скорость движения спутника и его нормальное ускорение a_n, если высота движения спутника над поверхностью Земли $h = 35\,786$ км. Радиус Земли $R_з = 6400$ км.

2.11. Частота вращения отрезного круга для угловой шлифовальной машины (болгарки) диаметром $d = 125$ мм не должна превышать максимально допустимую частоту $\nu = 12\,250$ об/мин. Оптимальная частота вращения диска на 15% ниже максимально допустимой. Чему равны максимальные значения скорости и нормального ускорения точек диска при оптимальной частоте вращения?

2.12. Цилиндр радиусом $R = 20$ см катится без скольжения по горизонтальной поверхности (рис. 2.2). Ось цилиндра движется с ускорением $a = 3$ см/с^2. Найдите скорости и ускорения в точках O, A, B цилиндра через промежуток времени $\Delta t = 3$ с после начала его движения при $t = 0$.

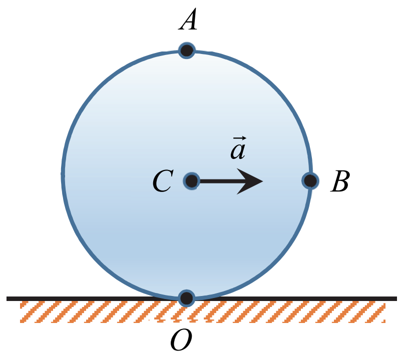


Рис. 2.2

2.13. Угол поворота колеса вокруг неподвижной оси зависит от времени по закону $\varphi = \alpha t^2$, где $\alpha = 0{,}25$ рад/с^2. Определите полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса в момент времени $t = 2$ с, если скорость точки в этот момент времени $\upsilon = 0{,}8$ м/с. Чему равен радиус колеса?

2.14. Вентилятор вращается с частотой $\nu = 8$ Гц. После выключения, вращаясь равнозамедленно, он остановился за время $\Delta t = 4$ с. Найдите угловое ускорение вентилятора и число оборотов, начиная с момента отключения и до остановки.

2.15. Маховик вращается с угловой скоростью $\varepsilon = 1$ рад/с^2. Через время $\Delta t = 3$ с после начала движения из состояния покоя полное ускорение точек обода маховика $a = 2{,}7$ м/с^2. Чему равен радиус маховика?

2.16. Снаряд, двигаясь внутри ствола орудия равноускоренно, вылетел со скоростью $\upsilon = 320$ м/с и угловой скоростью вращения вокруг оси $\omega = 2 \cdot 10^3$ рад/с. Определите число оборотов снаряда в стволе, если длина ствола $l = 2$ м.

2.17. Колесо, вращаясь равноускоренно, сделав $N = 9$ оборотов после начала вращения, достигло частоты $\nu = 5$ с$^{-1}$. Найдите угловое ускорение колеса и время, за которое это произошло.

2.18. Угловая скорость твердого тела, вращающегося равноускоренно вокруг неподвижной оси, увеличилась в 2 раза после N оборотов. Во сколько раз увеличится угловая скорость, если тело совершит в 2 раза больше оборотов?

2.19. На вал радиусом $R = 0{,}4$ м, закрепленный на оси, намотана нить, на конце которой висит груз, опускающийся вниз (рис. 2.3). Нить нерастяжима и не проскальзывает по ободу вала. Закон движения груза имеет вид $x = x_0 + \alpha t^2$, где $x_0 = 1$ м и $\alpha = 0{,}04$ м/с^2. Определите угловое ускорение ε вала, а также его угловую скорость в момент времени $t = 4$ с.

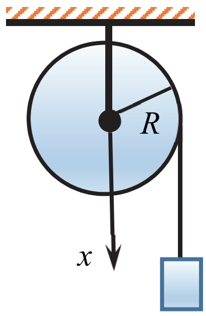


Рис. 2.3

2.20. Твердое тело, вращаясь равноускоренно вокруг неподвижной оси, за время $\Delta t = 4$ с увеличило свою частоту с $\nu_1 = 0{,}5$ с$^{-1}$ до $\nu_2 = 2{,}5$ с$^{-1}$. Найдите угловое ускорение и число оборотов тела за это время.

2.21. Диск радиусом $R = 0{,}4$ м, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, достиг угловой скорости $\omega = 1{,}5$ рад/с через $N = 1$ оборот после начала вращения. Определите угловое ускорение диска, а также скорость, нормальное и тангенциальное ускорения точек диска, лежащих на его ободе в этот момент времени.

2.22. Твердое тело, вращаясь равноускоренно вокруг неподвижной оси, из состояния покоя достигло частоты $\nu_1 = 1$ с$^{-1}$, сделав $N_1 = 6$ оборотов. Сколько оборотов N_2 сделает тело при изменении частоты вращения от ν_1 до $\nu_2 = 2$ с$^{-1}$?

2.23. Твердое тело начинает вращаться с нулевой начальной скоростью вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}04$ рад/с^2. Через какое время после начала вращения полное ускорение какой-либо точки тела будет направлено под углом $\alpha = 76°$ к вектору скорости этой точки?

2.24. Угол поворота твердого тела вокруг неподвижной оси зависит от времени по закону $\varphi = \alpha t - \beta t^3$, где $\alpha = 3$ рад/с, $\beta = 0{,}25$ рад/с^3. Определите: 1) момент времени, когда тело остановится; 2) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; 3) угловое ускорение в момент остановки.

2.25. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}08$ рад/с^3. Спустя какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 30°$ с ее вектором скорости?

2.26. Зависимость от времени угловой скорости цилиндра, который вращается вокруг своей оси, показана на рис. 2.4. Определите угол поворота цилиндра за промежуток времени $\Delta t = 4$ с от начального момента времени при $t = 0$. Чему будет равен максимальный угол, на который повернется цилиндр от первоначального положения в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с?

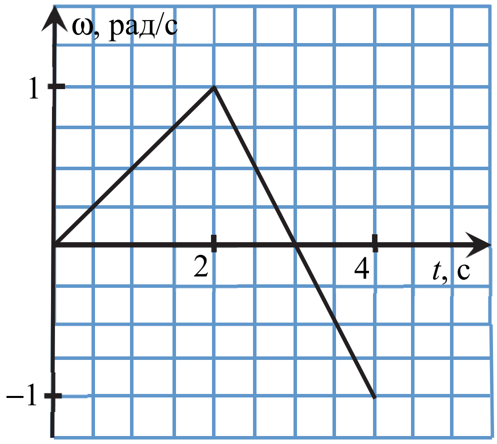


Рис. 2.4

2.27. Диск вращается так, что зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = \alpha t^2 + \beta t^3$, где $\alpha = 1$ рад/с^2 и $\beta = 0{,}5$ рад/с^3. Найдите радиус диска, если в момент времени $t = 1$ с тангенциальное ускорение точек диска, лежащих на его ободе, $a_\tau = 1{,}5$ м/с^2.

2.28. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где $\omega_0 = 1{,}5$ рад/с и $\alpha = 0{,}3$ с$^{-1}$. При $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Определите зависимость угла поворота и угловой скорости от времени. На какой угол повернется тело при уменьшении угловой скорости в 2 раза?

2.29. Колесо радиусом $R = 0{,}2$ м вращается так, что зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = \alpha t + \beta t^3$, где $\alpha = 0{,}2$ рад/с и $\beta = 0{,}05$ рад/с^3. Для момента времени $t = 2$ с определите: 1) угловые скорость и ускорение; 2) тангенциальное, нормальное и полное ускорения для точек, лежащих на ободе колеса; 3) угол между полным ускорением и радиусом колеса.

2.30. Угловое ускорение твердого тела, вращающегося замедленно вокруг неподвижной оси, зависит от угловой скорости по закону $\varepsilon = -\alpha\sqrt{\omega}$, где α – положительная постоянная. В начальный момент времени при $t = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 0{,}9$ рад/с. Чему равна средняя угловая скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться?

2.31. Цилиндр вращается вокруг оси, совпадающей с осью симметрии. Зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$, где $\alpha = 0{,}5$ рад/с, $\beta = 0{,}3$ рад/с^2 и $\gamma = 0{,}8$ рад/с^3. Определите радиус R цилиндра, если в момент времени $t = 1$ с нормальное ускорение точек, лежащих на боковой поверхности цилиндра, $a_n = 4{,}9$ м/с^2.

2.32. Угловое ускорение твердого тела, вращающегося замедленно вокруг неподвижной оси, зависит от угловой скорости по закону $\varepsilon = -\alpha\omega^2$, где $\alpha = 2$ рад$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ скорость точки $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с. Найдите угловую скорость тела в момент времени $t = 4$ с, а также угол, на который повернется тело за промежуток времени $\Delta t = 4$ с от начала вращения при $t = 0$.

2.33. Колесо радиусом $R = 1$ м вращается так, что скорость точек, лежащих на его ободе, изменяется со временем по закону $\upsilon = \alpha t + \beta t^2$, где $\alpha = 2$ м/с^2 и $\beta = 6$ м/с^3. Какое число оборотов сделает колесо за время $\Delta t = 3$ с от начала вращения при $t = 0$?

2.34. Угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, зависит от угловой скорости по закону $\varepsilon = -\alpha\omega$, где $\alpha = 0{,}44$ с$^{-1}$. В начальный момент времени при $t = 0$ скорость точки $\omega_0 = 1{,}5$ рад/с. Определите средние значения угловых скорости и ускорения за промежуток времени, в течение которого угловая скорость уменьшится в 3 раза.

2.35. Диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с. В момент времени $t = 0$ у него появляется угловое ускорение, зависящее от времени по закону $\varepsilon = \alpha t^2$, где $\alpha = 4$ рад/с^4. Чему равна угловая скорость диска через промежуток времени $\Delta t = 1$ с? На какой угол повернется диск за это время?

2.36. Твердое тело вращается с угловым ускорением, зависящим от угла поворота φ из начального положения по закону $\varepsilon = \varepsilon_0\cos\varphi$, где $\varepsilon_0 = 5$ рад/с^2. В начальном положении при $\varphi = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 2$ рад/с. Определите угловую скорость тела в момент времени, когда угол поворота $\varphi = \pi / 6$ рад.

2.37. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$, где $\alpha = 0{,}4$ рад/с, $\beta = 2{,}4$ рад/с^2 и $\gamma = -0{,}2$ рад/с^3. Через какой промежуток времени тело будет иметь максимальную угловую скорость? Чему она равна?

2.38. Диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_0 = 8{,}1$ рад/с. В момент времени $t = 0$ он начал тормозить. Его угловое ускорение при этом зависит от времени по закону $\varepsilon = -\alpha t^3$, где $\alpha = 0{,}4$ рад/с^5. Через какой промежуток времени Δt диск остановится? На какой угол повернется диск за это время?

2.39. Зависимость от времени углового ускорения диска, вращающегося вокруг своей оси, показана на рис. 2.5. Угловая скорость диска в начальный момент времени $\omega_0 = 0$. Найдите угловую скорость в момент времени $t = 4$ с.

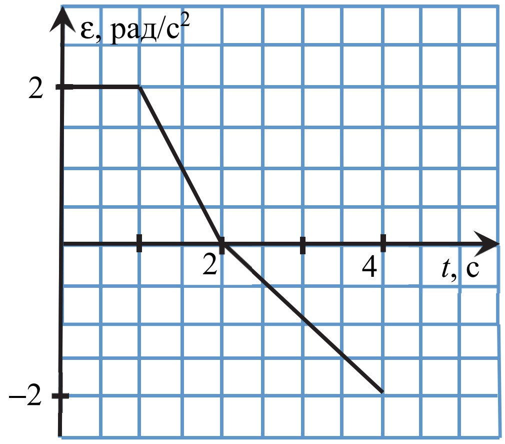


Рис. 2.5

2.40. Тангенциальное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, зависит от времени по закону $a_\tau = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}6$ м/с^3. В начальный момент времени при $t = 0$ угловая скорость тела $\omega_0 = 0$. Определите расстояние точки тела от оси вращения, если при $t = 2$ с угол поворота тела $\varphi = 4$ рад. Чему равна угловая скорость тела в этот момент времени?

§ 3. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Основные формулы и законы

1. Основное уравнение динамики (второй закон Ньютона):

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{3.1}$$

где m – масса тела; $\vec{a}$ – ускорение тела; $\vec{F}$ – равнодействующая сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n. \tag{3.2}$$

2. Третий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \tag{3.3}$$

где $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ – силы взаимодействия тел друг с другом.

3. Уравнение движения центра масс:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}, \tag{3.4}$$

где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс тела (или системы материальных точек); $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на тело (или систему).

Силы в механике

4. Гравитационная сила (закон всемирного тяготения):

$$F_{\text{г}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.5}$$

где $F_{\text{г}}$ – сила притяжения между двумя материальными точками массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии r друг от друга; G – гравитационная постоянная.

5. Сила тяжести:

$$\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}, \tag{3.6}$$

где $\vec{F}_{\text{т}}$ – сила притяжения тела массой m к Земле; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

6. Сила трения скольжения (закон Амонтона – Кулона):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{3.7}$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормальной реакции опоры.

7. Сила упругости при растяжении или сжатии (закон Гука):

$$F_{\text{упр}} = k|\Delta l|, \tag{3.8}$$

где k – жесткость тела; Δl – абсолютная величина упругой деформации.

8. Закон Гука для относительной деформации при растяжении (сжатии):

$$\sigma = E\varepsilon_l, \tag{3.9}$$

где σ – механическое напряжение; E – модуль Юнга; ε_l – относительная деформация

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S},\ \ \varepsilon_l = \frac{|\Delta l|}{l_0}, \tag{3.10}$$

где l_0 – размер тела до деформации.

9. Связь между относительной поперечной деформацией ε_d и относительной продольной деформацией ε_l:

$$\varepsilon_d = -\mu_п \varepsilon_l, \qquad (3.11)$$

где $\mu_п$ – коэффициент Пуассона.

Примеры решения задач

Пример 1. В установке (рис. 3.1) угол наклонной плоскости к горизонту $\alpha = 30°$, массы тел $m_1 = 0{,}3$ кг, $m_2 = 0{,}2$ кг и $m_3 = 0{,}1$ кг. Коэффициент трения скольжения тел о плоскость $\mu = 0{,}1$. Массы блока и нитей пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Система пришла в движение из состояния покоя. Определите ускорение грузов.

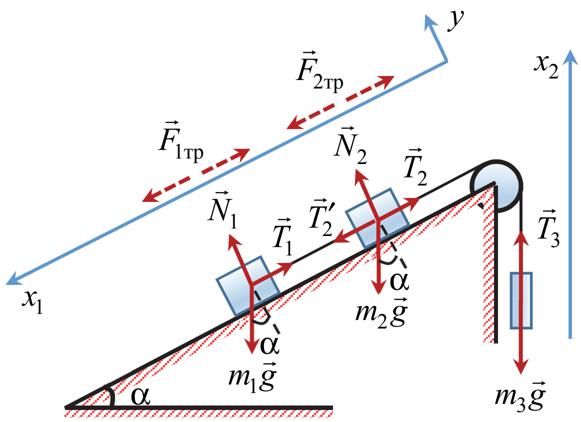


Рис. 3.1

Решение. Силы, действующие на каждое из тел, участвующих в движении, показаны на рис. 3.1. Уравнения движения тел представляют собой уравнение движения центра масс (см. формулу (3.4)) этих тел

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{1тр} = m_1\vec{a}_1, \qquad (3.12)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2' + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{2тр} = m_2\vec{a}_2, \qquad (3.13)$$

$$m_3\vec{g} + \vec{T}_3 = m_3\vec{a}_3, \qquad (3.14)$$

где $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$ – силы тяжести, действующие на тела; $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ – силы реакции опоры; $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2'$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$ – силы натяжения нитей; $\vec{F}_{1тр}$, $\vec{F}_{2тр}$ – силы трения; $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ – ускорения тел.

Заметим, что направление сил трения, действующих на тела на наклонной плоскости, изначально неизвестно и зависит от того, в какую сторону начнут двигаться тела. Силы трения направлены в противоположную сторону движения тел. Направление движения тел совпадает с направлением движения тел в отсутствие сил трения, которые просто уменьшают ускорение тел. Поэтому вначале найдем ускорение тел в отсутствии сил трения $F_{1тр} = F_{2тр} = 0$. Проекции уравнений (3.12)–(3.14) на оси x_1 и x_2 в этом случае имеют вид

$$m_1 g \sin\alpha - T_1 = m_1 a_{1x}, \tag{3.15}$$

$$m_2 g \sin\alpha + T_2' - T_2 = m_2 a_{2x}, \tag{3.16}$$

$$-m_3 g + T_3 = m_3 a_{3x}, \tag{3.17}$$

где a_{1x}, a_{2x}, a_{3x} – проекции ускорений тел на оси x_1 и x_2.

В системе уравнений (3.15)–(3.17) примем во внимание невесомость нитей и блока, а также равенство модулей ускорения тел. Как следствие,

$$T_2' = T_1,\ T_3 = T_2, \tag{3.18}$$

$$a_{1x} = a_{2x} = a_{3x} = a_x. \tag{3.19}$$

Тогда система уравнений (3.15)–(3.17) примет вид

$$m_1 g \sin\alpha - T_1 = m_1 a_x, \tag{3.20}$$

$$m_2 g \sin\alpha + T_1 - T_2 = m_2 a_x, \tag{3.21}$$

$$-m_3 g + T_2 = m_3 a_x. \tag{3.22}$$

Сложив левые и правые части уравнений (3.20)–(3.22), найдем проекцию ускорений тел на ось x

$$a_x = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g. \tag{3.23}$$

Подставив в (3.23) численные данные из условия, получим

$$a_x = \frac{(0,3 + 0,2)\sin 30 - 0,1}{0,3 + 0,2 + 0,1} \cdot 9,8 = 2,45 \text{ м/с}^2. \tag{3.24}$$

Поскольку $a_x > 0$, то тела двигаются вниз по наклонной плоскости в положительном направлении оси x_1. Следовательно, силы трения направлены в противоположном направлении. Проекции уравнений (3.12)–(3.14) на оси x_1 и x_2 с учетом этого обстоятельства и формул (3.18), (3.19) имеют вид

$$m_1 g\sin\alpha - T_1 - F_{1\text{тр}} = m_1 a_x, \tag{3.25}$$

$$m_2 g\sin\alpha + T_1 - T_2 - F_{2\text{тр}} = m_2 a_x, \tag{3.26}$$

$$-m_3 g + T_2 = m_3 a_x, \tag{3.27}$$

где модули сил трения

$$F_{1\text{тр}} = \mu N_1,\ F_{2\text{тр}} = \mu N_2. \tag{3.28}$$

Силы реакции опоры N_1 и N_2 определим, проектируя уравнения (3.12), (3.13) на ось y, приняв во внимание, что ускорения тел направлены вдоль оси x_1, а следовательно, их проекции на ось y равны нулю,

$$N_1 = m_1 g\cos\alpha,\ \ N_2 = m_2 g\cos\alpha. \tag{3.29}$$

Сложив почленно левые и правые части уравнений (3.25)–(3.27) с учетом формул (3.28), (3.29), найдем проекцию ускорений тел на ось x в этом случае

$$a_x = \frac{(m_1 + m_2)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g. \tag{3.30}$$

Подставив в (3.30) данные из условия, вычислим ускорение грузов

$$a = a_x = \frac{(0{,}3 + 0{,}2)\cdot(\sin 30 - 0{,}1\cos 30) - 0{,}1}{0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1}\cdot 9{,}8 \approx 1{,}7\ \text{м/с}^2. \tag{3.31}$$

Пример 2. Метеорологической ракете массой m = 500 кг на поверхности Земли сообщили скорость υ_0 = 1,5 км/с, направленную вертикально вверх. Определите высоту, на которую поднимется ракета, и время подъема. Считать, что модуль силы сопротивления воздуха прямо пропорционален скорости ракеты $F_c = k\upsilon$, где k = 2,5 Н · с/м. Полученный результат сравните с высотой и временем подъема, которые следуют из предположения, что сопротивлением воздуха можно пренебречь.

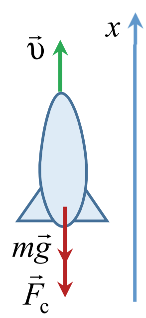


Рис. 3.2

Решение. На ракету при ее движении действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха, направленные к Земле (рис. 3.2). Уравнение движения центра масс ракеты (см. формулу (3.4)) в проекции на ось x имеет вид

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg - k\upsilon, \tag{3.32}$$

где принято во внимание определение ускорения (см. формулу (1.6)).

Уравнение (3.32) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Решив его, найдем зависимость скорости ракеты от времени. Разделим переменные в уравнении и проинтегрируем его

$$\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{mg + k\upsilon} = -\int\limits_0^t \frac{dt}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}\ln(mg + k\upsilon)\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{t}{m}\Big|_0^t. \tag{3.33}$$

Отсюда найдем

$$\ln\frac{mg + k\upsilon}{mg + k\upsilon_0} = -\frac{k}{m}t \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{(mg + k\upsilon_0)e^{-\frac{k}{m}t} - mg}{k}. \tag{3.34}$$

Время подъема $t_п$ определим из (3.34) при условии, что при $t = t_п$ скорость ракеты $\upsilon = 0$,

$$t_п = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{k\upsilon_0}{mg}\right). \tag{3.35}$$

Высота, на которую поднимется ракета, численно равна пути, пройденному ей за время подъема. Его найдем по формуле (1.7) с использованием (3.34)

$$s = \int\limits_0^{t_п} \upsilon dt \quad \Rightarrow \quad s = \frac{m(mg + k\upsilon_0)}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_п}\right) - \frac{mg}{k}t_п. \tag{3.36}$$

Подставив (3.35) в (3.36), определим

$$s = \frac{m\upsilon_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{k\upsilon_0}{mg}\right). \tag{3.37}$$

Проверим размерности величин, получаемых по формулам (3.35), (3.37), и выполним их вычисления

$$[t_п] = кг \cdot \frac{м}{Н \cdot с}\ln\left(1 + \frac{Н \cdot с}{м} \cdot \frac{м}{с \cdot Н}\right) = с, \tag{3.38}$$

$$[s] = кг \cdot \frac{м}{с} \cdot \frac{м}{Н \cdot с} - \frac{кг \cdot Н \cdot м^2}{Н^2 \cdot с^2}\ln\left(1 + \frac{Н \cdot с}{м} \cdot \frac{м}{с \cdot Н}\right) = м, \tag{3.39}$$

$$t_\text{п} = \frac{500}{2{,}5}\ln\left(1 + \frac{2{,}5\cdot 1{,}5\cdot 10^3}{50\cdot 9{,}8}\right) \approx 114 \text{ с}, \qquad (3.40)$$

$$s = \frac{500\cdot 1{,}5\cdot 10^3}{2{,}5} - \frac{500^2\cdot 9{,}8}{2{,}5^2}\ln\left(1 + \frac{2{,}5\cdot 1{,}5\cdot 10^3}{500\cdot 9{,}8}\right) \approx 77{,}2 \text{ км}. \qquad (3.41)$$

Пренебрегая силой сопротивления воздуха, ракета под действием только силы тяжести будет двигаться с ускорением свободного падения. Время подъема ракеты найдем из зависимости скорости ракеты от времени при условии, что когда $t = t_\text{п}$, скорость ракеты равна нулю

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt_\text{п} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_\text{п} = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{1{,}5\cdot 10^3}{9{,}8} \approx 153 \text{ с}. \qquad (3.42)$$

Высота подъема ракеты в этом случае

$$s = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{(1{,}5\cdot 10^3)^2}{2\cdot 9{,}8} \approx 115 \text{ км}. \qquad (3.43)$$

Пример 3. Шарик массой m = 50 г, подвешенный на нити, отвели в сторону таким образом, что нить составила прямой угол с вертикалью, и затем отпустили. Определите зависимость силы натяжения нити, тангенциального, нормального и полного ускорений от угла φ отклонения нити от вертикали. Чему равны эти величины в момент времени, когда результирующая сила, которая действует на шарик, направлена горизонтально?

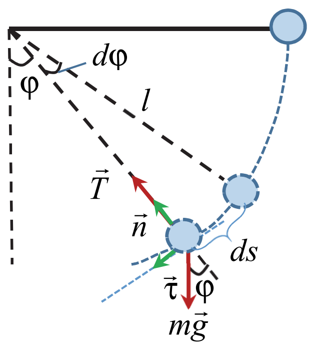


Рис. 3.3

Решение. На шарик при его движении действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}$ нити (рис. 3.3). Уравнением динамики, описывающим движение тела, является второй закон Ньютона (см. формулу (3.1)), который в данном случае имеет следующий вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \qquad (3.44)$$

Запишем уравнение (3.44) в проекциях на подвижные орты: $\vec{\tau}$ – касательный и $\vec{n}$ – нормальный к траектории

$$ma_\tau = mg\sin\varphi, \qquad (3.45)$$

$$ma_n = T - mg\cos\varphi, \tag{3.46}$$

где a_τ – тангенциальное ускорение; a_n – нормальное ускорение.

Из формулы (3.45) следует зависимость тангенциального ускорения от угла φ

$$a_\tau = g\sin\varphi. \tag{3.47}$$

Учитывая, что радиус кривизны траектории равен длине нити $\rho = l$, нормальное ускорение (см. формулу (1.21)) шарика

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{l}. \tag{3.48}$$

Скорость шарика υ найдем путем интегрирования уравнения (3.47). Для этого воспользуемся определениями тангенциального ускорения (см. формулу (1.21)), модуля скорости (см. формулу (1.8)) и связи пройденного пути ds с изменением угла $d\varphi$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \;\; \upsilon = \frac{ds}{dt}, \;\; ds = -l d\varphi, \tag{3.49}$$

где знак минус в последнем соотношении обусловлен тем, что угол φ при движении тела уменьшается, и поэтому изменение угла $d\varphi$ является отрицательным.

Умножив левые и правые части уравнения (3.47) на ds и использовав соотношения (3.49), получим

$$\upsilon d\upsilon = -gl\sin\varphi d\varphi. \tag{3.50}$$

Выполнив интегрирование левой и правой частей (3.50), найдем зависимость скорости от угла φ

$$\int\limits_0^\upsilon \upsilon d\upsilon = -gl\int\limits_{\pi/2}^{\varphi} \sin\varphi d\varphi \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 2gl\cos\varphi. \tag{3.51}$$

Подставив (3.51) в (3.48), получим зависимость нормального ускорения от угла φ

$$a_n = 2g\cos\varphi. \tag{3.52}$$

Используя (3.47) и (3.52), найдем зависимость полного ускорения (см. формулу (1.20)) от угла φ

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \Rightarrow \quad a = g\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}. \tag{3.53}$$

Зависимость силы натяжения нити от угла φ следует из (3.46) с учетом (3.52)

$$T = 3mg\cos\varphi. \qquad (3.54)$$

В момент времени, когда результирующая сила горизонтальна (рис. 3.4), справедливо следующее соотношение:

$$mg = T\cos\varphi. \qquad (3.55)$$

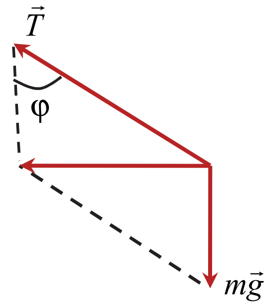


Рис. 3.4

Подставив зависимость (3.54) в уравнение (3.55), найдем соотношение для угла φ в данный момент времени

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (3.56)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, в этот момент времени

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (3.57)$$

Подставив (3.57) в (3.47) и (3.56) в (3.52)–(3.54), найдем искомые величины в этот момент времени

$$a_\tau = \sqrt{\frac{2}{3}}g = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 9{,}8 \approx 8{,}0 \text{ м/с}^2, \qquad (3.58)$$

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}g = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 9{,}8 \approx 11{,}3 \text{ м/с}^2, \qquad (3.59)$$

$$a = \sqrt{2}g = \sqrt{2} \cdot 9{,}8 \approx 13{,}9 \text{ м/с}^2, \qquad (3.60)$$

$$T = \sqrt{3}mg = \sqrt{3} \cdot 0{,}05 \cdot 9{,}8 \approx 0{,}8 \text{ Н}. \qquad (3.61)$$

Задачи

3.1. На тело массой $m = 2$ кг, лежащее на гладкой горизонтальной поверхности, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, зависящая от времени $F = kt$, где $k = 20$ Н/с. Направление силы составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Определите: 1) скорость тела в момент отрыва от поверхности; 2) путь, который пройдет тело к этому моменту.

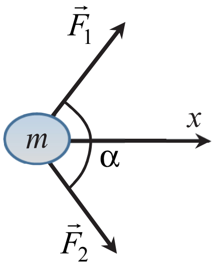


Рис. 3.5

3.2. На покоящееся на горизонтальной гладкой поверхности тело массой $m = 2$ кг в начальный момент времени $t = 0$ начинают действовать две силы, направленные вдоль поверхности симметрично относительно оси x (рис. 3.5). Модули сил $F_1 = F_2 = 4$ Н, а угол между направлениями их действия $\alpha = 120°$. Определите перемещение тела за промежуток времени $\Delta t = 4$ с после начала действия сил. Чему равна скорость тела в момент времени $t = 4$ с?

3.3. В момент времени $t = 0$ на покоившееся на горизонтальной поверхности тело массой $m = 20$ кг начинает действовать сила, направленная вдоль поверхности. Модуль силы зависит от времени по закону $F = \alpha t(\tau - t)$, где $\alpha = 1{,}5$ Н/с^2, $\tau = 10$ с – время действия силы. Определите скорость, которую приобретет тело, и путь, пройденный им за время действия силы. Силой трения тела о поверхность пренебречь.

3.4. На покоившееся тело массой $m = 2$ кг, лежащее на гладкой горизонтальной поверхности, в момент времени $t = 0$ начинает действовать направленная вдоль горизонтальной оси x сила. Проекция силы на ось x зависит от времени по закону $F_x = F_0\cos(\omega t)$, где $F_0 =$ $= 10$ Н, $\omega = \pi / 4$ с$^{-1}$. Определите: 1) время движения тела до первой остановки; 2) путь, пройденный телом за это время; 3) максимальную скорость тела на этом пути.

3.5. В момент времени $t = 0$ на покоившееся на горизонтальной поверхности тело массой $m = 2{,}5$ кг начинает действовать направленная вдоль горизонтальной оси x сила. Проекция силы на ось x зависит от времени по закону $F_x = F_0\sin(\omega t)$, где $F_0 = 5$ Н, $\omega = \pi / 3$ с$^{-1}$. Определите: 1) промежуток времени, в течение которого скорость достигнет максимального значения; 2) путь, пройденный телом за это время. Силой трения пренебречь.

3.6. Тело массой $m = 0{,}2$ кг движется вдоль оси x так, что его координата зависит от времени по закону $x = \alpha t^2 + \beta t^3$, где $\alpha = 5$ м/с^2 и $\beta = -0{,}2$ м/с^3. Определите значение проекции равнодействующей силы F_x, действующей на тело, в начальный момент времени при $t = 0$ и в момент времени, когда скорость тела станет равной нулю. В какой момент времени равнодействующая сила равна нулю?

3.7. Материальная точка массой $m = 0{,}05$ кг движется в плоскости xy так, что ее координаты изменяются со временем по закону $x = A\cos(\omega t)$, $y = B\sin(\omega t)$, где $A = B = 0{,}4$ м, $\omega = 2$ с$^{-1}$. Определите направление и модуль силы, действующей на точку.

3.8. Материальная точка массой $m = 0{,}1$ кг движется по дуге окружности радиусом $R = 1$ м так, что ее дуговая координата изменяется со временем по закону $l = A\sin(\omega t)$, где $A = 0{,}5$ м и $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Найдите силу, действующую на точку в момент времени $t = 0{,}75$ с.

3.9. Амулет, подвешенный на нити к потолку кабины водителя, при наборе скорости автомобиля, отклонился на угол $\alpha = 14{,}3°$. Какой скорости достигнет автомобиль за время $\Delta t = 10$ с, если он движется равноускоренно, а его начальная скорость равна нулю?

3.10. Тело массой $m = 5$ кг тянут по горизонтальной поверхности с силой $F = 20{,}5$ Н. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться это тело, если эту же силу приложить под углом $\alpha_2 = 30°$?

3.11. Материальная точка массой $m = 2$ мг движется по окружности радиусом $R = 5$ см с постоянной скоростью $\upsilon = 0{,}5 \cdot 10^3$ м/с. Определите модуль вектора средней силы, действующей на точку, за время, в течение которого она пройдет четверть длины окружности.

3.12. Три груза одинаковой массы $m = 4$ кг соединены между собой невесомой нитью. Грузы движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $F = 18$ Н, направленной вдоль поверхности. Определите силы натяжения нитей, соединяющих грузы, и их ускорение.

3.13. Тело из состояния покоя движется по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 20°$ с горизонтом. Пройдя путь $s = 60$ см, тело приобретает скорость $\upsilon = 1{,}5$ м/с. Найдите коэффициент трения скольжения тела о плоскость.

3.14. На тело массой $m = 150$ кг, лежащее на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 45°$, действует горизонтальная сила $F = 3{,}5$ кН, прижимающая его к плоскости. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость $\mu = 0{,}4$. Чему равно ускорение, с которым движется тело?

3.15. Тело поднимается по наклонной плоскости, составляющей угол $\varphi = 10°$ с горизонтом. Путь, пройденный телом, зависит от времени по закону $s = \alpha t + \beta t^2$, где $\alpha = 10$ м/с и $\beta = -2$ м/с^2. Определите коэффициент трения скольжения тела о плоскость. Какой путь тело пройдет до остановки?

3.16. Материальная точка массой $m = 0{,}2$ кг движется в некоторой плоскости под действием постоянной по модулю силы $F = 5$ Н. Направление действия силы поворачивается в этой плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi$ рад/с. В начальный момент времени при $t = 0$ точка покоилась. Определите: 1) зависимость от времени модуля скорости точки; 2) путь, проходимый точкой между двумя последовательными остановками, и ее среднюю скорость на этом пути.

3.17. К телу массой $m = 0{,}01$ кг, лежащему на горизонтальной поверхности, в момент времени $t = 0$ приложили горизонтальную силу, модуль которой зависит от времени по закону $F = \alpha t$, где $\alpha = 2{,}45 \cdot 10^{-2}$ Н/с. Коэффициент трения скольжения тела о поверхность $\mu = 0{,}25$. Найдите скорость тела через промежуток времени $\Delta t = 5$ с от начала действия этой силы. Чему равен путь, пройденный телом, за этот промежуток времени?

3.18. По ледяной горке, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 20°$, пускают снизу вверх шайбу, которая за время $\Delta t = 4$ с проходит до остановки путь $s = 30{,}5$ м. Определите время соскальзывания шайбы вниз. Чему равен коэффициент трения скольжения между горкой и шайбой?

3.19. Груженный песком самосвал начинает движение под действием постоянной силы тяги $F = 26$ кН, развиваемой двигателем автомобиля. Через дырку в кузове самосвала на дорогу высыпается песок с постоянной скоростью $u = 10$ кг/с. Начальная масса самосвала с песком $M = 5$ т. Во время движения на автомобиль действует сила сопротивления, равная $\mu = 0{,}4$ действующей на него силы тяжести. Чему равна скорость автосамосвала через промежуток времени $\Delta t = 15$ с после начала его движения?

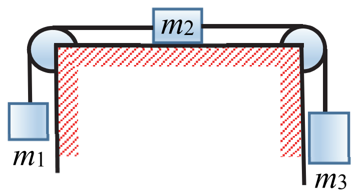


Рис. 3.6

3.20. Три груза массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ и $m_3 = 3m$, где $m = 300$ г, соединены нитями, которые перекинуты через два блока (рис. 3.6). Массы блоков и нитей пренебрежимо малы, трения в блоках нет, горизонтальная поверхность является гладкой. Определите силы натяжения нитей и ускорение грузов.

3.21. По наклонной плоскости пустили снизу вверх небольшое тело. Время подъема тела оказалось в $\eta = 1{,}5$ раза меньше времени спуска. Чему равен угол наклона плоскости к горизонту, если коэффициент трения скольжения тела о плоскость $\mu = 0{,}22$?

3.22. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α движется тело с начальной скоростью $\upsilon_0 = 4$ м/с. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость $\mu = 0{,}4$. При каком значении угла α тело пройдет вверх наименьшее расстояние? Чему оно равно?

3.23. На тело массой m = 8 кг действует постоянная сила F, приложенная под углом α к горизонту (рис. 3.7). Тело движется по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью. Коэффициент трения скольжения μ = 0,29. Определите угол α, при котором сила F будет иметь наименьшее значение. Чему оно равно?

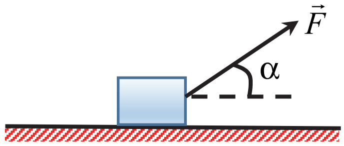


Рис. 3.7

3.24. На гладкой горизонтальной поверхности лежит длинная доска массой M = 2 кг. Телу массой m = 0,2 кг, лежащему на доске, сообщили скорость υ_0 = 3 м/с вдоль доски. Определите путь, пройденный телом относительно доски. Коэффициент трения скольжения тела по доске μ = 0,25.

3.25. Автомобиль совершает разворот на горизонтальной поверхности, двигаясь с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,5 м/с^2 по дуге окружности радиусом R = 60 м. Коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью μ = 0,4. Какой путь пройдет автомобиль до заноса, вызванного недостаточным сцеплением колес и дороги? В начальный момент времени автомобиль покоился.

3.26. Тело сначала из состояния покоя соскальзывает с наклонной плоскости высотой h = 2,5 м и углом наклона к горизонту α = 40°, а затем движется по горизонтальному участку до полной остановки. На всем пути движения коэффициент трения скольжения μ = 0,1. Определите путь, пройденный телом на горизонтальном участке.

3.27. На наклонную плоскость поместили два тела массами m_1 = = 1 кг и m_2 = 1,5 кг (рис. 3.8). Угол наклона плоскости к горизонту α = 20°, коэффициенты трения скольжения между плоскостью и телами μ_1 = 0,3 и μ_2 = 0,1. Определите: 1) ускорение брусков и силу взаимодействия между ними; 2) значения угла α, при которых скольжения не будет.

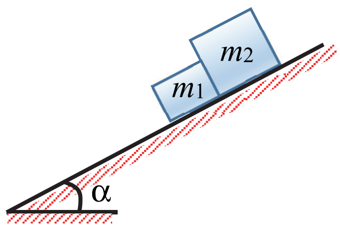


Рис. 3.8

3.28. К телу массой m, лежащему на гладкой горизонтальной поверхности, приложили постоянную по модулю силу F, которая в η = 4 раза меньше силы тяжести, действующей на тело. При движении тела по поверхности угол φ между направлением силы и горизонтом изменяется в зависимости от пройденного телом пути s по закону $\varphi = ks$, где k = 0,05 м$^{-1}$. Чему равна скорость тела в тот момент времени, когда угол φ = 30°?

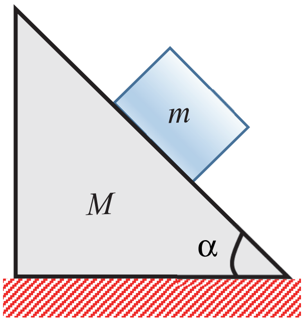


Рис. 3.9

3.29. Тело массой m скользит по боковой поверхности призмы массой M с углом $\alpha = 60°$, находящейся на горизонтальной поверхности (рис. 3.9). Трение между телом и призмой, а также между призмой и поверхностью отсутствует. Определите ускорение призмы, если ее масса в $\eta = 2,1$ раза больше массы тела.

3.30. Сейф массой $m = 500$ кг требуется загрузить в кузов грузовика высотой $h = 1$ м с помощью досок длиной $l = 5$ м. Коэффициент трения скольжения сейфа о доски $\mu = 0,3$. Какую минимальную силу необходимо приложить для передвижения сейфа?

3.31. Тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости, угол наклона α которой можно изменять (рис. 3.10). Начало соскальзывания расположено над вертикальным упором. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость $\mu = 0,2$. При каком значении угла α время соскальзывания будет минимальным?

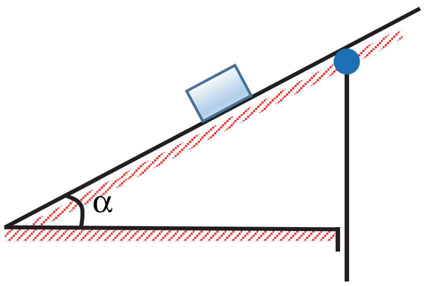


Рис. 3.10

3.32. Тело из состояния покоя начинает скользить по наклонной плоскости, имеющей угол наклона $\alpha = 30°$ с горизонтом. Коэффициент трения скольжения зависит от пройденного телом пути s по формуле $\mu = ks$, где $k = 2$ м$^{-1}$. Определите путь, пройденный телом до остановки, и максимальную скорость его на этом пути.

3.33. Лодку оттолкнули от берега озера, сообщив ей скорость $\upsilon_0 = 2$ м/с. Лодка, двигаясь прямолинейно, на расстоянии $s_1 = 10$ м от берега имела скорость $\upsilon_1 = 0,2$ м/с. На каком расстоянии s_2 от берега скорость лодки была $\upsilon_2 = 1$ м/с? Считать, что модуль силы сопротивления движению лодки прямо пропорционален ее скорости $F = k\upsilon$, где k – коэффициент пропорциональности.

3.34. Пуля, пробив брус толщиной $h_1 = 10$ см, изменила свою скорость от υ_0 до $\upsilon_1 = 0,8\upsilon_0$. Определите толщину бруса h_2, пробитого такой же пулей, если ее скорость уменьшилась в 2 раза, т. е. $\upsilon_2 = \upsilon_0 / 2$. Полагать, что модуль силы сопротивления движению пули в брусе прямо пропорционален квадрату ее скорости $F = k\upsilon^2$, где k – коэффициент пропорциональности.

3.35. Моторная лодка массой $m = 200$ кг движется по озеру со скоростью $\upsilon_0 = 15$ км/ч. В момент времени $t = 0$ мотор лодки выключили. Чему равен путь, пройденный лодкой до остановки? Считать, что модуль силы сопротивления движению лодки прямо пропорционален ее скорости $F = k\upsilon$, где $k = 30$ Н · с/м.

3.36. В системе, показанной на рис. 3.11, массы тел $m_1 = 1$ кг, $m_2 = m_3 = 0{,}5$ кг, коэффициент трения скольжения между телами и горизонтальной поверхностью $\mu = 0{,}2$. Массы нитей и блока пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Определите ускорение тел a и силы натяжения T_1 нити, перекинутой через блок, и T_2 нити, соединяющей тела.

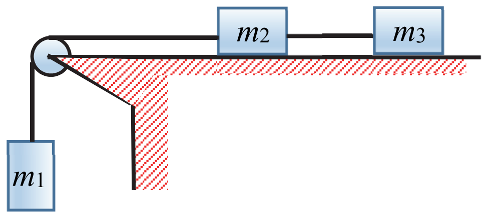


Рис. 3.11

3.37. Через блок перекинута нить, к одному концу которой прикреплен груз массой $m_1 = 20$ г, а другой конец соединен с пружиной, к концу которой прикреплен груз массой $m_2 = 60$ г. Массы блока, нити и пружины, а также трение в блоке пренебрежимо малы. Чему равна абсолютная деформация пружины при движении грузов, если коэффициент жесткости пружины $k = 6$ Н/м?

3.38. Два тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок, закрепленный на ребре призмы (рис. 3.12). Углы наклона граней призмы к горизонту $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 45°$, коэффициенты трения тел о грани $\mu_1 = 0{,}1$ и $\mu_2 = 0{,}05$ соответственно. Массы блока и нити, а также трение в блоке пренебрежимо малы. Определите ускорение тел и силу натяжения нити.

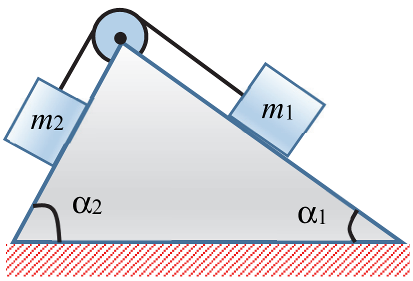


Рис. 3.12

3.39. Два тела массами $m_1 = m_2 = 150$ г подвешены на концах нити, перекинутой через легкий, вращающийся без трения, неподвижный блок. На одно из тел положили груз массой $m = 50$ г. С какой силой груз будет действовать на тело, на котором он лежит, когда вся система придет в движение?

3.40. Легкий блок подвешен к потолку кабины лифта. Через блок перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 2{,}5$ кг. Определите, с какой силой блок действует на

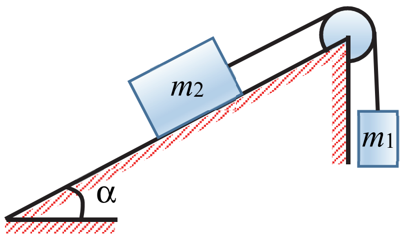


Рис. 3.13

потолок кабины, если лифт начинает подниматься с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2. Массами блока и нити, а также трением в блоке пренебречь.

3.41. В установке (рис. 3.13) угол наклонной плоскости к горизонту $\alpha = 30°$, массы тел $m_1 = 0{,}25$ кг, $m_2 = 1$ кг. Коэффициент трения скольжения тела массой m_2 о плоскость $\mu = 0{,}15$. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Система пришла в движение из состояния покоя. Определите направление движения тела массой m_1 и его ускорение.

3.42. Через легкий вращающийся без трения неподвижный блок перекинута нить, к одному из концов которой прикреплен стержень массой $M = 100$ г и длиной $l = 30$ см. По другой свисающей части нити скользит с трением шайба массой $m = 20$ г. В начальный момент времени шайба расположена напротив нижнего конца стержня (рис. 3.14). После начала движения стержень и шайба движутся с постоянными ускорениями. С какой силой трения нить действует на шайбу, если за время $\Delta t = 1{,}2$ с после начала движения она оказалась напротив верхнего конца стержня? Чему равны ускорения шайбы и стержня?

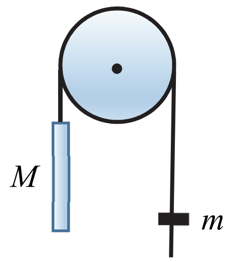


Рис. 3.14

3.43. Тело падает в воздухе с достаточно большой высоты. Считая, что сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости движения тела, определите ускорение тела в момент времени, когда скорость тела в $\eta = 3$ раза меньше скорости его установившегося движения.

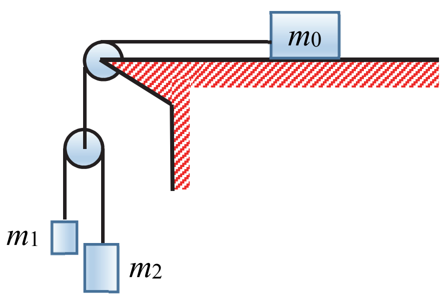


Рис. 3.15

3.44. В установке (рис. 3.15) $m_0 = 2$ кг, $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг. Трение в блоках и между телом с горизонтальной поверхностью отсутствует, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найдите ускорения грузов.

3.45. Легкий блок подвешен с помощью пружины к потолку. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг. Определите величину деформации пружины при движении грузов, если под действием силы F = 5 Н пружина удлиняется на Δl_0 = 2,5 см.

3.46. В установке (рис. 3.16) масса тела *2* в η = 1,2 раза больше массы тела *1*, угол наклона наклонной плоскости к горизонту α = = 60°. Массы блоков и нитей, а также трение в блоке и между первым телом с плоскостью пренебрежимо малы. Вычислите ускорение второго тела.

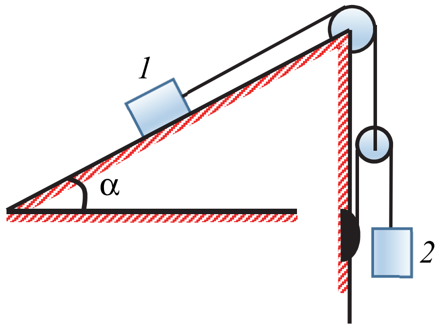


Рис. 3.16

3.47. К концам перекинутой через блок нити прикреплены грузы массами m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,52 кг. Массы блока и нитей, а также трение в блоке пренебрежимо малы. В начальный момент времени центры масс тел расположены на одном уровне и их скорости равны нулю. Найдите расстояние между грузами за промежуток времени Δt = 2 с после начала их движения. Чему равна сила натяжения нити?

3.48. В установке (рис. 3.17) масса тела *1* в η = 2,5 раза больше массы тела *2*. Высота h = 0,5 м. Трения нет, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Определите максимальную скорость, которую достигнет тело *2*, а также максимальную высоту, на которую оно поднимется.

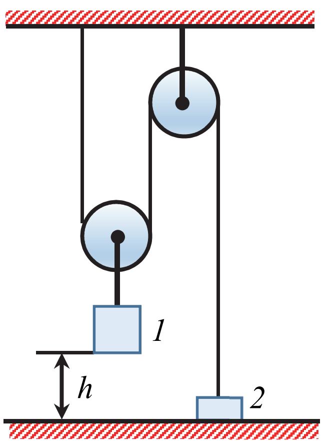


Рис. 3.17

3.49. Самолет, двигаясь с постоянной скоростью υ = 320 км/ч, делает «мертвую петлю» радиусом R = 300 м. Чему равен вес летчика массой m = 75 кг в верхней, нижней и средней точках петли?

3.50. Трос при подъеме груза с некоторым ускорением выдерживает максимальную массу m_1 = 410 кг, а при опускании груза с таким же по модулю ускорением массу m_2 = = 780 кг. Вычислите максимальную массу груза, которую можно поднять этим тросом с постоянной скоростью.

3.51. Две пружины с коэффициентами упругости k_1 = 200 Н/м и k_2 = 600 Н/м соединяют один раз последовательно, другой раз – параллельно. Определите жесткость системы пружин при этих соединениях.

3.52. Груз, подвешенный на резиновом шнуре длиной $l = 58$ см, вращают в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что шнур описывает коническую поверхность с углом при вершине $\alpha = 120°$. Найдите абсолютную деформацию шнура, если период его обращения $T = 1{,}1$ с.

3.53. Тонкий однородный стальной стержень длиной $l = 0{,}5$ м растягивают с силой $F = 1$ кН, которая равномерно распределена по торцу стержня. Определите изменение объема стержня. Для стали модуль Юнга $E = 200$ ГПа и коэффициент Пуассона $\mu_п = 0{,}25$.

3.54. Какую силу надо приложить к алюминиевому стержню диаметром $d = 1$ см, чтобы при повышении температуры на $\Delta t = 10°C$ его длина не изменилась? Для алюминия коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1} и модуль Юнга $E = 70$ ГПа.

3.55. Алюминиевый стержень длиной $l = 3$ м подвесили за один конец к потолку. Определите абсолютное удлинение стержня под действием его собственного веса. При какой длине l стержень разорвется под действием собственного веса? Для алюминия плотность $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, модуль Юнга $E = 70$ ГПа, предел прочности на разрыв $\sigma_{пр} = 0{,}08$ ГПа.

3.56. Однородный стержень из свинца длиной $l = 1$ м движется поступательно по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $F_0 = 2$ Н, направленной вдоль поверхности и равномерно распределенной по торцу стержня. Площадь торца $S = 1$ см^2, модуль Юнга свинца $E = 16$ ГПа. Чему равна абсолютная деформация бруска в направлении действия данной силы?

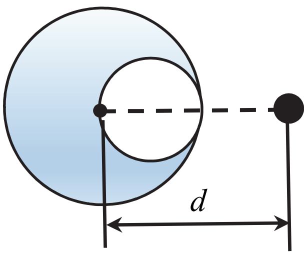


Рис. 3.18

3.57. Расстояние между центрами Земли и Луны $r = 60R_з$, где $R_з = 6400$ км – радиус Земли, а отношение их масс составляет $\eta = m_з / m_л = 81$. Определите положение точки, в которой силы притяжения тела Землей и Луной уравновешиваются.

3.58. Как изменится сила гравитационного взаимодействия между однородным шаром радиусом R и небольшим телом, расположенным на расстоянии $d = 3R / 2$ от центра шара, если в шаре появится сферическая полость (рис. 3.18), поверхность которой касается поверхности шара и проходит через его центр? Центр полости лежит на линии, соединяющей центр шара и тело.

3.59. Период обращения Юпитера вокруг Солнца $T_{ю}$ = 12 лет. Во сколько раз расстояние от Юпитера до Солнца превышает расстояние от Земли до Солнца? Орбиты движения планет вокруг Солнца считать круговыми.

3.60. Скорость спутника Земли, вращающегося по круговой орбите, υ = 7 км/с. На какой высоте находится спутник над поверхностью Земли? Радиус Земли $R_{з}$ = 6400 км.

3.61. Скорость спутника, движущегося по круговой орбите вокруг планеты, υ = 5 км/с. Высота спутника над поверхностью планеты h = 5000 км. Определите ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты, если ее радиус R = 5000 км.

3.62. Во сколько раз период обращения спутника Земли, вращающегося по круговой орбите на высоте, равной радиусу Земли, больше периода обращения спутника, расположенного на околоземной орбите?

§ 4. Динамика вращательного движения твердого тела

Основные формулы и законы

1. Момент силы:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (4.1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$.

2. Модуль момента силы:

$$M = Fh, \qquad (4.2)$$

где $h = r\sin\alpha$ – плечо силы (кратчайшее расстояние от начала отсчета до линии действия силы); α – угол между радиус-вектором точки приложения силы и вектором силы.

3. Момент инерции твердого тела относительно оси *z*:

$$I_z = \int\limits_V \rho r^2 dV, \qquad (4.3)$$

где ρ – плотность тела; r – расстояние от элемента объема dV тела до оси z.

4. Момент инерции системы тел относительно оси *z* (свойство аддитивности):

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{iz}, \tag{4.4}$$

где I_{iz} – момент инерции тела, входящего в систему, относительно оси z.

5. Теорема Штейнера:

$$I_z = I_{Cz'} + md^2, \tag{4.5}$$

где I_z – момент инерции тела относительно произвольной оси z; $I_{Cz'}$ – момент инерции тела относительно оси z', проходящей через центр масс C тела параллельно оси; m – масса тела; d – расстояние между осями.

6. Момент инерции материальной точки:

$$I_z = mr^2, \tag{4.6}$$

где m – масса точки; r – расстояние от точки до оси z.

7. Момент инерции однородного тонкого кольца относительно оси *z*, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости:

$$I_z = mR^2, \tag{4.7}$$

где m – масса кольца; R – радиус кольца.

8. Момент инерции однородного цилиндра (диска) относительно оси *z*, совпадающей с его осью симметрии:

$$I_z = \frac{mR^2}{2}, \tag{4.8}$$

где m – масса цилиндра (диска); R – радиус цилиндра (диска).

9. Момент инерции однородного стержня относительно оси *z*, проходящей через центр масс стержня перпендикулярно ему:

$$I_z = \frac{ml^2}{12}, \tag{4.9}$$

где m – масса стержня; l – длина стержня.

10. Момент инерции однородного шара относительно оси *z*, совпадающей с его осью симметрии:

$$I_z = \frac{2}{5}mR^2, \tag{4.10}$$

где m – масса шара; R – радиус шара.

11. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения z (основной закон динамики вращательного движения):

$$I_z \varepsilon = M_z, \tag{4.11}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела; M_z – результирующий момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси z.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана тонкая однородная пластина массой m = 4 кг, имеющая форму прямоугольного треугольника с длинами катетов a = 0,3 м и b = 0,6 м. Определите следующие моменты инерции пластины: 1) I_x и I_y – относительно осей, совпадающих с катетами треугольника; 2) I_z – относительно оси, которая проходит через вершину прямого угла перпендикулярно плоскости пластины. Установите связь между найденными моментами инерции.

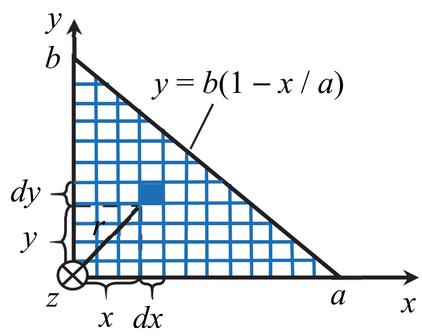


Рис. 4.1

Решение. Воспользуемся формулой (4.3) для момента инерции твердого тела. Разобьем площадь треугольника на элементарные (бесконечно малые) площадки прямоугольной формы, как показано на рис. 4.1.

Каждая элементарная площадка занимает объем

$$dV = dSd = dxdyd, \tag{4.12}$$

где $dS = dxdy$ – площадь площадки; d – толщина пластины.

Тогда момент инерции пластины относительно оси x

$$I_x = \int_S \rho y^2 dxdyd, \tag{4.13}$$

где принято во внимание, что в формуле (4.3) расстояние от оси x до площадки $r = y$.

Интегрирование в (4.13) проводится по площади треугольника. При этом переменная x изменяется от 0 до a, а переменная y при каждом значении x от 0 до $y = b(1 - x / a)$.

Учитывая, что пластина однородная (ρ = const), выполним интегрирование в (4.13)

$$I_x = \rho d \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} y^2 dy = \rho d \int_0^a \frac{b^3 (1-x/a)^3}{3} dx =$$

$$= \rho d \frac{b^3}{3}(-a) \frac{(1-x/a)^4}{4} \Bigg|_0^a = \rho d \frac{ab^3}{12}. \qquad (4.14)$$

Примем во внимание, что масса пластины

$$m = \rho V = \rho S d = \rho \frac{ab}{2} d, \qquad (4.15)$$

где $V = Sd$ – объем пластины; $S = ab / 2$ – ее площадь.

Тогда

$$I_x = \frac{mb^2}{6}. \qquad (4.16)$$

Момент инерции пластины относительно оси y

$$I_y = \int_S \rho x^2 dx dy d, \qquad (4.17)$$

где принято во внимание, что в формуле (4.3) расстояние от оси y до площадки $r = x$.

Интегрирование в (4.17) производится по площади пластины, поэтому пределы интегрирования такие же, как в интеграле (4.14). Выполним интегрирование

$$I_y = \rho d \int_0^a x^2 dx \int_0^{b(1-x/a)} dy = \rho d \int_0^a x^2 b \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx =$$

$$= \rho d b \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{a}\frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^a = \rho d b \frac{a^3}{12}. \qquad (4.18)$$

Приняв во внимание формулу (4.15) для массы пластины, получим

$$I_y = \frac{ma^2}{6}. \qquad (4.19)$$

Момент инерции пластины относительно оси z, проходящей через вершину прямого угла перпендикулярно плоскости пластины (см. рис. 4.1 на с. 55), найдем по формуле (4.3) с учетом, что квадрат расстояния от оси z до элементарной площадки $r^2 = x^2 + y^2$. Тогда

$$I_z = \int_S \rho(x^2 + y^2)dxdyd = \int_S \rho x^2 dxdyd + \int_S \rho y^2 dxdyd. \qquad (4.20)$$

Учитывая (4.13) и (4.17) в (4.20), установим связь между моментами инерции

$$I_z = I_y + I_x. \qquad (4.21)$$

Подставив (4.16) и (4.19) в (4.21), получим

$$I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{6}. \qquad (4.22)$$

Выполним вычисления по формулам (4.16), (4.19) и (4.21)

$$I_x = \frac{4 \cdot 0,6^2}{6} = 0,24 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \qquad (4.23)$$

$$I_y = \frac{4 \cdot 0,3^2}{6} = 0,06 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \qquad (4.24)$$

$$I_z = 0,06 + 0,24 = 0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \qquad (4.25)$$

Заметим, что формула (4.21) справедлива для плоской пластины произвольной формы, где x, y, z – три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку, причем оси x и y лежат в плоскости пластины.

Пример 2. Однородный диск радиусом $R = 10$ см, имеющий угловую скорость относительно оси симметрии $\omega_0 = 8$ рад/с, осторожно положили плоскостью на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения скольжения диска о плоскость $\mu = 0,01$. Определите угловое ускорение диска, время и число оборотов до остановки.

Решение. Угловое ускорение найдем из уравнения динамики (4.11), описывающего вращение диска,

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z}, \qquad (4.26)$$

где момент инерции диска I_z относительно оси вращения дается формулой (4.8)

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{4.27}$$

Определим суммарный момент сил M_z, действующих на диск. Моменты силы тяжести и реакции опоры равны нулю, так как их плечи относительно оси вращения равны нулю. Как следствие, результирующий момент силы, который действует на диск, равен результирующему моменту сил трения, которые действуют на него. Моменты сил трения, действующие на точки диска и находящиеся на разном расстоянии от его центра, различны из-за разных плеч сил трения в этих точках. Поэтому разделим плоскость диска, которая соприкасается с поверхностью, на узкие кольцевые участки толщиной dr (рис. 4.2). Радиус r кольцевых зон изменяется от 0 до R.

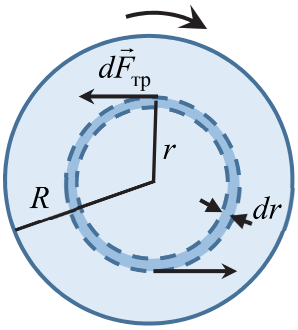


Рис. 4.2

Момент силы трения $d\vec{F}_{тр}$, который действует на кольцевой участок, определим по формуле (4.2) с учетом того, что плечо силы $h = r$,

$$dM = dF_{тр} r. \tag{4.28}$$

Сила трения (см. формулу (3.7)), действующая на кольцевой участок,

$$dF_{тр} = \mu dN = \mu dmg, \tag{4.29}$$

где учтено, что сила реакции поверхности, действующая на участок, равна силе тяжести.

Масса кольцевого участка

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r dr b, \tag{4.30}$$

где ρ – плотность материала диска; dV – объем диска; b – толщина диска.

Подставив (4.30) в (4.29), а затем в (4.28), получим

$$dM = \rho \cdot 2\pi b \mu g r^2 dr. \tag{4.31}$$

Выполнив интегрирование (4.31) по всевозможным значениям r, найдем результирующий момент сил, действующий на диск,

$$M = \int dM = \rho \cdot 2\pi b \mu g \int_0^R r^2 dr \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2}{3} \rho \pi b \mu g R^3. \tag{4.32}$$

Учтем в (4.32), что масса диска $m = \rho V = \rho\pi R^2 b$,

$$M = \frac{2}{3} m\mu g R. \tag{4.33}$$

Подставив (4.27) и (4.33) с учетом, что $M = M_z$, в (4.26), определим угловое ускорение диска

$$\varepsilon = \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}. \tag{4.34}$$

Поскольку угловое ускорение не зависит от времени, то движение является равнозамедленным. Время до остановки найдем из равенства угловой скорости нулю

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}. \tag{4.35}$$

Число оборотов до остановки следует из формулы для угла поворота φ при этом типе вращения

$$\varphi = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}. \tag{4.36}$$

Проверим единицы измерения величин, получаемых по формулам (4.34)–(4.36)

$$[\varepsilon] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}, \quad [t] = \frac{\text{м}\cdot\text{рад}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{м}} = \text{с}, \quad [N] = \frac{\text{м}\cdot\text{рад}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = 1. \tag{4.37}$$

Выполним вычисления

$$\varepsilon = \frac{4}{3}\cdot\frac{0{,}01\cdot 9{,}8}{0{,}1} \approx 1{,}3 \text{ рад/с}^2, \tag{4.38}$$

$$t = \frac{3\cdot 0{,}1\cdot 8}{4\cdot 0{,}01\cdot 9{,}8} \approx 6 \text{ с}, \tag{4.39}$$

$$N = \frac{3\cdot 0{,}1\cdot 8^2}{16\cdot 3{,}14\cdot 0{,}01\cdot 9{,}8} \approx 4. \tag{4.40}$$

Задачи

4.1. К точке твердого тела, имеющей радиус-вектор $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}$, где $x_1 = 0{,}25$ м, приложена сила $\vec{F}_1 = F_1\vec{j}$, где $F_1 = 4$ Н, а к точке с радиус-вектором $\vec{r}_2 = y_2\vec{j}$, где $y_2 = 0{,}15$ м, – сила $\vec{F}_2 = F_2\vec{i}$, где $F_2 = 3$ Н.

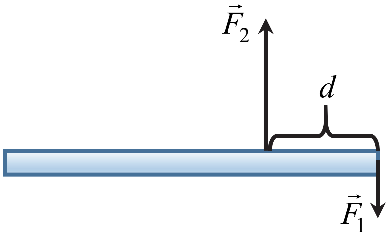


Рис. 4.3

Определите момент равнодействующей силы, действующий на тело, и ее плечо относительно начала координат.

4.2. На тонкий однородный стержень массой $m = 2$ кг и длиной $l = 1$ м действуют две силы (рис. 4.3). Сила, которая приложена к концу стержня, $F_1 = 2$ Н. Определите величину силы F_2 и расстояние между точками приложения сил d такие, чтобы стержень двигался поступательно с ускорением $a = 1$ м/с^2.

4.3. К точке твердого тела, имеющей радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где $x = 1$ м, $y = 0{,}5$ м, приложена сила $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$, где $F_x = 6$ Н, $F_y = 8$ Н. Определите момент и плечо силы относительно начала координат.

4.4. К тонкой квадратной рамке приложены три силы, как показано на рис. 4.4. Модули сил $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = \sqrt{2}F$, где $F = 2$ Н. Определите модуль, направление и точку приложения результирующей силы, если она лежит на стороне BC рамки.

4.5. Однородный цилиндр массой $m = 5$ кг под действием силы F движется по горизонтальной поверхности (рис. 4.5). Коэффициент трения скольжения цилиндра о поверхность $\mu = 0{,}1$. Найдите силу F и угол α, под которым она должна быть направлена к горизонту, чтобы цилиндр двигался поступательно с ускорением $a = 0{,}65$ м/с^2.

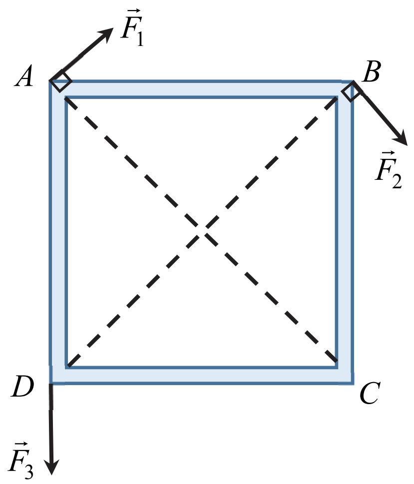


Рис. 4.4

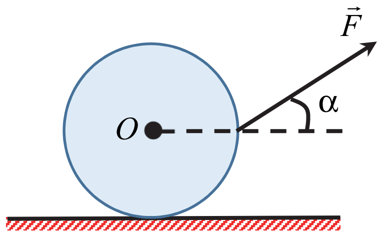


Рис. 4.5

4.6. Определите момент инерции тонкого однородного стержня массой $m = 0{,}5$ кг и длиной $l = 0{,}3$ м относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Результат сравните с моментом инерции стержня (см. формулу (4.9)) относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Относительно какой оси стержень легче привести во вращательное движение?

4.7. Дана тонкая прямоугольная однородная пластина массой m = 0,6 кг со сторонами a = 10 см и b = 8 см. Определите моменты инерции пластины: 1) I_1 и I_2 – относительно осей, совпадающих с одной и с другой стороной пластины; 2) I_3 – относительно оси, проходящей через одну из вершин пластины перпендикулярно ее плоскости. Найдите связь между вычисленными моментами инерции.

4.8. Дано тонкое однородное проволочное кольцо массой m = 2 кг и радиусом R = 0,5 м. Определите моменты инерции кольца: 1) I_1 – относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости; 2) I_2 – относительно оси, совпадающей с его диаметром. Установите связь между вычисленными моментами инерции.

4.9. Определите моменты инерции тонкого однородного диска массой m = 1 кг и радиусом R = 0,2 м: 1) I_1 – относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости; 2) I_2 – относительно оси, совпадающей с его диаметром.

4.10. Определите момент инерции однородного сплошного конуса массой m = 1,5 кг и радиусом основания R = 10 см относительно оси его симметрии.

4.11. Дан сплошной однородный конус массой m = 1 кг с радиусом основания R = 20 см и высотой h = 30 см. Определите момент инерции конуса относительно оси, проходящей через его вершину параллельно основанию.

4.12. Дан однородный диск массой m = 3 кг и радиусом R = 0,4 м, имеющий круглое отверстие (рис. 4.6). Определите момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O.

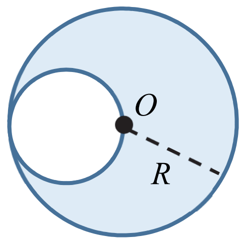


Рис. 4.6

4.13. Однородный шар массой m = 4 кг и радиусом R = 10 см имеет полость сферической формы радиусом $r = R / 1{,}5$, центр которой совпадает с центром шара. Определите момент инерции такого шара относительно оси, проходящей через его центр.

4.14. Дан толстостенный однородный цилиндр (труба) массой m = 4 кг, внутренним радиусом R_1 = 30 см и внешним радиусом R_2 = 40 см. Определите момент инерции цилиндра относительно оси его симметрии.

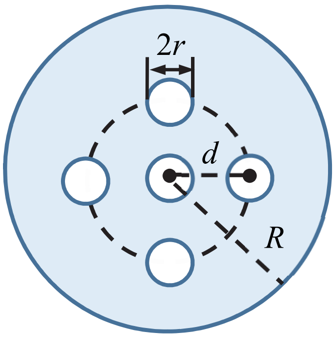


Рис. 4.7

4.15. Однородный диск массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 23$ см имеет пять одинаковых отверстий (рис. 4.7). Радиусы отверстий $r = R / 5$, расстояние от центра диска до центра отверстий $d = R / 2$. Определите момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс диска перпендикулярно его плоскости.

4.16. Два тела массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 =$ $= 0{,}4$ кг закреплены на концах однородного стержня массой $m = 1$ кг и длиной $l = 0{,}8$ м. Считая тела материальными точками, определите момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс системы перпендикулярно стержню.

4.17. Колесо радиусом $R = 35$ см имеет восемь спиц (рис. 4.8). Обод колеса представляет собой тонкое однородное кольцо массой $m_о = 1{,}5$ кг, а спица – тонкий однородный стержень массой $m_с = 0{,}06$ кг и длиной, равной радиусу колеса. Определите момент инерции колеса относительно оси, перпендикулярной плоскости колеса и проходящей через его центр масс.

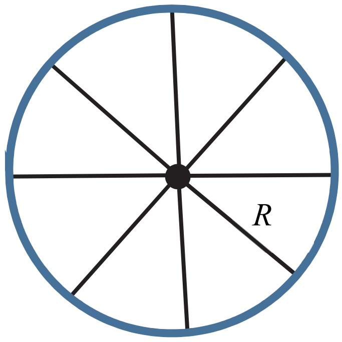


Рис. 4.8

4.18. Горизонтально расположенный тонкий однородный стержень массой $m = 1{,}5$ кг и длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. В начальный момент времени $t = 0$ на противоположный конец стержня начала действовать сила $F = 2$ Н, которая действует в горизонтальной плоскости и все время перпендикулярна первоначальному положению стержня. Чему равна угловая скорость стержня в момент времени, когда угол поворота стержня из начального положения $\varphi = 30°$?

4.19. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного диска массой $m = 11$ кг перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 1$ кг. Определите ускорения грузов и силы натяжения нити.

4.20. На вращающийся без трения блок в виде однородного сплошного диска массой $M = 10$ кг намотана нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0{,}1$ кг. Определите путь, который пройдет груз за время $\Delta t = 2$ с после начала движения в момент времени $t = 0$.

4.21. Два тела массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой m = 10 кг и радиусом R = 0,1 м, закрепленный на краю горизонтальной поверхности (рис. 4.9). Коэффициент трения скольжения тела m_1 о плоскость $\mu = 0{,}4$. Считая блок однородным диском, найдите угловое ускорение блока и силы натяжения нити.

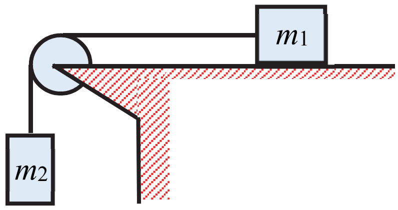


Рис. 4.9

4.22. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω_0 = 4 рад/с, начинает тормозить под действием момента силы, модуль которого относительно оси вращения пропорционален квадратному корню угловой скорости тела $M = \alpha\sqrt{\omega}$, где $\alpha = 0{,}1$ Н · м · с$^{1/2}$. Определите время вращения и число оборотов тела до остановки, если момент инерции тела относительно оси вращения I_z = 1,5 кг · м^2.

4.23. Однородный диск радиусом R = 25 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска, под действием силы F = 4 Н, приложенной по касательной к ободу диска. На диск действует момент сил трения $M_{тр}$ = 0,25 Н · м. Чему равна масса диска, если его угловое ускорение ε = 2 рад/с^2?

4.24. Однородный стержень длиной l = 0,6 м и массой m = 8 кг под действием силы F начинает вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через конец стержня. Сила приложена к середине стержня и лежит в плоскости вращения, оставаясь все время перпендикулярной стержню, а ее модуль зависит от времени по закону $F = \alpha t$, где α = 0,3 Н/с. На какой угол повернется стержень за промежуток времени, в течение которого стержень приобретет угловую скорость ω = 3 рад/с? Трением пренебречь.

4.25. Маховик радиусом R = 0,4 м и массой m = 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно его плоскости, под действием касательной к ободу маховика силы F = = 3 Н. Угол поворота маховика зависит от времени по закону $\varphi = \alpha t^2$, где α = 0,5 рад/с^2. Найдите момент сил трения, действующий на маховик. Считать, что масса маховика равномерно распределена по его ободу.

4.26. К ободу маховика радиусом R = 0,1 м и массой m = 10 кг, способному вращаться относительно оси, проходящей через центр масс маховика перпендикулярно его плоскости, приложена касательная

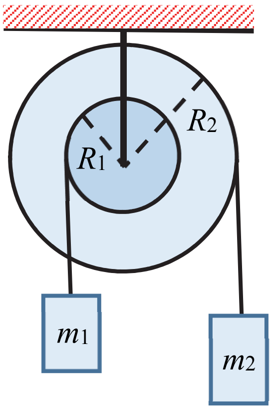


Рис. 4.10

сила F = 1,57 Н. Определите промежуток времени после начала действия силы, в течение которого маховик приобретет частоту вращения ν = 2 Гц. На какой угол повернется маховик за это время? Маховик считать однородным диском, трением пренебречь.

4.27. На двухступенчатый блок намотаны в противоположных направлениях две нити, к концам которых подвешены грузы с массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$, где m = 0,5 кг (рис. 4.10). Момент инерции блока относительно оси вращения I_z = 2 кг · м^2, радиусы ступеней $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$, где R = 10 см. Массы нитей и трение в блоках пренебрежимо малы. Определите угловое ускорение блока.

4.28. Концы нитей, намотанных на ось радиусом r = 5 мм диска маятника Максвелла, прикреплены к горизонтальной штанге (рис. 4.11). Масса диска с осью m = 0,8 кг, их момент инерции относительно их оси симметрии I_z = 0,7 · 10^{-3} кг · м^2. С каким ускорением необходимо поднимать штангу вверх, чтобы при раскручивании диска он оставался на одной и той же высоте? Чему при этом равна сила натяжения нитей?

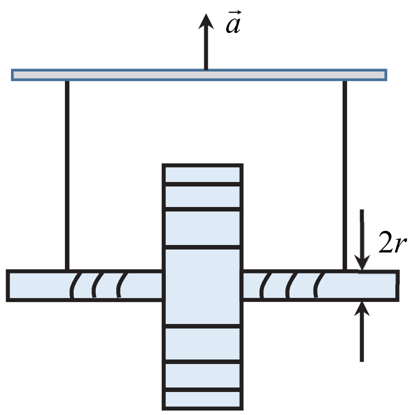


Рис. 4.11

4.29. На неподвижный блок радиусом R = 30 см намотана нить, к свисающему концу которой привязан груз массой m = 0,4 кг. Момент инерции блока относительно оси вращения I_z = 0,3 кг · м^2, трение в блоке отсутствует. За какое время груз пройдет путь s = 1,5 м от начала вращения блока?

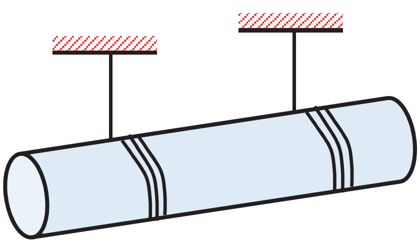


Рис. 4.12

4.30. Однородный цилиндр массой m = 3 кг и радиусом R = 5 см, подвешенный горизонтально на двух нитях, намотанных на него (рис. 4.12), начинает опускаться под действием силы тяжести. Определите угловое ускорение цилиндра и силу натяжения нитей.

4.31. Однородный цилиндр радиусом R = = 10 см раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 = 10 рад/с и затем поместили в угол (рис. 4.13). Коэффициент трения скольжения цилиндра о стенки угла μ = 0,01. Определите угловое ускорение цилиндра и число оборотов цилиндра до остановки.

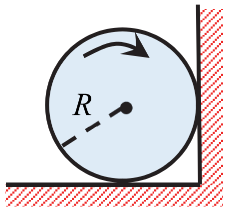


Рис. 4.13

4.32. Однородный цилиндр катится без скольжения вверх по наклонной плоскости с углом наклона α = 15° к горизонту. Начальная скорость цилиндра, направленная вдоль наклонной плоскости, υ_0 = 5 м/с. Определите путь, пройденный цилиндром до остановки, и время подъема.

4.33. Маховик массой m = 12 кг и радиусом R = 0,25 м, вращающийся с угловой скоростью ω_0 = 6 рад/с, тормозится с помощью ручного тормоза AB (рис. 4.14). Сила, с которой давят на конец ручки тормоза, зависит от времени по закону $F = \alpha t$, где α = 0,1 Н/с, а точка соприкосновения C тормоза с маховиком делит ручку тормоза пополам. Коэффициент трения скольжения между тормозом и маховиком μ = 0,2. Считая маховик однородным диском, определите промежуток времени, через который маховик остановится.

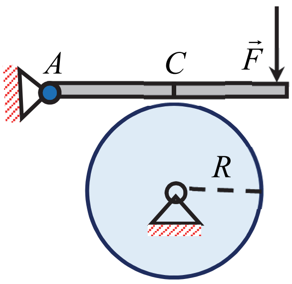


Рис. 4.14

4.34. Однородный шар скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом наклона α = 30° к горизонту. Начальная скорость шара равна нулю. Чему равна скорость его центра масс через промежуток времени Δt = 2 с после начала движения?

4.35. К шкиву креста Обербека (рис. 4.15) прикреплена нерастяжимая нить, к концу которой подвешен груз массой M = 0,5 кг. На кресте укреплены четыре груза массой m = 50 г каждый на расстоянии R = 15 см от его оси, радиус шкива r = 2 см. Определите угловое ускорение креста и силу натяжения нити при опускании груза. Трением и моментом инерции креста и шкива по сравнению с моментом инерции грузов пренебречь.

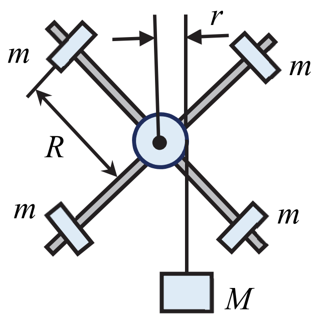


Рис. 4.15

4.36. На обод маховика радиусом R = 15 см намотана нить, к концу которой привязан груз массой m = 0,2 кг. Вращаясь равноускоренно из состояния покоя, маховик за время Δt = = 2,5 с приобрел угловую скорость ω = 5 рад/с.

Найдите момент инерции маховика, если при раскручивании на него действует момент сил трения $M_{тр} = 0{,}085$ Н · м.

4.37. Через неподвижный блок радиусом $R = 10$ см перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 40$ г и $m_2 =$ $= 50$ г. Определите момент инерции блока, если он вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Трением пренебречь.

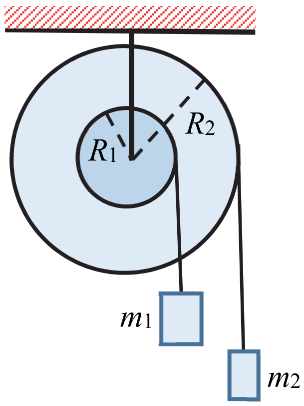


Рис. 4.16

4.38. На двухступенчатый блок намотаны в одном направлении две нити, к концам которых подвешены грузы массами $m_1 = 40$ г и $m_2 = 20$ г (рис. 4.16). Момент инерции блока относительно оси вращения $I_z = 9$ г · м^2, радиусы ступеней $R_1 = 5$ см и $R_2 = 15$ см. Массы нитей и трение в блоках пренебрежимо малы. Найдите угловое ускорение блока и ускорения, с которыми движутся грузы.

4.39. Однородный стержень массой $m = 4$ кг и длиной $l = 0{,}6$ м вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню, проходящей через стержень на расстоянии $d = l / 4$ от одного из его концов. Угол поворота стержня зависит от времени по закону $\varphi = \alpha t^2 +$ $+ \beta t^3$, где $\alpha = 0{,}2$ рад/с^2, $\beta = 0{,}05$ рад/с^3. Определите результирующий момент силы, действующий на стержень, в момент времени $t = 2$ с.

4.40. На доске массой $m_1 = 3$ кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности, находится однородный шар массой $m_2 = 7$ кг и радиусом $R = 6$ см. К доске приложили постоянную горизонтальную силу $F = 2$ Н. Определите ускорение доски и центра масс шара, если скольжение между ними отсутствует. Чему равно угловое ускорение шара?

§ 5. Импульс и момент импульса

Основные формулы и законы

1. Импульс материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \tag{5.1}$$

где m – масса тела; $\vec{\upsilon}$ – скорость тела.

2. Импульс системы материальных точек:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = m\vec{\upsilon}_c, \quad (5.2)$$

где $\vec{p}_i$ – импульс тела, входящего в систему; $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$ – масса системы; $\vec{\upsilon}_c$ – скорость центра масс системы.

3. Уравнение, определяющее изменение импульса системы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (5.3)$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

4. Закон сохранения импульса системы: *импульс замкнутой системы, когда* $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, *сохраняется*

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \text{const}. \quad (5.4)$$

5. Момент импульса материальной точки:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (5.5)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки.

6. Модуль момента импульса материальной точки:

$$L = rp\sin\alpha, \quad (5.6)$$

где α – угол между радиус-вектором и импульсом материальной точки.

7. Момент импульса системы материальных точек:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n, \quad (5.7)$$

где $\vec{L}_i$ – момент импульса материальной точки, входящей в систему.

8. Момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*, относительно оси вращения:

$$L_z = I_z\omega, \quad (5.8)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения.

9. Уравнение, определяющее изменение момента импульса системы (уравнение моментов):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}, \quad (5.9)$$

где $\vec{M}_{\text{внеш}}$ – результирующий момент внешних сил, действующих на систему.

10. Закон сохранения момента импульса системы: *момент импульса замкнутой системы, когда* $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$, *сохраняется*

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n = \text{const}. \quad (5.10)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Частица движется в плоскости xy под действием постоянной силы $\vec{F} = \beta\vec{i} + \gamma\vec{j}$, где $\beta = 0{,}6$ Н и $\gamma = 0{,}8$ Н. В начальный момент времени при $t = 0$ импульс частицы $\vec{p}_0 = \alpha\vec{i}$, где $\alpha = -5$ кг · м/с. Определите импульс частицы в момент времени, когда угол между вектором силы и импульсом частицы $\varphi = 90°$.

Решение. Из уравнения (5.3), определяющего изменение импульса системы, импульс материальной точки

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \int_0^t \vec{F}dt. \tag{5.11}$$

Подставив в (5.11) данные из условия и выполнив интегрирование, найдем соотношение для импульса материальной точки

$$\vec{p} = \alpha\vec{i} + \int_0^t (\beta\vec{i} + \gamma\vec{j})dt \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = (\alpha + \beta t)\vec{i} + \gamma t\vec{j}. \tag{5.12}$$

Определим момент времени, когда угол между вектором силы и импульсом частицы $\varphi = 90°$. В этом случае скалярное произведение силы и импульса равно нулю, т. е.

$$\vec{F}\vec{p} = F_x p_x + F_y p_y + F_z p_z = 0 \quad \Rightarrow \beta(\alpha + \beta t) + \gamma^2 t = 0. \tag{5.13}$$

Отсюда

$$t = -\frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \gamma^2} = -\frac{(-5)\cdot 0{,}6}{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = 3 \text{ с}. \tag{5.14}$$

Импульс (см. формулу (5.12)) в этот момент времени

$$\vec{p} = (\alpha + 3\beta)\vec{i} + 3\gamma\vec{j}. \tag{5.15}$$

Модуль импульса

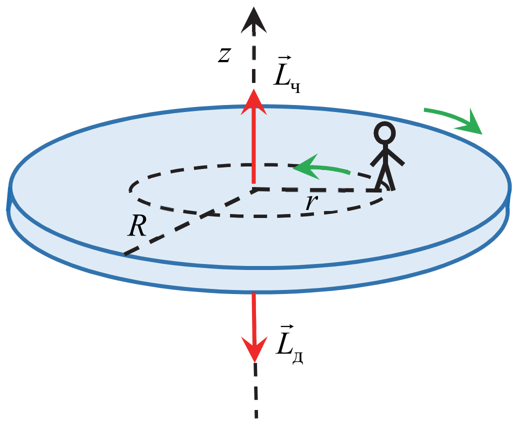
$$p = \sqrt{(\alpha + 3\beta)^2 + (3\gamma)^2}, \tag{5.16}$$

где размерности всех коэффициентов даны в системе СИ и размерность импульса очевидна.

Выполним вычисления

$$p = \sqrt{(-5 + 3\cdot 0{,}6)^2 + (3\cdot 0{,}8)^2} = 4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}. \tag{5.17}$$

Пример 2. На покоящемся однородном горизонтально расположенном диске массой $M = 128$ кг и радиусом $R = 1$ м находится человек массой m = 50 кг. Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент времени человек начал двигаться с постоянной скоростью по окружности радиусом r = 0,8 м вокруг оси диска. Человек останавливается, когда угол поворота диска относительно человека φ = 90°. Определите угол, на который повернется диск за время движения человека относительно Земли. Размерами человека по сравнению с радиусом диска пренебречь.



Рисунок

Решение. Система тел «человек – диск» является замкнутой относительно оси вращения, так как момент внешней силы (силы тяжести) относительно оси вращения равен нулю. Поэтому воспользуемся законом сохранения момента импульса (см. формулу (5.10)) в проекции на ось вращения

$$L_{1z} = L_{2z}, \tag{5.18}$$

где L_{1z} – момент импульса системы тел до начала движения человека; L_{2z} – момент импульса системы после начала движения человека.

До начала движения момент импульса системы равен нулю. После того как человек начнет движение, диск придет во вращательное движение в противоположную сторону движения человека (рисунок). Поэтому момент импульса системы (5.7) равен сумме моментов импульса человека и диска. Таким образом, в проекции на ось вращения

$$L_{1z} = 0, \quad L_{2z} = L_{чz} + L_{дz}. \tag{5.19}$$

Проекции моментов импульса тел на ось вращения определяются по формуле (5.8)

$$L_{чz} = I_{чz}\omega_ч, \quad L_{дz} = -I_{дz}\omega_д, \tag{5.20}$$

где $I_{чz}$, $I_{дz}$ – моменты инерции соответственно человека и диска; $\omega_ч$, $\omega_д$ – их угловые скорости.

Моменты инерции тел даются формулами (4.6) и (4.8)

$$I_{чz} = mr^2, \quad I_{дz} = \frac{MR^2}{2}. \tag{5.21}$$

Учитывая (5.19)–(5.21) в законе сохранения (5.18), найдем связь между угловыми скоростями тел

$$\omega_{ч} = \frac{MR^2}{2mr^2}\omega_{д}. \tag{5.22}$$

Используя (5.22), угол поворота диска за время Δt относительно человека

$$\varphi = (\omega_{ч} + \omega_{д})\Delta t = \frac{MR^2 + 2mr^2}{2mr^2}\varphi_{д}, \tag{5.23}$$

где $\varphi_{д} = \omega_{д}\Delta t$ – угол поворота диска относительно Земли.

Отсюда

$$\varphi_{д} = \frac{2mr^2}{MR^2 + 2mr^2}\varphi = \frac{2\cdot 50\cdot 0{,}8^2}{128\cdot 1^2 + 2\cdot 50\cdot 0{,}8^2}\cdot 90 = 30°. \tag{5.24}$$

Задачи

5.1. Частица движется в плоскости xy под действием силы, зависящей от времени по закону $\vec{F} = \beta t\vec{j}$, где $\beta = 0{,}2$ Н/с. В начальный момент времени при $t = 0$ импульс частицы $\vec{p}_0 = \alpha\vec{i}$, где $\alpha = 0{,}3$ кг · м/с. Чему равен импульс частицы в момент времени $t = 2$ с?

5.2. Частица движется в плоскости xy так, что ее импульс зависит от времени по закону $\vec{p} = \alpha t\vec{i} + \beta\vec{j}$, где $\alpha = 0{,}25$ кг · м/с^2 и $\beta = 1$ кг · м/с. Определите угол между направлением импульса частицы и силой, действующей на нее, в момент времени $t = 4$ с.

5.3. Импульс частицы, двигающейся в плоскости xy, зависит от времени по закону $\vec{p} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, где $\alpha = 3$ Н и $\beta = 2$ Н/с. Чему равна сила, действующая на частицу в момент времени $t = 1$ с?

5.4. В момент времени $t = 0$ частица имела импульс $\vec{p}_0 = \alpha\vec{i}$, где $\alpha = 6$ кг · м/с. На нее в течение промежутка времени $\tau = 4$ с действует сила, зависящая от времени по закону $\vec{F} = \beta t(1 - t/\tau)\vec{j}$, где $\beta = 3$ Н/с. Определите импульс частицы после окончания действия силы.

5.5. Импульс материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{p} = \alpha\vec{i} + t(\beta - \gamma t)\vec{j}$, где $\beta = 4$ Н и $\gamma = 2$ Н/с. Определите моменты времени, когда импульс точки перпендикулярен действующей на нее силе. Чему равна сила в эти моменты времени?

5.6. Материальная точка массой $m = 20$ г движется равноускоренно по окружности радиусом $R = 1$ м. Начальная скорость точки

υ_0 = 0,2 м/с, тангенциальное ускорение a_τ = 0,01 м/с^2. Определите изменение импульса материальной точки за промежуток времени, в течение которого материальная точка сделает: 1) пол-оборота по окружности; 2) один оборот.

5.7. Движущая частица распалась на две частицы с массами m_1 = = 2 мг, m_2 = 4 мг и скоростями υ_1 = 0,5 км/с и υ_2 = 1,5 км/с. Угол между направлениями скоростей образовавшихся частиц φ = 60°. Найдите скорость распавшейся частицы.

5.8. Небольшой шарик массой m = 50 г летит со скоростью υ_1 = = 5 м/с под углом α = 30° к горизонтальной плоскости. После неупругого удара он отскакивает от плоскости со скоростью υ_2 = 3 м/с под углом β = 60° к плоскости. Определите среднюю силу трения и среднюю силу реакции опоры, действующие во время удара, если время соударения Δt = 1 мс.

5.9. В результате абсолютно неупругого столкновения двух частиц образовалась составная частица. Скорости частиц до столкновения $\vec{\upsilon}_1 = 7\vec{i} - 12\vec{j}$ и $\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{i} - 7\vec{j}$, где компоненты скорости даны в системе СИ. Найдите скорость образовавшейся частицы, если массы сталкивающихся частиц связаны соотношением $m_2 = 1{,}5m_1$.

5.10. Снаряд, выпущенный из орудия со скоростью υ_0 = 80 м/с под углом α = 60° к горизонту, разорвался в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю непосредственно под точкой разрыва со скоростью υ_1 = 96 м/с. С какой скоростью на землю упал второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.11. Шайба массой m_1, скользившая по льду, столкнулась с покоившейся шайбой массой m_2. Двигаясь после столкновения под прямым углом к первоначальному направлению движения, шайба m_1 прошла до остановки путь s_1 = 2 м, а шайба m_2 – путь s_2 = 3,5 м. Определите скорость шайбы m_1 до столкновения, если коэффициент трения скольжения шайб о лед μ = 0,1, а масса шайбы m_2 в η = 1,7 раза больше массы шайбы m_1.

5.12. Два человека массой m = 65 кг каждый стоят на краю покоящейся тележки массой M = 150 кг. Найдите скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью u = 2 м/с относительно тележки: 1) одновременно; 2) друг за другом. Трением пренебречь.

5.13. Две одинаковые тележки массой M = 100 кг каждая движутся по инерции без трения навстречу друг другу по параллельным рельсам со скоростями υ_1 и υ_2. На каждой из тележек находится человек массой m = 60 кг. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек в направлении, перпендикулярном движению тележек. В результате первая тележка остановилась, а скорость второй тележки стала υ = 0,8 м/с. Определите первоначальные скорости υ_1 и υ_2 тележек.

5.14. Две одинаковые тележки массой M = 120 кг движутся по инерции без трения друг за другом с одной и той же скоростью υ_0 = 2 м/с. На задней тележке находится человек массой m = 60 кг. В некоторый момент человек прыгает в переднюю тележку со скоростью u = 1,5 м/с относительно своей тележки. Чему равны скорости тележек после прыжка человека?

5.15. На краю плота массой M = 210 кг и шириной l = 4 м, неподвижно стоящего на поверхности озера, находится человек массой m = 70 кг. Определите расстояние, на которое переместится плот относительно дна, если человек перейдет на другой край плота. Чему равно перемещение человека относительно дна? Сопротивлением воды пренебречь.

5.16. Вагонетка массой m_1 = 180 кг движется по рельсам без трения со скоростью υ_1 = 4 м/с. С вагонетки соскакивает человек массой m_2 = 60 кг под углом α = 30° к направлению ее движения в горизонтальной плоскости. Найдите скорость человека в момент прыжка относительно земли, если скорость вагонетки уменьшилась до υ_2 = 3,5 м/с.

5.17. Снаряд разорвался в верхней точке траектории на два осколка. Один из осколков, масса которого составляет η = 30% от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью υ_1 = 26,3 м/с. Определите расстояние между осколками после падения их на землю, если снаряд выпущен из орудия со скоростью υ_0 = 100 м/с под углом α = 45° к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.18. В результате столкновения двух тел, двигающихся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями υ_1 = 2 м/с и υ_2 = 4 м/с, первое тело останавливается. Чему равна скорость второго тела после столкновения, если его масса m_2 в η = 1,5 раза меньше массы первого тела m_1?

5.19. Тело массой m_1 = 0,1 кг, движущееся со скоростью υ_1 = 3 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с телом массой m_2 = 0,2 кг. Определите скорость тел после столкновения в трех случаях: 1) второе тело двигалось со скоростью $\upsilon_2 = 1{,}8$ м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела; 2) второе тело двигалось со скоростью $\upsilon_2 = 1{,}8$ м/с в том же направлении, что и первое тело; 3) второе тело покоилось.

5.20. Катер отплывает от берега со скоростью $\upsilon_1 = 1{,}5$ м/с, направленной под углом $\alpha = 30°$ к линии берега. На катер перпендикулярно берегу прыгает человек с горизонтальной составляющей скорости $\upsilon_2 = 2$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воды, определите скорость катера с человеком и направление его движения относительно берега, если масса катера M в $\eta = 3$ раза больше массы m человека.

5.21. На носу лодки длиной $L = 2{,}5$ м стоит человек, держа на высоте $h = 1{,}5$ м груз массой $m = 5$ кг. Масса лодки вместе с человеком $M = 80$ кг. С какой скоростью человек должен горизонтально бросить груз вдоль лодки, чтобы он попал на ее корму? Сопротивление воды движению лодки не учитывать.

5.22. Однородный стержень массой $m = 1$ кг и длиной $l = 60$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 1{,}5$ рад/с вокруг неподвижной оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно ему. Определите: 1) импульс стержня; 2) момент импульса стержня относительно оси вращения.

5.23. Момент импульса материальной точки относительно точки O зависит от времени по закону $\vec{L} = \alpha\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, где $\alpha = 6$ кг · м²/с и $\beta = 1{,}5$ кг · м²/с³. Определите действующий на материальную точку момент $\vec{M}$ силы относительно точки O, когда угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{M}$ станет равным $\varphi = 45°$. Чему равен момент импульса в этот момент времени?

5.24. Небольшое тело массой $m = 60$ г бросили под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Определите зависимость момента импульса тела от времени относительно точки бросания. Чему равен момент импульса тела в верхней точке траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.25. Небольшой шарик массой $m = 20$ г, подвешенный на нити длиной $l = 0{,}5$ м в точке O, вращается по горизонтальной окружности с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}5$ рад/с. Определите модуль приращения момента импульса шарика относительно точки O за половину оборота. Относительно какой точки момент импульса шарика остается постоянным?

5.26. Горизонтальный однородный диск радиусом R и массой $M = 180$ кг вращается свободно относительно оси симметрии с частотой $\nu_1 = 5$ об/мин. На расстоянии $r = R / 2$ от центра диска стоит человек массой $m = 60$ кг. Определите частоту вращения диска после того, как человек перейдет на его край. Размерами человека по сравнению с радиусом диска пренебречь.

5.27. На покоящемся однородном горизонтальном диске массой $M = 100$ кг и радиусом $R = 2$ м находится человек массой $m = 50$ кг. Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент времени человек начал двигаться по окружности радиусом $r = R / 2$ вокруг оси со скоростью $\upsilon = 1{,}5$ м/с относительно диска. С какой угловой скоростью будет вращаться диск? Размерами человека по сравнению с радиусом диска пренебречь.

5.28. Вертикально расположенный однородный тонкий стержень массой $m = 0{,}1$ кг и длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню. Пластилиновый шарик массой $m_0 = 5$ г, летящий горизонтально со скоростью $\upsilon = 6{,}4$ м/с перпендикулярно оси, попадает в стержень и прилипает к нему. Определите угловую скорость, с которой начнет вращаться стержень, если расстояние от места попадания шарика на стержне до оси $d = 20$ см.

5.29. Горизонтально расположенный однородный тонкий стержень длиной $l = 1$ м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. В другой конец стержня попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $\upsilon = 15$ м/с перпендикулярно стержню. В течение какого промежутка времени будет вращаться стержень, если на него во время вращения действует момент сил трения $M_{тр} = 5$ мН · м?

5.30. Тонкий однородный стержень массой $m = 0{,}3$ кг и длиной $l = 80$ см, расположенный горизонтально, вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 1{,}5$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Симметрично оси вращения на расстоянии $d = 20$ см от нее на стержне расположены два небольших груза массой $m_0 = 50$ г каждый. Найдите угловую скорость вращения стержня, если под действием внутренних сил грузы переместятся на концы стержня.

5.31. Однородный диск массой $M = 0{,}4$ кг и радиусом $R = 20$ см может свободно вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через его образующую. В боковую поверхность диска попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г и застревает в нем. Диск вместе с пулей начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = 1{,}5$ рад/с. Определите первоначальную скорость пули, если она направлена вдоль диаметра диска.

5.32. Тонкий однородный стержень массой M свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец. Из этого конца стержня вдоль него начинает скользить небольшая муфта массой m. Во сколько раз изменится угловая скорость вращения стержня после того, как муфта достигнет противоположного конца стержня, если масса стержня больше массы муфты в $\eta = 9$ раз?

5.33. На неподвижный массивный блок радиусом $R = 20$ см намотана нерастяжимая нить, к свисающему концу которой привязан груз массой $m = 0{,}1$ кг. В момент времени $t = 0$ груз отпустили, и система пришла в движение. Определите момент импульса системы относительно оси блока в момент времени $t = 2$ с. Массой нити и трением в блоке пренебречь.

§ 6. Работа силы. Мощность. Механическая энергия

Основные формулы и законы

1. Элементарная (бесконечно малая) работа силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F ds \cos\alpha = F_s ds, \qquad (6.1)$$

где ds – пройденный путь; α – угол между векторами силы и перемещения; $F_s = F\cos\alpha$ – проекция силы на перемещение.

2. Работа силы при перемещении из положения *1* в *2*:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds. \qquad (6.2)$$

3. Работа постоянной силы при движении по прямой:

$$A = Fs\cos\alpha, \qquad (6.3)$$

где s – пройденный путь.

4. Работа силы при вращательном движении вокруг неподвижной оси на угол φ:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi, \tag{6.4}$$

где M_z – момент, действующий на тело силы относительно оси вращения.

5. Мощность силы:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}, \tag{6.5}$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость тела.

6. Мощность силы при вращательном движении:

$$P = M_z \omega, \tag{6.6}$$

где ω – угловая скорость тела.

7. Кинетическая энергия материальной точки:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{6.7}$$

8. Кинетическая энергия системы материальных точек:

$$K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n, \tag{6.8}$$

где K_i – кинетическая энергия материальной точки, входящей в систему.

9. Кинетическая энергия поступательного движения твердого тела:

$$K = \frac{m\upsilon_c^2}{2}, \tag{6.9}$$

где υ_c – скорость центра масс тела.

10. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$K = \frac{I_z\omega^2}{2}, \tag{6.10}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения.

11. Кинетическая энергия плоского движения твердого тела:

$$K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \tag{6.11}$$

где I_c – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

12. Теорема об изменении кинетической энергии:

$$K_2 - K_1 = A, \tag{6.12}$$

где A – работа всех сил, действующих на тело.

13. Связь силы с потенциальной энергией:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}. \tag{6.13}$$

14. Работа консервативных сил:

$$A = -\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{6.14}$$

где $\Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1$ – изменение потенциальной энергии.

15. Потенциальная энергия в поле силы тяжести:

$$\Pi = mgh, \tag{6.15}$$

где h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой.

16. Потенциальная энергия упругой силы:

$$\Pi = \frac{k\Delta l^2}{2}, \tag{6.16}$$

где k – жесткость тела; Δl – абсолютная величина упругой деформации.

17. Потенциальная энергия в поле гравитационной силы:

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{6.17}$$

где G – гравитационная постоянная; m_1, m_2 – массы двух материальных точек, находящихся на расстоянии r друг от друга.

18. Полная механическая энергия:

$$E = K + \Pi. \tag{6.18}$$

19. Изменение полной механической энергии:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{с}}, \tag{6.19}$$

где $A_{\text{с}}$ – работа результирующей всех сторонних сил, т. е. сил, не учтенных в потенциальной энергии, а также неконсервативных сил.

20. Закон сохранения полной механической энергии: *если сторонние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы, то полная механическая энергия в стационарном поле консервативных сил сохраняется, т. е.*

$$E = K + \Pi = \text{const}. \tag{6.20}$$

21. Коэффициент восстановления скорости при неупругом столкновении:

$$k_\text{с} = \frac{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}{|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2|}, \tag{6.21}$$

где $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ и $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ – скорости тел до и после столкновения соответственно.

22. Коэффициент восстановления кинетической энергии при неупругом столкновении:

$$k_\text{э} = \frac{K'}{K}, \tag{6.22}$$

где K, K' – кинетические энергии системы тел до и после столкновения соответственно.

Примеры решения задач

Пример 1. Тело, лежащее на гладкой горизонтальной поверхности, пришло в движение под действием направленной вдоль поверхности силы, модуль которой зависит от пройденного телом пути по закону $F = F_0 + \alpha s$, где $F_0 = 10$ Н и $\alpha = 0{,}5$ Н/м. Определите кинетическую энергию тела в момент времени, когда оно пройдет путь $s = 6$ м от начала движения.

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии (см. формулу (6.12)). Поскольку тело начинает движение из состояния покоя, то $K_1 = 0$, а после прохождения пути s его кинетическая энергия $K_2 = K$. Тогда из (6.12) найдем

$$K = A, \tag{6.23}$$

где A – работа всех действующих на тело сил.

Так как поверхность гладкая, то силой трения, действующей на тело, можно пренебречь. Сила тяжести и реакция опоры действуют перпендикулярно перемещению тела, а поэтому работы не совершают. Следовательно, работа в (6.23) численно равна работе силы F, заданной в условии. Найдем ее, выполнив интегрирование в (6.2). Учитывая, что $F_s = F$,

$$A = \int_1^2 F_s ds = \int_0^s (F_0 + \alpha s) ds = F_0 s + \frac{\alpha s^2}{2}. \qquad (6.24)$$

Тогда

$$K = F_0 s + \frac{\alpha s^2}{2} = 10 \cdot 6 + \frac{0{,}5 \cdot 6^2}{2} = 69 \text{ Дж}. \qquad (6.25)$$

Пример 2. В установке (рис. 6.1) масса каждого груза $m = 0{,}4$ кг, коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu = 0{,}25$, коэффициент жесткости пружины $k = 60$ Н/м. Массы блока и пружины, а также трение в блоке пренебрежимо малы. Определите максимальную скорость брусков, если система пришла в движение при недеформированной пружине с нулевой начальной скоростью.

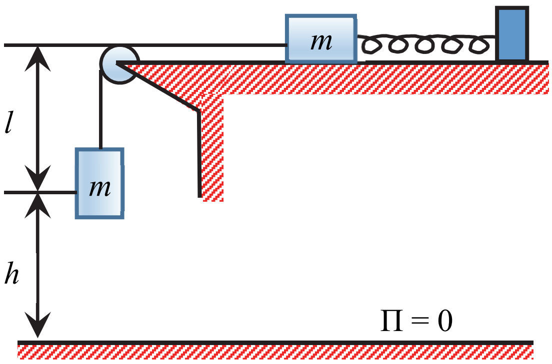


Рис. 6.1

Решение. Из-за наличия силы трения, которая действует на лежащий на столе груз, механическая энергия системы изменяется при движении грузов. Изменение полной механической энергии (см. формулу (6.19)) определяется работой силы трения

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}}, \qquad (6.26)$$

где E_1, E_2 – полные механические энергии (см. формулу (6.18)) системы до начала и во время движения соответственно.

До начала движения кинетическая энергия грузов равна нулю, а потенциальная равна потенциальной энергии в поле силы тяжести (см. формулу (6.15))

$$E_1 = mgh + mg(h + l). \qquad (6.27)$$

Поскольку скорости тел при движении равны, и учитывая, что при движении пружина растягивается на Δl,

$$E_2 = 2\frac{m\upsilon^2}{2} + mg(h - \Delta l) + mg(h + l) + \frac{k\Delta l^2}{2}. \qquad (6.28)$$

Работу силы трения при перемещении груза на Δl найдем по формуле (6.3) с учетом, что $\alpha = 180°$ и сила трения (см. формулу (3.7)) $F_{тр} = \mu mg$,

$$A_{тр} = -\mu mg\Delta l. \qquad (6.29)$$

Подставив (6.27)–(6.29) в (6.26), выразим скорость грузов в зависимости от величины деформации пружины

$$\upsilon = \sqrt{g\Delta l(1-\mu) - \frac{k}{2m}\Delta l^2}. \qquad (6.30)$$

Определим величину деформации пружины Δl, при которой скорость (см. формулу (6.30)) максимальна. Для этого исследуем подкоренное выражение в (6.30) на максимум. График зависимости подкоренного выражения от Δl представляет собой параболу, ветви которой опущены вниз. Максимум этой параболы приходится на

$$\Delta l = \frac{mg(1-\mu)}{k}. \qquad (6.31)$$

Подставив (6.31) в (6.30), найдем максимальную скорость грузов

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{m}{2k}}g(1-\mu). \qquad (6.32)$$

Проверим размерность скорости, получаемой по формуле (6.32)

$$[\upsilon_{max}] = \sqrt{\frac{кг \cdot м}{Н}\frac{м}{с^2}} = \sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot с^2}{кг \cdot м}\frac{м}{с^2}} = \frac{м}{с}. \qquad (6.33)$$

Выполним вычисление

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{0,4}{2 \cdot 60}} \cdot 9,8 \cdot (1 - 0,25) \approx 0,4 \text{ м/с}. \qquad (6.34)$$

Задачи

6.1. Материальная точка совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки A с координатами $x_A = 1$ м и $y_A = -2$ м в точку B с координатами $x_B = 4$ м и $y_B = 5$ м. При этом одной из сил, действовавших на нее, была постоянная сила $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$, где $F_x = 4$ Н и $F_y = -3$ Н. Найдите работу этой силы.

6.2. Частица, двигаясь в стационарном поле сил $\vec{F} = \alpha x\vec{i} + \beta y\vec{j}$, где $\alpha = 0{,}5$ Н/м и $\beta = 1$ Н/м, совершила перемещение из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ в точку с радиус-вектором $\vec{r}_2 = 3\vec{i} - 9\vec{j}$, где радиус-векторы заданы в СИ. Определите работу, которую совершила сила. Является ли сила консервативной?

6.3. Действуя на тело массой $m = 5$ кг силой $\vec{F}$, его с постоянной скоростью втащили на холм (рис. 6.2). Сила в каждой точке склона направлена по касательной к траектории, высота холма $h = 3$ м, длина его основания $l = 5$ м, коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}4$. Чему равна работа силы $\vec{F}$?

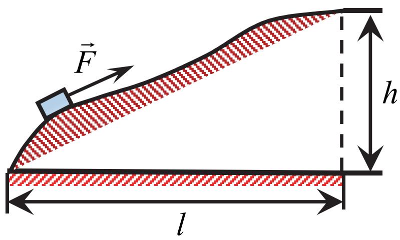


Рис. 6.2

6.4. К телу, лежащему на гладкой горизонтальной поверхности, приложили постоянную по модулю силу $F_0 = 2$ Н, которая в несколько раз меньше силы тяжести. В процессе движения тела по поверхности под действием этой силы угол φ между направлением силы и горизонтом изменяется в зависимости от пройденного телом пути s по закону $\varphi = ks$, где $k = \pi / 4$ м$^{-1}$. Определите работу, совершаемую силой, когда: 1) угол φ изменяется от 0 до $\pi / 2$; 2) угол φ изменяется от $\pi / 2$ до π; 3) угол φ изменяется от 0 до π.

6.5. На тело массой $m = 4{,}5$ кг, лежащее на поверхности земли, начинает действовать сила $\vec{F}$, которая зависит от высоты подъема y тела над поверхностью земли по закону $\vec{F} = 0{,}5(\alpha y - 3)m\vec{g}$, где $\alpha = 0{,}2$ м$^{-1}$. Найдите работу этой силы на первой трети пути подъема тела.

6.6. Даны две пружины с жесткостью $k_1 = 0{,}4$ кН/м и $k_2 = 0{,}6$ кН/м. Какую минимальную работу необходимо совершить для того, чтобы растянуть систему этих пружин, соединенных последовательно, на величину $\Delta l = 10$ см?

6.7. Санки массой $m = 3$ кг соскальзывают с горки, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 25°$, и, пройдя по горизонтальной поверхности расстояние $s = 19$ м, останавливаются. Начальная скорость санок равна нулю, коэффициент трения скольжения на всем пути $\mu = 0{,}1$. Определите работу, совершенную силами трения.

6.8. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется прямолинейно так, что модуль его скорости зависит от пройденного пути s по закону $\upsilon = \alpha\sqrt{s}$, где $\alpha = 2$ м^{0,5}/с. Найдите работу равнодействующей силы, действующей на тело, за промежуток времени $\Delta t = 25$ с после начала движения.

6.9. Нормальное ускорение материальной точки массой $m = 50$ г, движущейся по окружности радиусом $R = 50$ см, изменяется со временем по закону $a_n = \alpha t^2$, где $\alpha = 4$ м/с^4. Определите работу равнодействующей всех действующих на точку сил, совершенную к моменту времени $t = 10$ с после начала ее движения.

6.10. Тело вращается вокруг неподвижной оси z так, что зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = \alpha t^3$, где $\alpha = 0{,}1$ рад/с^3. При этом момент одной из сил, действующих на тело, относительно оси вращения зависит от времени по закону $M_z = \beta + \gamma t$, где $\beta = 2$ Н · м и $\gamma = 0{,}5$ Н · м/с. Чему равна работа этой силы за промежуток времени $\Delta t = 4$ с от начала вращения при $t = 0$?

6.11. Тело массой $m = 10$ г начинает скользить по поверхности шероховатой полусферы, если его положить на высоте $h_1 = 65$ см от горизонтального основания полусферы (рис. 6.3). Определите высоту h_2, на которой тело оторвется от сферы, если работа силы трения, действующей на тело при соскальзывании, $A_{тр} = -19{,}6$ мДж. Чему равна скорость тела в момент отрыва?

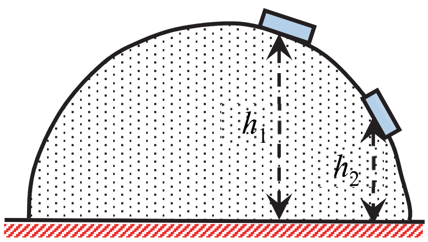


Рис. 6.3

6.12. Тело массой $m = 1$ т поднимают равноускоренно на высоту $h = 2$ м за время $\Delta t = 5$ с. Найдите работу внешней силы за время подъема. Чему равна мощность силы в момент времени $t = 5$ с?

6.13. Телу массой $m = 1$ кг, находящемуся на горизонтальной плоскости, в некоторый момент времени сообщили начальную скорость $\upsilon_0 = 10$ м/с. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость $\mu = 0{,}2$. Определите работу силы трения и ее среднюю мощность за время движения тела.

6.14. Материальная точка массой $m = 0{,}1$ кг движется вдоль оси x согласно уравнению $x = \alpha t + \beta t^2$, где $\alpha = 2$ м/с, $\beta = -0{,}5$ м/с^2. Определите работу равнодействующей силы, действующей на точку за промежуток времени $\Delta t = 5$ с от начала движения при $t = 0$, и мощность силы в момент времени $t = 5$ с.

6.15. Тело массой $m = 4$ кг бросили с начальной скоростью $\upsilon_0 = 5$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Чему равна мощность силы тяжести в моменты времени, когда тело достигает половину максимально возможной высоты подъема? Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.16. Телу массой $m = 2$ кг, находящемуся на горизонтальной плоскости, в некоторый момент времени сообщили начальную скорость $\upsilon_0 = 5$ м/с. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость зависит от пройденного пути s по закону $\mu = \alpha s$, где $\alpha = 0{,}02$ м$^{-1}$. Определите максимальную мощность силы трения.

6.17. Однородный диск радиусом $R = 20$ см и массой $m = 10$ кг начинает вращение вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно его плоскости. Угол поворота диска зависит от времени по закону $\varphi = \alpha t + \beta t^3$, где $\alpha = 1{,}5$ рад/с и $\beta = -0{,}02$ рад/с^3. Чему равна средняя мощность действующих на диск сил от начала движения при $t = 0$ до остановки?

6.18. Материальная точка массой $m = 25$ г начинает движение под действием силы, зависящей от времени по закону $\vec{F} = \alpha t\vec{i} + \beta\vec{j}$, где $\alpha = 0{,}2$ Н/с и $\beta = 0{,}5$ Н. Определите мощность, которую разовьет сила в момент времени $t = 4$ с.

6.19. Потенциальная энергия тела, находящегося в центральном силовом поле, зависит от расстояния r до центра поля по закону $\Pi = \alpha / r^2 - \beta / r$, где $\alpha = 50$ кДж · м^2 и $\beta = 4$ Дж · м. На каком расстоянии r_0 от центра поля тело будет находиться в равновесии? Выясните, устойчиво ли это положение.

6.20. Зависимость потенциальной энергии частицы, находящейся в центральном силовом поле, от расстояния r до центра поля имеет вид $\Pi = \alpha / r^2 - \beta / r$, где $\alpha = 4$ мкДж · м^2 и $\beta = 0{,}2$ мДж · м^2. Найдите расстояние от центра поля, на котором сила притяжения к центру максимальна. Чему равно значение максимальной силы притяжения, действующей на частицу?

6.21. Пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально, попадает в тело массой $M = 5$ кг, которое подвешено на тонкой проволоке длиной $l = 65$ см, и застревает в нем (рис. 6.4). В результате проволока с телом отклонилась на угол $\alpha = 20°$. Определите скорость пули перед попаданием ее в тело, а также долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию.

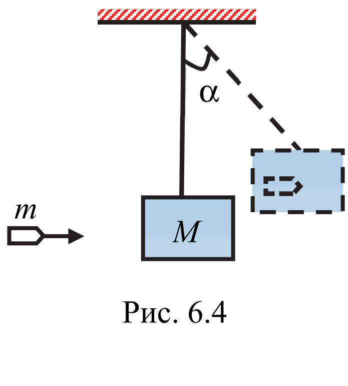


Рис. 6.4

6.22. Шарик массой $m = 20$ г подвешен на эластичной нити жесткостью $k = 90$ Н/м. Нить с шариком отвели в горизонтальное положение, не деформируя нити, и отпустили. При прохождении вертикального положения оказалось, что длина нити $l = 53$ см и скорость шарика $\upsilon = 2{,}5$ м/с. Найдите величину деформации нити при прохождении шариком вертикального положения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.23. Небольшой шарик, подвешенный на нити длиной $l = 40$ см, колеблется в вертикальной плоскости так, что его ускорение в крайнем положении равно по модулю ускорению в нижнем положении. Определите угол отклонения нити в крайнем положении и скорость шарика при прохождении нижнего положения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.24. Небольшая шайба начинает соскальзывать с вершины гладкой сферы радиусом $R = 0{,}5$ м. Чему равна скорость шайбы в момент отрыва ее от поверхности сферы?

6.25. Кинетическая энергия материальной точки, движущейся по окружности, зависит от пройденного пути s по закону $K = \alpha s$, где $\alpha = 10$ мН. Определите модуль действующей на точку силы в момент времени, когда она сделает половину оборота.

6.26. Вертикально расположенный однородный стержень массой $M = 3$ кг и длиной $l = 0{,}5$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. В нижний конец стержня попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 4$ г и застревает в нем. В результате стержень отклоняется на угол $\alpha = 30°$. С какой скоростью летела пуля?

6.27. Однородный цилиндр катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Его полная кинетическая энергия $K = 9$ Дж. Определите кинетическую энергию вращательного и поступательного движения цилиндра.

6.28. Однородный тонкий стержень длиной $l = 2$ м может свободно вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $\varphi = 60°$ и отпустили. Чему равна скорость нижнего конца стержня при прохождении положения равновесия?

6.29. На способный вращаться без трения блок в виде однородного сплошного диска массой $M = 8$ кг намотана нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0{,}2$ кг. Определите кинетическую энергию системы в момент времени $t = 5$ с после начала движения груза.

6.30. Телу на поверхности Земли сообщили скорость $\upsilon_0 = 5$ км/с, направленную вертикально вверх. На какую высоту поднимется тело? Радиус Земли $R_з = 6400$ км, сопротивлением воздуха пренебречь.

6.31. Тело соскальзывает с вершины горки высотой $H = 6$ м, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 6.5). Начальная скорость тела равна нулю. Пренебрегая трением, определите высоту трамплина h, при которой тело пролетит наибольшее расстояние s. Чему оно равно?

6.32. Установка (рис. 6.6) состоит из легкого гладкого горизонтального стержня, на который надет небольшой груз массой $m = 50$ г, соединенный с концом стержня легкой пружиной длиной $l_0 = 25$ см и жесткостью $k = 20$ Н/м. Стержень может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Какую работу необходимо совершить, чтобы раскрутить эту систему до угловой скорости $\omega = 4$ рад/с?

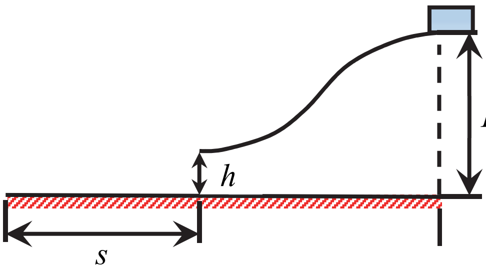


Рис. 6.5

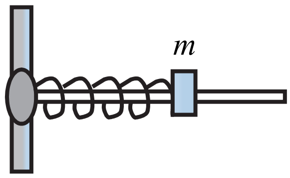


Рис. 6.6

6.33. На упругом шнуре длиной $l = 40$ см и жесткостью $k = 35$ Н/м, подвешенном за один из концов (рис. 6.7), имеется упор на другом конце шнура. По шнуру из точки подвеса начинает скользить без трения груз массой $m = 60$ г. Определите максимальное растяжение шнура. Массой шнура и упора пренебречь.

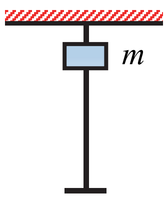


Рис. 6.7

6.34. Два автомобиля массами $m_1 = 2$ т и $m_2 = 8$ т движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями $\upsilon_1 = 90$ км/ч и $\upsilon_2 = 45$ км/ч. Определите изменение кинетической энергии системы машин при их абсолютно неупругом столкновении на перекрестке.

6.35. Шарик массой $m_1 = 25$ г, движущийся со скоростью $\upsilon_0 = 4$ м/с, после абсолютно упругого столкновения с первоначально покоившимся шариком массой m_2 отклонился на угол $\alpha = 120°$ от первоначального направления движения. При этом модуль его скорости стал $\upsilon = 1$ м/с. Считая систему замкнутой, найдите скорость, с которой начнет двигаться второй шарик, и его массу.

6.36. Два одинаковых небольших тела, образующих замкнутую систему, двигаются со скоростями $\upsilon_1 = 2$ м/с и $\upsilon_2 = 11$ м/с так, что угол между их скоростями движения $\alpha = 40°$. После абсолютно упругого столкновения скорости тел стали равны $u_1 = 10$ м/с и $u_2 = 5$ м/с. Чему равен угол между направлениями разлета тел?

6.37. В шар массой $m_1 = 40$ г, движущийся со скоростью $\upsilon_1 = 1$ м/с, ударяется другой шар массой $m_2 = 10$ г, двигавшийся в том же направлении со скоростью $\upsilon_2 = 1{,}5$ м/с. Считая удар абсолютно неупругим, определите скорость шаров и кинетическую энергию системы после удара.

6.38. Движущееся тело массой m_1 столкнулось абсолютно упруго с покоившимся телом массой $m_2 = 3m_1$. При этом первое тело отклонилось на угол $\alpha = 90°$ от первоначального направления движения. Считая систему тел замкнутой, определите, какую часть энергии потеряла при столкновении первое тело.

6.39. В результате абсолютно упругого центрального столкновения тела массой m_1 с покоившимся телом массой m_2 оба тела стали двигаться в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найдите отношение масс столкнувшихся частиц.

6.40. Два тела массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 100$ г подвешены на вертикальных нитях длиной $l = 1$ м так, что тела соприкасаются между собой. Тело массой m_1 отклонили на угол $\alpha = 40°$ и отпустили. На какую высоту поднимутся тела после абсолютно неупругого удара?

6.41. Два шара массами $m_1 = 150$ г и $m_2 = 350$ г движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 2$ м/с и $\upsilon_2 = 1$ м/с. Определите изменение внутренней энергии шаров при их абсолютно неупругом столкновении.

6.42. Шарик массой $m_1 = 30$ г столкнулся абсолютно упруго с неподвижным шариком массой m_2. В результате шарики разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения первого шарика, причем угол между их скоростями после столкновения составил $\alpha = 60°$. Чему равна масса второго шарика?

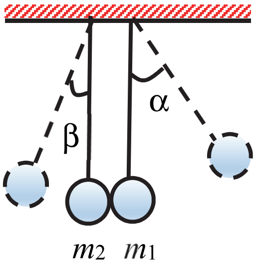


Рис. 6.8

6.43. Два шарика массами $m_1 = 0{,}10$ кг и $m_2 = 0{,}12$ кг подвешены на нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются между собой (рис. 6.8). Шарик массой m_1 отклонили на угол $\alpha = 8°$ и отпустили. В результате неупругого прямого центрального удара шарик массой m_2

отклонился на угол $\beta = 5{,}6°$. Определите коэффициенты восстановления скорости и кинетической энергии при соударении.

6.44. Движущееся тело массой m_1 столкнулось с неподвижным телом массой $m_2 = 5m_1$. В результате первое тело отклонилось на угол $\alpha_1 = 90°$ от первоначального направления движения, а второе тело стало двигаться под углом $\alpha_2 = 30°$ к этому направлению. Считая систему тел замкнутой, определите, на сколько процентов изменится кинетическая энергия системы после столкновения.

6.45. Два небольших тела массами m_1 и m_2 подвешены на вертикальных нитях длиной $l = 60$ см так, что тела соприкасаются друг с другом. Тело массой m_1 отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. На какую высоту поднимется второе тело после удара, если коэффициент восстановления скорости при ударе $k_c = 0{,}6$ и $m_2 / m_1 = 2{,}1$?

§ 7. Статика

Основные формулы и законы

Условия равновесия твердого тела:

а) *результирующая всех внешних сил, приложенных к телу, равна нулю*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0; \tag{7.1}$$

б) *суммарный момент внешних сил, действующих на тело, относительно любой точки равен нулю*

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = 0. \tag{7.2}$$

Примеры решения задач

Пример. Однородная балка длиной $L = 10$ м и массой $m = 750$ кг покоится на опорах (рис. 7.1). Расстояния от концов балки до опор $l_1 = 1{,}5$ м и $l_2 = 2{,}5$ м. Определите силы, с которыми балка действует на опоры.

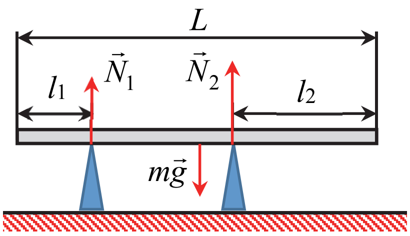


Рис. 7.1

Решение. Силы, с которыми балка действует на опоры, численно равны силам реакции опор N_1 и N_2, действующих на балку.

Кроме этих сил на балку действует сила тяжести, которая вследствие однородности балки приложена к ее центру.

Балка неподвижна, поэтому в соответствии с условием (7.1) сумма сил тяжести и сил реакции опор должна быть равна нулю

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0. \tag{7.3}$$

С учетом направления сил получим, что

$$mg = N_1 + N_2. \tag{7.4}$$

Поскольку вращение отсутствует, то результирующий момент всех действующих на балку сил относительно любой точки в соответствии с условием (7.2) также должен быть равен нулю. В частности, должен быть равен нулю результирующий момент сил относительно левой точки опоры, что дает

$$mg\left(\frac{L}{2} - l_1\right) - N_2(L - l_1 - l_2) = 0. \tag{7.5}$$

Решив совместно уравнения (7.4) и (7.5), найдем

$$N_2 = \frac{mg}{2}\frac{L - 2l_1}{L - (l_1 + l_2)}, \tag{7.6}$$

$$N_1 = mg - N_2 = \frac{mg}{2}\frac{L - 2l_2}{L - (l_1 + l_2)}. \tag{7.7}$$

Подставив численные значения, получим

$$N_2 = \frac{750 \cdot 9{,}8}{2}\frac{10 - 2 \cdot 1{,}5}{10 - (1{,}5 + 2{,}5)} \approx 4{,}3 \text{ кН}, \tag{7.8}$$

$$N_1 = 750 \cdot 9{,}8 - 4{,}3 \cdot 10^3 \approx 3{,}1 \text{ кН}. \tag{7.9}$$

Задачи

7.1. Шарик массой m = 50 г, подвешенный на нерастяжимой нити, медленно отвели в сторону, действуя на него горизонтальной силой F = 0,15 Н. Определите угол, на который отклонилась нить, а также силу натяжения нити в крайнем положении.

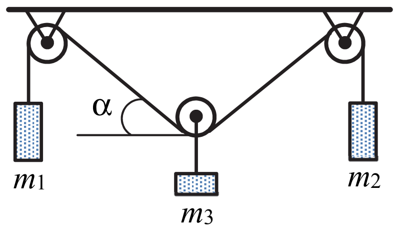


Рис. 7.2

7.2. Какую силу необходимо приложить для равномерного перемещения ящика массой m = 5 кг по горизонтальной поверхности, если коэффициент трения скольжения между ящиком и поверхностью μ = 0,1, а сила направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту?

7.3. Система, изображенная на рис. 7.2, находится в равновесии. Считая нить и блоки невесомыми, определите значение угла α, если массы грузов $m_1 = m_2$ = 2 кг, m_3 = 0,4 кг.

7.4. К двум пружинам одинаковой жесткости k = 500 Н/м, соединенным последовательно, подвешен груз массой m = 0,51 кг. Определите суммарное удлинение пружин Δx.

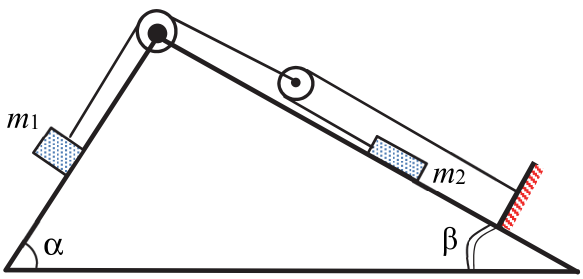


Рис. 7.3

7.5. На гранях закрепленной призмы в состоянии покоя находятся два груза массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг, соединенные друг с другом и неподвижной опорой невесомыми и нерастяжимыми нитями через систему невесомых блоков (рис. 7.3). Правая грань призмы гладкая, а левая – шероховатая. Найдите коэффициент трения тела *1* о грань призмы. Углы при основании призмы $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

7.6. Шарик массой m = 30 г и радиусом R = 1 см висит на нити длиной l = 10 см, верхний конец которой прикреплен к гладкой вертикальной стене. Определите силу натяжения нити и силу, с которой шар действует на стену.

7.7. Канат лежит на столе так, что один его конец свешивается со стола и начинает скользить, когда длина свешивающейся части составляет η = 30% от его общей длины. Чему равен коэффициент трения μ каната о стол?

7.8. Однородный стержень длиной L = 0,5 м и массой m = 2 кг подвешен на двух вертикальных тросах одинаковой длины, прикрепленных к концам стержня. К стержню подвешен груз массой

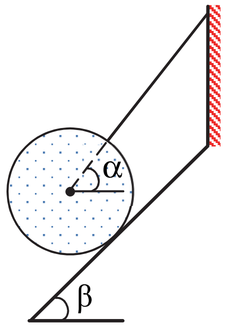


Рис. 7.4

m_0 = 1 кг на расстоянии l = 0,1 м от одного из его концов. Определите силы натяжения тросов.

7.9. Однородный цилиндр весом P = 600 Н удерживается нитью на гладкой наклонной плоскости (рис. 7.4), составляющей с горизонтом угол $\beta = 30°$, и действует на плоскость с силой N = 200 Н. Определите угол α и силу натяжения нити T.

7.10. На наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту стоит однородный цилиндр радиусом R и высотой H. При каком значении угла α цилиндр опрокинется? Каким должно быть минимальное значение коэффициента трения для этого?

7.11. На земле вплотную друг к другу лежат два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху между этими бревнами кладут еще одно такое же бревно. Найдите коэффициент трения μ между бревнами, при котором они не раскатятся. Скольжение бревен по земле отсутствует.

7.12. Однородный горизонтальный стержень массой m = 5 кг одним концом упирается в вертикальную стену. Другой его конец удерживается нитью, связывающей конец стержня и точку стенки. Определите силу натяжения нити, если угол между нитью и стержнем $\alpha = 60°$.

7.13. Стержень длиной L = 10 см состоит из двух частей одинаковой длины и площади поперечного сечения. Определите положение центра масс стержня, если одна из частей золотая, а вторая сделана из платины. Плотности золота и платины: $\rho_з$ = 19,3 г/см^3, $\rho_п$ = 21,5 г/см^3.

7.14. Два однородных шара массами m_1 = 1,5 кг и m_2 = 2,5 кг соединены однородным стержнем массой m = 2 кг и длиной l = 1 м. Определите положение центра масс системы, если радиусы шаров $R_1 = R_2$ = 4 см.

7.15. Пять кирпичей длиной l = 25 см кладут без раствора один на другой так, что каждый кирпич выступает над нижележащим. На какое наибольшее расстояние правый край самого верхнего кирпича может выступать над правым краем самого нижнего кирпича?

7.16. Невесомый горизонтально расположенный стержень находится на подвижной опоре, которая может перемещаться горизонтально. На стержень одеты две шайбы массами m_1 = 0,4 кг и m_2 = 1,2 кг, равномерно движущиеся навстречу друг другу со скоростями υ_1 = 0,2 м/с и υ_2 = 0,3 м/с. Определите скорость, с которой должна двигаться опора, чтобы стержень все время оставался в горизонтальном положении.

7.17. Какой минимальной силой можно опрокинуть через ребро куб массой m = 1 кг, находящийся на горизонтальной плоскости?

7.18. Цилиндрическая труба массой $m = 2$ т лежит на земле горизонтально. Какую силу F нужно приложить к одному из ее концов, чтобы оторвать его от земли?

7.19. Три одинаковых гладких однородных шара находятся в ящике со стенками AB и BC (рис. 7.5). Определите наибольший угол наклона α ящика, при котором верхний шар будет сохранять равновесие.

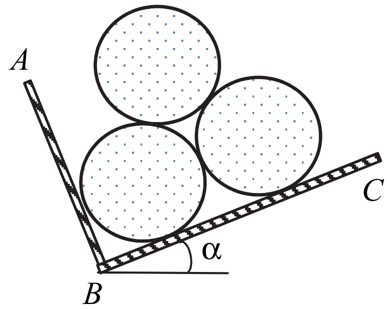


Рис. 7.5

7.20. Через блок радиусом $r = 8$ см переброшена тонкая нить, на концах которой закреплены два груза. Какое максимальное значение может иметь разница в массах грузов $\Delta m = |m_2 - m_1|$, чтобы система не пришла в движение, если известно, что момент силы трения, который действует на блок, равен $M_{\text{тр}} = 0{,}2$ Н · м?

7.21. Два одинаковых по массе груза закреплены на нити, переброшенной через неподвижный блок диаметром $d = 8$ см. Известно, что система приходит в движение, если разница длин нитей, расположенных по разные стороны блока, превышает $\Delta l = 10$ см. Определите максимальный момент сил трения, если известно, что масса одного метра нити равна $m_1 = 2$ г.

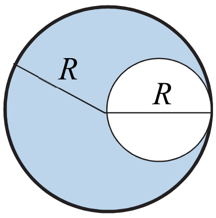


Рис. 7.6

7.22. В однородной тонкой пластине, имеющей форму круга радиусом R, вырезано круглое отверстие диаметром $d = R$ (рис. 7.6). На каком расстоянии x от центра пластины находится ее центр масс?

7.23. Лестница стоит наклонно, опираясь на гладкую вертикальную стену. Коэффициент трения скольжения между ножками лестницы и полом $\mu = 0{,}4$. Определите наибольший угол между лестницей и стеной, при котором лестница не скользит по полу. Центр тяжести лестницы расположен в ее середине.

7.24. К ободу однородного вертикально расположенного диска, ось вращения которого горизонтальна и проходит через его центр, прикрепили два точечных груза массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг. Расстояние между грузами равно радиусу диска. Чему равен угол α между горизонтом и прямой, соединяющей эти грузы, для случая, когда система находится в положении устойчивого равновесия?

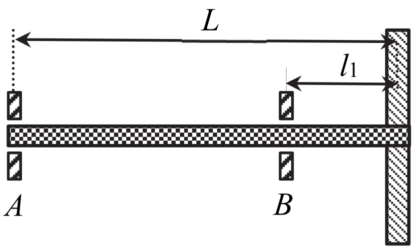


Рис. 7.7

7.25. Однородный цилиндр радиусом R = 5 см и массой m = 2 кг необходимо закатить на ступеньку высотой h = 2 см. Какую горизонтальную силу F требуется приложить к оси цилиндра для этого?

7.26. На конце вала массой m = 10 кг, вращающегося в подшипниках, закреплен массивный диск массой M = 30 кг (рис. 7.7). Длина вала L = 60 см, расстояние от подшипника B до диска l_1 = 10 см. Определите значение и направление сил давления на вал в подшипниках A и B.

7.27. Тонкий однородный стержень опирается одним ребром на гладкую горизонтальную поверхность, а другим – на шероховатую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 45°$ (рис. 7.8). Модуль силы тяжести, действующей на стержень, P = 10 Н. К одному концу стержня прикреплена невесомая нить, переброшенная через блок. К концу нити подвешен груз массой m. Определите максимальное значение коэффициента трения μ стержня о наклонную плоскость, если известно, что система приходит в движение, когда масса груза превышает 0,5 кг.

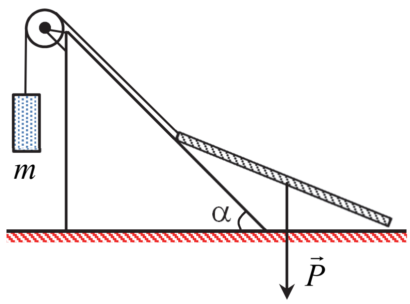


Рис. 7.8

7.28. Предельное значение угла бокового крена грузового автомобиля составляет α = 40°. На какой высоте находится центр масс автомобиля, если расстояние между колесами одной оси d = 2 м?

§ 8. Механические колебания

Основные формулы и законы

1. Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{8.1}$$

где x – смещение тела от положения равновесия; A – амплитуда; $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi / T_0$ – собственная циклическая частота; ν_0 –

частота; T_0 – период колебаний; $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний; φ – начальная фаза.

2. Полная механическая энергия тела, совершающего гармонические колебания:

$$E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const}. \qquad (8.2)$$

3. Периоды собственных колебаний пружинного, математического и физического маятников:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl_0}}, \qquad (8.3)$$

где m – масса колеблющегося тела; k – коэффициент жесткости пружины; l – длина математического маятника; I_z – момент инерции физического маятника относительно оси z колебаний; l_0 – расстояние от оси z до центра масс колеблющегося тела.

4. Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с равными частотами:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}, \qquad (8.4)$$

где A_1, A_2 и φ_1, φ_2 – соответственно амплитуды и начальные фазы складываемых колебаний.

5. Уравнение траектории тела, участвующего в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с равными частотами:

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2\Delta\varphi, \qquad (8.5)$$

где A_1, A_2 и $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – соответственно амплитуды и разность фаз складываемых колебаний.

6. Уравнение затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad (8.6)$$

где $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний; $\beta = \mu / 2m$ – коэффициент затухания; μ – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью (коэффициент сопротивления среды); ω – циклическая частота затухающих колебаний.

7. Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8.7}$$

8. Логарифмический декремент затухания:

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \tag{8.8}$$

9. Время релаксации:

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \tag{8.9}$$

10. Амплитуда *A* и начальная фаза φ вынужденных гармонических колебаний:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \mathrm{tg}\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{8.10}$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы; ω – циклическая частота вынуждающей силы.

11. Резонансная частота вынужденных гармонических колебаний:

$$\omega_{\mathrm{р}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{8.11}$$

12. Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e = \frac{\omega_{\mathrm{р}}}{\Delta\omega}, \tag{8.12}$$

где N_e – число колебаний за время релаксации; Δω – ширина резонансной кривой.

Примеры решения задач

Пример 1. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu_0 = 1$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 4$ см. Определите: 1) скорость точки в момент времени, когда смещение $x = 3$ см; 2) максимальную силу F_m, действующую на точку; 3) максимальные значения кинетической K_m и потенциальной энергий Π_m точки.

Решение. 1. Проекцию скорости точки на ось x, вдоль которой совершаются колебания, определим, продифференцировав формулу (8.1) по времени

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \qquad (8.13)$$

Приняв во внимание в (8.13) основное тригонометрическое тождество и уравнение (8.1), найдем

$$\upsilon_x = \pm\omega_0 A\sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \pm\omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}, \qquad (8.14)$$

где знак плюс соответствует движению точки в положительном направлении оси x, а знак минус – в противоположном направлении.

Учитывая, что $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ и модуль скорости $\upsilon = |\upsilon_x|$, выполним вычисления по формуле (8.14)

$$\upsilon = 2\pi\nu_0 \sqrt{A^2 - x^2} = 2\pi\sqrt{4^2 - 3^2} \approx 16{,}6 \text{ см/с}. \qquad (8.15)$$

2. Силу, действующую на точку, определим из второго закона Ньютона, который в проекции на ось x имеет вид

$$F_x = ma_x = m\frac{d\upsilon_x}{dt}. \qquad (8.16)$$

Продифференцировав скорость (см. формулу (8.13)) по времени и подставив результат в (8.16), получим

$$F_x = -m\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (8.17)$$

Из (8.17) следует, что сила максимальна в те моменты времени, когда косинус равен единице. Тогда максимальная сила определяется по формуле

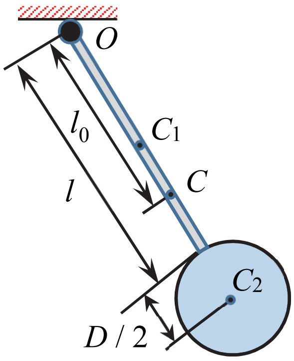
$$F_m = m\omega_0^2 A = 4\pi^2 m\nu_0^2 A. \qquad (8.18)$$

Подставив в (8.18) данные из условия, найдем

$$F_m = 4\pi^2 \cdot 0{,}01 \cdot 1^2 \cdot 0{,}04 \approx 16 \text{ мН}. \qquad (8.19)$$

3. Кинетическая энергия максимальна, когда потенциальная энергия равна нулю, и наоборот, потенциальная энергия максимальна, когда кинетическая энергия равна нулю. Используя закон сохранения полной механической энергии (см. формулу (8.2)), получим

$$K_m = \Pi_m = 2\pi^2 m\nu^2 A^2 = 2\pi^2 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}04^2 \approx 0{,}3 \text{ мДж}. \qquad (8.20)$$



Рисунок

Пример 2. Физический маятник выполнен в виде однородного стержня длиной l = = 1 м и массой m_1 = 0,6 кг с прикрепленным к одному из его концов однородным диском диаметром D = 20 см и массой m_2 = 0,3 кг (рисунок). Определите собственную частоту гармонических колебаний данного маятника.

Решение. Частоту колебаний вычислим, используя формулу (8.3) для периода физического маятника

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl_0}{I_z}}. \qquad (8.21)$$

Расстояние l_0 от оси z колебаний, проходящей через точку O, до центра масс маятника C найдем по формуле для радиус-вектора центра масс системы тел

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_{C_1} + m_2\vec{r}_{C_2}}{m_1 + m_2}, \qquad (8.22)$$

где $\vec{r}_{C_1}$, $\vec{r}_{C_2}$ – радиус-векторы центров масс стержня и диска соответственно.

Определяя центр масс системы относительно точки подвеса O и учитывая, что $r_C = l_0$, $r_{C_1} = l / 2$ и $r_{C_2} = l + D / 2$ из (8.22), найдем

$$l_0 = \frac{m_1 l / 2 + m_2(l + D / 2)}{m_1 + m_2} = \frac{0,6 \cdot 1 / 2 + 0,3 \cdot (1 + 0,2 / 2)}{0,6 + 0,3} = 0,7 \text{ м}. \qquad (8.23)$$

Момент инерции маятника определим, используя свойство аддитивности момента инерции,

$$I_z = I_{z1} + I_{z2}, \qquad (8.24)$$

где формулы для моментов инерции I_{z1} стержня и I_{z2} диска следуют из теоремы Штейнера

$$I_{z1} = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_1 l^2}{3}, \quad I_{z2} = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{D}{2}\right)^2 + m_2\left(l + \frac{D}{2}\right)^2. \qquad (8.25)$$

Выполним вычисление по формуле (8.24) с использованием (8.25)

$$I_{z1} = \frac{0,6 \cdot 1^2}{3} = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \qquad (8.26)$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot \left(\frac{0,2}{2}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{2}\right)^2 = 0,365 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \qquad (8.27)$$

$$I_z = 0,2 + 0,365 = 0,565 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \qquad (8.28)$$

Учитывая, что масса маятника $m = m_1 + m_2 = 0,9$ кг, рассчитаем частоту колебаний маятника по формуле (8.21)

$$\nu_0 = \frac{1}{2 \cdot 3,14}\sqrt{\frac{0,9 \cdot 9,8 \cdot 0,7}{0,565}} \approx 0,53 \text{ Гц}. \qquad (8.29)$$

Пример 3. Амплитуда колебаний тела уменьшилась в $n = 4,5$ раза после $N = 50$ колебаний. Определите логарифмический декремент затухания.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний зависит от времени по закону (см. формулу (8.6))

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (8.30)$$

где β – коэффициент затухания.

Согласно условию

$$n = \frac{A(t)}{A(t + NT)}, \qquad (8.31)$$

где T – период затухающих колебаний.

Подставив (8.30) в (8.31), получим

$$n = e^{N\beta T} = e^{N\delta}, \qquad (8.32)$$

где $\delta = \beta T$ – логарифмический декремент затухания.

Из (8.32) следует, что

$$\delta = \frac{1}{N}\ln n = \frac{1}{50}\ln 4,5 \approx 0,03. \qquad (8.33)$$

Задачи

8.1. Уравнение колебаний материальной точки имеет вид $x = A\cos\omega(t + \tau)$, где $A = 20$ см, $\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\tau = 0,25$ с. Определите период и начальную фазу колебаний. Чему равны смещение и скорость точки в момент времени $t = 2$ с?

8.2. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ с амплитудой $A = 1$ см и циклической частотой $\omega = 0,5$ с$^{-1}$. Найдите максимальные значения скорости и ускорения точки.

8.3. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Определите начальную фазу колебаний точки, амплитуда которых $A = 6$ см, если в начальный момент времени смещение точки от положения равновесия составляет: 1) $x_0 = -3$ см; 2) $x_0 = 3$ см.

8.4. Колебания материальной точки, совершающей гармонические колебания, заданы уравнением $x = A\sin\omega(t + \tau)$. Определите смещение по фазе скорости точки относительно ее смещения по координате.

8.5. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 1$ см, $\omega = 2$ с$^{-1}$, $\varphi = \pi / 6$ рад. Установите зависимость скорости и ускорения точки от времени. Постройте графики зависимости от времени: 1) смещения $x(t)$; 2) скорости $\upsilon(t)$; 3) ускорения $a(t)$.

8.6. Напишите уравнение гармонического колебательного движения, если максимальная скорость тела $\upsilon_{max} = 2$ см/с, период колебаний $T = \pi$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 5$ мм.

8.7. При смещении $x_1 = 1,89$ см от положения равновесия материальной точки, совершающей гармонические колебания, скорость точки $\upsilon_1 = 13,88$ см/с, а при смещении $x_2 = 4,17$ см ее скорость $\upsilon_2 = 8,26$ см/с. Вычислите амплитуду и циклическую частоту этого колебания.

8.8. При совершении гармонических колебаний точка отклоняется от положения равновесия в разные моменты времени на $x_1 = 1,6$ см и $x_2 = 3,2$ см. Определите отношение скоростей υ_1 / υ_2 и ускорений a_1 / a_2 точки в эти моменты времени, если амплитуда колебаний $A = 6,4$ см.

8.9. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\cos\omega t$, где $A = 5$ см, $\omega = 2$ с$^{-1}$. Найдите ускорение точки в момент времени, когда ее скорость $\upsilon = 8$ см/с.

8.10. Максимальная скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, $\upsilon_{max} = 5$ см/с, а максимальное ускорение $a_{max} = 50$ см/с^2. Определите циклическую частоту колебаний, период и амплитуду колебаний. Напишите уравнение колебаний, приняв начальную фазу, равной нулю.

8.11. Складываются два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами $A_1 = 10$ см и $A_2 = 6$ см. Амплитуда результирующего колебания $A = 14$ см. Чему равна разность фаз складываемых колебаний?

8.12. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми частотами получается результирующее колебание с теми же частотой и амплитудой. Определите разность фаз складываемых колебаний.

8.13. Постройте векторную диаграмму сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $x_1 = A_1\sin 2t$ и $x_2 = A_2\sin(2t + \pi / 3)$, где $A_1 = 2$ см и $A_2 = 3$ см. Вычислите начальную фазу и амплитуду результирующего колебания.

8.14. Напишите уравнение результирующего колебания, полученного в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой $\nu = 10$ Гц и с одинаковой начальной фазой $\varphi = \pi$. Амплитуды складываемых колебаний $A_1 = 0{,}08$ м и $A_2 = 0{,}06$ м.

8.15. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, описываемых уравнениями $x = A_1\sin\omega t$ и $y = A_2\cos\omega t$, где $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Определите уравнение траектории точки и постройте ее график. Укажите направление движения по этой траектории.

8.16. Смещение светящейся точки на экране осциллографа является результатом сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний, которые описываются уравнениями $x = A_1\cos\omega t$ и $y = A_2\cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см и $A_2 = 3$ см. Определите уравнение траектории точки на экране.

8.17. Складываются три гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = A_3 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi / 6$, $\varphi_3 = \pi / 3$. Найдите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Напишите его уравнение.

8.18. Два гармонических колебания, направленных вдоль одной прямой и имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание, амплитуда которого в $\eta = \sqrt{3}$ раз больше исходных. Чему равна разность фаз между исходными колебаниями?

8.19. Два камертона звучат одновременно. Частоты их колебаний $\nu_1 = 440$ Гц и $\nu_2 = 440{,}5$ Гц. Определите период биений.

8.20. Материальная точка совершает одновременно два взаимно перпендикулярных гармонических колебания $x = A\cos\omega t$ и $y = A\sin\omega t$

с амплитудой A = 1 см и частотой ν = 50 Гц. Найдите скорость υ, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точки.

8.21. Материальная точка массой m = 20 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A\cos\omega t$, где A = 5 см, ω = 10 с$^{-1}$. Чему равна сила, действующая на точку в положении наибольшего смещения от положения равновесия?

8.22. Колебания материальной точки массой m = 1 г происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где A = 5 см, ω = 20 с$^{-1}$. Определите максимальные значения возвращающей силы, потенциальной и кинетической энергии.

8.23. Грузик массой m = 100 г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом T = 0,2 с. Чему равна жесткость пружины?

8.24. Математический маятник длиной l = 1 м установлен в лифте. Найдите период колебаний маятника, если лифт: 1) поднимается с ускорением a = 2,5 м/с^2; 2) опускается с таким же ускорением.

8.25. Определите отношение частот колебаний маятника длиной l = 1 м, в котором небольшой груз массой m_1 = 50 г подвешен на невесомой нити, и маятника с таким же грузом, в котором нить заменяется тонким стержнем массой m = 90 г такой же длины.

8.26. Обруч, повешенный на гвоздь, который вбит горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R = 30 см. Найдите период колебаний обруча.

8.27. Во сколько раз изменится частота гармонических колебаний физического маятника на высоте h = 3200 км от поверхности Земли? Радиус Земли $R_з$ = 6400 км.

8.28. Маятник стационарных часов состоит из массивного диска радиусом R = 10 см, соединенного с осью тонким жестким стержнем с очень малой массой. Какой должна быть длина стержня, чтобы период колебаний такого маятника был равен T = 1 с? Плоскость диска лежит в плоскости колебаний.

8.29. Груз, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой A = 2 см. Определите полную энергию колебаний гири, если жесткость пружины k = 2 кН/м.

8.30. Однородный тонкий стержень длиной l = 36 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние a от центра масс стержня. При каком значении a период колебаний стержня имеет наименьшее значение?

8.31. Покажите, что при гармонических колебаниях выполняется закон сохранения механической энергии.

8.32. Тонкий прямой стержень совершает колебания относительно горизонтальной оси, проходящей через его конец. Определите силу максимального давления на ось, если масса стержня $m = 0{,}2$ кг.

8.33. Тело массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания вдоль оси x в силовом поле с потенциальной энергией $\Pi = \alpha x^2$. Найдите частоту и период таких колебаний, если $\alpha = 2$ Дж/м^2.

8.34. Тело массой $m_1 = 2$ кг, закрепленное на горизонтальной оси, совершало колебания с периодом $T_1 = 0{,}6$ с. Когда на эту ось был насажен диск так, что его ось совпала с осью колебаний тела, период колебаний стал $T_2 = 1{,}6$ с. Радиус диска $R = 10$ см, его масса $m_2 = 3$ кг. Определите момент инерции тела относительно данной оси.

8.35. Ареометр массой $m = 50$ г, имеющий трубку диаметром $d = 1$ см, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Чему равен период этих колебаний?

8.36. За время $t = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в $n = 7{,}39$ раза. Найдите коэффициент затухания.

8.37. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 4$ мин уменьшилась в 2 раза. За какое время t_2, отсчитываемое от начального момента, амплитуда уменьшится в $n = 4$ раза?

8.38. Амплитуда колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м за время $t = 10$ с уменьшилась в $n = 5$ раз. Определите логарифмический декремент затухания.

8.39. Логарифмический декремент колебаний маятника $\delta = 0{,}05$. Какое число полных колебаний должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в $n = 3$ раза?

8.40. Груз массой $m = 200$ г, подвешенный к спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент колебаний $\delta = 0{,}02$. Определите число полных колебаний, которые должен совершить груз, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в $n = 1{,}5$ раза. За какое время t произойдет это уменьшение?

8.41. Тело массой $m = 2$ г совершает затухающие колебания в некоторой среде. В течение времени $t_1 = 20$ с тело потеряло половину своей энергии. Чему равен коэффициент μ сопротивления среды?

8.42. Определите логарифмический декремент колебаний малого тела сферической формы, если период его колебаний в вакууме

$T_0 = 27{,}05$ мс, а в некоторой среде его период затухающих колебаний стал равен $T = 27{,}25$ мс.

8.43. Спустя $N = 10$ полных колебаний энергия системы уменьшилась в $n = 2$ раза. Определите добротность этой системы.

8.44. При каких значениях добротности Q колебательной системы колебания в ней не возникнут?

8.45. Добротность колебательной системы $Q = 31{,}4$. Какая часть энергии системы рассеивается за один период колебаний?

8.46. Маятник, период колебаний которого составляет $T = 0{,}36$ с, совершает затухающие колебания. Через какое время энергия колебаний маятника уменьшится на $k = 30\%$? Логарифмический декремент затухания $\delta = 0{,}03$.

8.47. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t_1 = 30$ с уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t_2 = 2$ мин?

8.48. Под действием силы тяжести электродвигателя консольная балка, на которой он установлен, прогнулась на $\beta = 0{,}3$ мм. При какой частоте вращения якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса?

8.49. Железнодорожная платформа массой $m = 8$ т имеет четыре рессоры. Жесткость пружин каждой рессоры $k = 400$ кН/м. При какой скорости платформа начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина рельса $l = 12{,}6$ м, а расстояние между центрами колес платформы вдвое меньше?

8.50. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 10{,}2$ кГц. Определите частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_р = 9{,}98$ кГц.

8.51. На сколько резонансная частота отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы с коэффициентом затухания $\beta = 400$ с$^{-1}$?

8.52. Чему равно отношение резонансной амплитуды $A_р$ к амплитуде A_0, соответствующей собственной частоте колебаний системы $\nu_0 = 250$ Гц? Коэффициент затухания $\beta = 1200$ с$^{-1}$.

8.53. Определите логарифмический декремент затухания колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 10$ Гц.

8.54. Пружинный маятник с небольшим грузом массой m совершает вынужденные колебания с изменяющейся частотой в вязкой среде. Чему равен коэффициент μ сопротивления среды, если резонансная амплитуда $A_р$ в n раз больше статического растяжения A_0 пружины, жесткость которой k?

8.55. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $\mu = 0{,}5$ г/с. Считая затухание малым, определите амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_р = 2$ мм и частота собственных колебаний $\nu_0 = 400$ Гц.

8.56. Амплитуды вынужденных гармонических колебаний на частотах $\nu_1 = 3$ кГц и $\nu_2 = 6$ кГц равны между собой. Найдите резонансную частоту $\nu_р$. Затуханием пренебречь.

8.57. Резонансная частота колебательной системы $\nu_р = 10$ кГц, ширина резонансной кривой $\Delta\nu = 400$ Гц. Определите амплитуду колебаний при резонансе, если статическое отклонение $x_0 = 1$ мм.

8.58. Тело совершает вынужденные гармонические колебания. Чему равна разность фаз между вынуждающей силой и смещением тела относительно положения равновесия при резонансе? Собственная частота системы $\nu_0 = 3$ кГц, коэффициент затухания $\beta = 600$ с$^{-1}$.

8.59. Амплитуда вынуждающей силы, вызывающей гармонические колебания материальной точки, увеличилась в $\eta = 4$ раза при неизменной частоте. Во сколько раз возросла мощность, потребляемая от источника этой силы?

8.60. Тело массой $m = 10$ г совершает вынужденные гармонические колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Амплитуда вынуждающей силы $F_0 = 0{,}5$ Н, резонансная частота системы $\nu_р = 200$ Гц, коэффициент затухания $\beta = 600$ с$^{-1}$. Определите среднюю мощность, потребляемую от источника при резонансе.

§ 9. Упругие волны

Основные формулы и законы

1. Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \qquad (9.1)$$

где s – смещение частиц среды от положения равновесия; υ – фазовая скорость.

2. Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$s = A\cos(\omega t - kx), \tag{9.2}$$

где A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; $k = \omega / \upsilon = 2\pi / \lambda$ – волновое число; λ – длина волны.

3. Длина волны:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{9.3}$$

где T – период колебаний; ν – частота колебаний.

4. Фазовые скорости продольных $\upsilon_{\parallel}$ и поперечных $\upsilon_{\perp}$ волн в твердых телах:

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{9.4}$$

где E – модуль Юнга; ρ – плотность среды; G – модуль сдвига.

5. Скорость упругой волны, распространяющейся по натянутой струне:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \tag{9.5}$$

где $T = F / S$ – напряжение в струне вследствие ее растяжения силой F; S – площадь поперечного сечения струны.

6. Скорость звука в жидкости:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{9.6}$$

где $K = -Vdp / dV$ – модуль объемного сжатия.

7. Скорость звука в идеальном газе:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{9.7}$$

где γ – постоянная адиабаты (для воздуха $\gamma = 1{,}4$); R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; M – молярная масса газа.

8. Координаты пучностей и узлов стоячей волны:

$$x_n^{\text{п}} = \pm\frac{n\lambda}{2}, \quad x_n^{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \tag{9.8}$$

где n – целое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

9. Акустический эффект Доплера:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm \upsilon_{пр} / \upsilon}{1 \mp \upsilon_{ист} / \upsilon}, \tag{9.9}$$

где ν – частота волны, воспринимаемая приемником; ν_0 – частота волны, испускаемая источником; $\upsilon_{пр}$, $\upsilon_{ист}$ – скорости движения соответственно приемника и источника; υ – фазовая скорость волны; верхние знаки перед скоростями $\upsilon_{пр}$ и $\upsilon_{ист}$ берутся в том случае, если соответствующая скорость направлена в сторону сближения источника и приемника, в противном случае используется нижний знак.

10. Среднее значение объемной плотности энергии упругой волны:

$$w_{ср} = \frac{E_{ср}}{V} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, \tag{9.10}$$

где $E_{ср}$ – среднее значение полной энергии частиц упругой среды в объеме V.

11. Поток энергии волны:

$$\Phi_{ср} = \frac{W_{ср}}{\Delta t} = w_{ср} \upsilon \Delta S_{\perp}, \tag{9.11}$$

где $W_{ср}$ – средняя энергия, переносимая волной через площадку $\Delta S_{\perp}$, расположенную перпендикулярно вектору скорости, за время Δt.

12. Интенсивность волны:

$$I = \frac{\Phi_{ср}}{\Delta S_{\perp}} = w_{ср} \upsilon = \frac{\rho A^2 \omega^2 \upsilon}{2}. \tag{9.12}$$

13. Эффективное звуковое давление:

$$p_{эф} = \sqrt{< p_{зв}^2 >} = \sqrt{\rho \upsilon I}, \tag{9.13}$$

где $p_{зв}$ – звуковое давление.

14. Уровень звукового давления (в децибелах):

$$L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0}, \tag{9.14}$$

где p – амплитуда звукового давления; p_0 = 20 мкПа – амплитуда звукового давления при нулевом уровне громкости силы звука (пороге слышимости).

15. Уровень громкости силы звука (в фонах):

$$L_I = 10\lg\frac{I}{I_0}, \qquad (9.15)$$

где I_0 – порог слышимости звука (наименьшее значение силы звука, воспринимаемого человеческим ухом).

Примеры решения задач

Пример 1. Разность фаз колебаний, возбуждаемых плоской волной в точках среды, отстоящих на расстоянии $\Delta l = 0{,}5$ м друг от друга, $\Delta\varphi = \pi / 3$. Найдите длину и частоту волны, если скорость волнового фронта $\upsilon = 330$ м/с.

Решение. Фаза волны определяется выражением под знаком косинуса в формуле (9.2): $\varphi = \omega t - kx$. Тогда разность фаз колебаний в точках, имеющих координаты x_1 и x_2,

$$\Delta\varphi = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1) = k\Delta l. \qquad (9.16)$$

Учитывая, что $k = 2\pi / \lambda$, из (9.16) получим

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}\Delta l = \frac{2\pi}{(\pi/3)}\cdot 0{,}5 = 3 \text{ м}. \qquad (9.17)$$

Скорость волнового фронта есть фазовая скорость волны. Поэтому частоту колебаний вычислим, используя формулу (9.3)

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{330}{3} = 110 \text{ Гц}. \qquad (9.18)$$

Пример 2. С какой силой F надо натянуть стальную струну длиной $l = 70$ см и диаметром $d = 0{,}4$ мм, чтобы она издавала тон си первой октавы (частота $\nu = 493$ Гц)? Плотность стали $\rho = 7{,}8$ г/см^3.

Решение. При колебаниях струны, закрепленной в двух точках, образуется стоячая волна, узлы которой находятся в точках крепления, а пучность – посередине струны. Из (9.8) следует, что расстояние между соседними узлами стоячей волны равно $\lambda / 2$. Следовательно,

$$\frac{\lambda}{2} = l \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2l. \qquad (9.19)$$

Скорость распространения волны, как следует из (9.3),

$$\upsilon = \lambda\nu = 2l\nu. \tag{9.20}$$

С другой стороны, из формулы (9.5)

$$\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}}, \tag{9.21}$$

где $S = \pi d^2 / 4$ – площадь поперечного сечения струны.

Приравняв (9.20) и (9.21), найдем силу натяжения струны

$$2l\nu = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} \quad \Rightarrow \quad F = \pi\rho(ld\nu)^2. \tag{9.22}$$

Выполнив вычисления, подставив данные в СИ, получим

$$F = 3{,}14 \cdot 7{,}8 \cdot 10^3 \cdot (0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 493)^2 \approx 467 \text{ Н}. \tag{9.23}$$

Пример 3. Частота тона свиста от снаряда, пролетающего мимо неподвижного наблюдателя, изменяется от ν_1 = 4200 Гц до ν_2 = = 1200 Гц. Определите скорость снаряда u. Скорость распространения звука в воздухе υ = 330 м/с.

Решение. Перед наблюдателем число звуковых сжатий и разрежений в единицу времени увеличивается, что равносильно уменьшению длины звуковой волны на величину uT, поэтому и частота воспринимаемого тона возрастает и становится равной $\nu_1 = \upsilon / (\lambda_0 - uT)$, где λ_0 – длина звуковой волны, возбуждаемой неподвижным источником; T – период колебаний. После того как снаряд миновал наблюдателя, воспринимаемая частота снизится до $\nu_2 = \upsilon / (\lambda_0 + uT)$, так как наблюдатель регистрирует меньшее число звуковых сжатий и разрежений из-за увеличения длины волны воспринимаемого тона на величину uT. Следовательно,

$$\nu_2(\lambda_0 + uT) = \nu_1(\lambda_0 - uT). \tag{9.24}$$

Поскольку $\lambda_0 = \upsilon T$, из (9.24) найдем

$$\nu_2(\upsilon + u) = \nu_1(\upsilon - u). \tag{9.25}$$

Отсюда скорость снаряда

$$u = \upsilon\frac{\nu_1 / \nu_2 - 1}{\nu_1 / \nu_2 + 1} = 330 \cdot \frac{4200/1200 - 1}{4200/1200 + 1} \approx 183 \text{ м/с}. \tag{9.26}$$

Задачи

9.1. Плоская звуковая волна возбуждается источником гармонических колебаний частотой $\nu = 500$ Гц. Амплитуда колебаний источника $A = 2$ мм. Напишите уравнение колебаний источника $s(0, t)$, если в начальный момент смещение точек источника максимально. Определите смещение $s(x, t)$ точек среды, находящихся на расстоянии $x = 0{,}9$ м от источника, в момент времени $t = 0{,}1$ с. Скорость звуковой волны принять $\upsilon = 300$ м/с. Затуханием пренебречь.

9.2. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 1$ кГц и амплитуду $A = 0{,}25$ мм, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 34$ см. Определите: 1) скорость распространения волны; 2) максимальную скорость частиц среды.

9.3. Покажите, что функция, описывающая плоскую волну, $s = A\cos(\omega t - kx)$ является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

9.4. Плоская волна частотой $\nu = 1$ кГц распространяется со скоростью $\upsilon = 400$ м/с. Определите: 1) расстояние, на которое сместится фронт волны за время $t = 4$ мс; 2) изменение фазы колебаний волны $\Delta\varphi$ на расстоянии от источника $x_0 = 1$ м в момент времени $t_0 = 1$ мс.

9.5. Разность фаз колебаний в двух точках среды, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 30$ см, $\Delta\varphi = \pi / 3$. Найдите скорость распространения волны в упругой среде, если частота колебаний $\nu = 200$ Гц.

9.6. Скорость распространения продольных упругих колебаний в алюминии $\upsilon_{\parallel} = 5{,}1$ км/с. Определите модуль Юнга для этого металла. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.

9.7. Чему равна скорость звука в водороде и воздухе при температуре $T = 273$ К?

9.8. Скорость звука в некотором газе при нормальных условиях $\upsilon = 190$ м/с. Плотность газа $\rho = 3{,}88$ кг/м^3. Найдите постоянную адиабаты γ для данного газа.

9.9. Звук, распространяясь, достигает высоты $h = 4000$ м за время $t_0 = 11{,}6$ с. Полагая, что температура понижается с высотой по линейному закону, определите изменение ΔT температуры воздуха на каждый метр высоты. Температура воздуха у поверхности земли $T_0 = 300$ К.

9.10. Определите расстояния до узлов и пучностей стоячей волны от границы раздела сред, если отражение происходит: 1) от среды менее плотной; 2) от среды более плотной. Скорость волны $\upsilon = 300$ м/с, а частота $\nu = 2{,}5$ кГц.

9.11. В трубе длиной $l = 0{,}4$ м находится воздух при температуре $T = 300$ К. Определите минимальную частоту возможных колебаний воздушного столба в двух случаях: 1) труба открыта; 2) труба закрыта.

9.12. Скорость распространения колебаний по струне $\upsilon = 96$ м/с, частота стоячей волны $\nu_{ст} = 480$ Гц. Чему равно расстояние между соседними узлами?

9.13. Определите частоту звучания основного тона стальной струны, натянутой с силой $F = 150$ Н. Длина струны $l = 0{,}8$ м, диаметр $d = 0{,}4$ мм.

9.14. Проволока массой $m = 0{,}64$ кг натянута между двумя опорами с усилием $F = 196$ Н. Расстояние между опорами $l = 1$ м. За какое время ударное возмущение на одном из концов проволоки достигнет другого конца?

9.15. Проволока, длина которой $l = 5$ м и диаметр $d = 2$ мм, натянута между двумя опорами с усилием $F = 314$ Н. Ударное возмущение на одном из концов проволоки достигает другого конца за время $t = 47{,}2$ мс. Определите плотность материала проволоки.

9.16. Частоты соседних тонов, издаваемых натянутой струной, $\nu_1 = 400$ Гц и $\nu_2 = 800$ Гц. Чему равна частота ν_0 основного тона?

9.17. Мимо неподвижного электровоза, частота гудка которого $\nu_0 = 1$ кГц, проезжает поезд со скоростью $\upsilon = 25$ м/с. Какую частоту звука воспринимает пассажир, когда поезд: 1) приближается к электровозу; 2) удаляется от него? Воздух находится при нормальных условиях.

9.18. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, высота тона звукового сигнала меняется скачком. Определите относительное изменение частоты $\Delta\nu / \nu$, если скорость поезда равна $\upsilon = 90$ км/ч.

9.19. Частота звука сирены поезда, приближающегося к неподвижному наблюдателю, $\nu_1 = 750$ Гц. Когда поезд удаляется, частота этого звука $\nu_2 = 650$ Гц. Определите скорость поезда и частоту ν_0 звука сирены. Воздух находится при нормальных условиях.

9.20. Источник звука частотой $\nu_0 = 4{,}65$ кГц движется по прямой относительно неподвижного приемника. Приемник настроен на частоту $\nu = 5$ кГц. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы приемник зарегистрировал движение источника? Воздух находится при нормальных условиях.

9.21. Ультразвуковая волна частотой $\nu_1 = 50$ кГц направлена от неподвижного локатора к приближающейся подводной лодке. Найдите скорость подводной лодки, если частота биений (разность частот колебаний источника и сигнала, отраженного от лодки) $\Delta\nu = 250$ Гц. Скорость ультразвука в морской воде $\upsilon = 1{,}5$ км/с.

9.22. Плоская волна распространяется в воздухе при нормальных условиях. Определите энергию, переносимую волной за единицу времени через площадку $S = 1$ см^2. Амплитуда колебаний $A = 0{,}5$ мм, частота $\nu = 1$ кГц, волна падает на площадку под углом $\alpha = 60°$ к нормали.

9.23. Поток энергии продольной синусоидальной волны, переносимой в воздухе в направлении нормали через площадку $S = 10$ см^2, составляет $\Phi = 0{,}4$ Вт. Найдите амплитуду колебаний частиц среды, если частота волны $\nu = 2$ кГц, условия нормальные.

9.24. По цилиндрической трубе диаметром $d = 40$ см и длиной $l = 10$ м, заполненной воздухом при температуре $T = 300$ К, распространяется звуковая волна с интенсивностью $I = 150$ мВт/м^2. Определите энергию звукового поля, заключенного в трубе.

9.25. Мощность изотропного точечного источника звуковых волн $P = 36$ Вт. Чему равна средняя объемная плотность энергии на расстоянии $r = 8$ м от источника волн для воздуха при нормальных условиях?

9.26. Определите мощность точечного изотропного источника звука, если на расстоянии $r = 25$ м от него интенсивность звука $I =$ $= 20$ мВт/м^2. Чему равна средняя объемная плотность энергии на этом расстоянии?

9.27. Определите амплитуду колебаний молекул азота, через который проходят звуковые волны с частотой $\nu = 3{,}5$ кГц. Амплитуда звукового давления $p_0 = 0{,}3$ Па, азот находится при нормальных условиях.

9.28. Чему равна максимальная скорость колебательного движения молекул кислорода, через который проходят звуковые волны, если амплитуда звукового давления $p_0 = 0{,}36$ Па, кислород находится при нормальных условиях?

9.29. На расстоянии $r_1 = 60$ м от точечного изотропного источника звука уровень его интенсивности $L_1 = 35{,}45$ дБ. Определите уровень интенсивности L_2 звука этого источника на расстоянии $r_2 = 20$ м.

9.30. Какое эффективное звуковое давление создает в воздухе акустический динамик на расстоянии $r = 5$ м от него? Мощность динамика $P = 200$ Вт. Воздух находится при нормальных условиях.

§ 10. Элементы гидромеханики

Основные формулы и законы

1. Давление:

$$p = \frac{F_n}{S}, \tag{10.1}$$

где F_n – сила, действующая перпендикулярно на некоторую плоскую поверхность с площадью.

2. Давление на глубине *h*:

$$p(h) = p_0 + \rho g h, \tag{10.2}$$

где p_0 − внешнее давление; $\rho g h$ – гидростатическое давление; ρ – плотность жидкости.

3. Коэффициент объемного сжатия:

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}. \tag{10.3}$$

4. Уравнение непрерывности потока жидкости:

$$Q = \upsilon S = \text{const}, \tag{10.4}$$

где Q − объемный расход жидкости; υ − средняя по поперечному сечению потока скорость; S − площадь поперечного сечения потока.

5. Уравнение Бернулли:

$$p_0 + \rho g h + \frac{\rho \upsilon^2}{2} = \text{const}, \tag{10.5}$$

где $\rho\upsilon^2 / 2$ − динамическое давление.

6. Формула Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8 l \eta} R^4, \tag{10.6}$$

где Q – объемный расход жидкости через поперечное сечение трубы радиусом R; $p_1 - p_2$ – разность давлений на концах трубы длиной l; η – коэффициент динамической вязкости жидкости.

7. Число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon l}{\eta}, \qquad (10.7)$$

где l – характерный для поперечного сечения потока размер (для трубы это ее диаметр).

8. Формула Стокса:

$$F_{\text{c}} = \mu \upsilon = 6\pi\eta r \upsilon, \qquad (10.8)$$

где F_{c} – сила сопротивления при движении сферического тела в вязкой среде; $\mu = 6\pi\eta r$ – коэффициент сопротивления; υ – скорость тела; r – радиус тела.

Примеры решения задач

Пример 1. Горизонтальный цилиндр насоса имеет диаметр $d_1 =$ $= 10$ см. В нем движется поршень со скоростью $\upsilon_1 = 1$ м/с, выталкивая воду через отверстие диаметром $d_2 = 4$ см. Определите скорость υ_2 вытекания воды из отверстия. Чему равно избыточное давление Δp воды в цилиндре?

Решение. Считаем воду несжимаемой идеальной жидкостью. Скорость вытекания υ_2 найдем из уравнения непрерывности (10.4), которое для двух сечений потока, совпадающих с поршнем и отверстием, имеет вид

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2, \qquad (10.9)$$

где $S_1 = \pi d_1^2 / 4$, $S_2 = \pi d_2^2 / 4$ – площади соответственно поршня и отверстия.

Отсюда

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{S_1}{S_2} = \upsilon_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 1 \cdot \frac{10^2}{4^2} = 6{,}25 \text{ м/с}. \qquad (10.10)$$

Так как цилиндр насоса расположен горизонтально, то уравнение Бернулли (10.5) для потока воды в насосе примет вид

$$p_{01} + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = p_{02} + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2}, \qquad (10.11)$$

где p_{01}, p_{02} – внешние давления на воду соответственно со стороны поршня и отверстия.

Принимая во внимание, что плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, избыточное давление в цилиндре найдем из (10.11) как разность давлений, создаваемых внешними силами,

$$\Delta p = p_{01} - p_{02} = \frac{\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)}{2} = \frac{10^3 \cdot (6{,}25^2 - 1^2)}{2} \approx 39 \text{ кПа}. \qquad (10.12)$$

Пример 2. Определите объемный расход воды, подаваемой насосом через короткую горизонтальную выпускную трубку с внутренним диаметром $d = 12$ мм, соединенную с атмосферой, если насос создает давление $p = 0{,}2$ МПа. Какова полезная мощность насоса? Воду считать идеальной несжимаемой жидкостью.

Решение. Уравнение Бернулли (10.5) для воды, подаваемой насосом в горизонтальную трубку, имеет вид

$$p = p_0 + \frac{\rho\upsilon^2}{2}, \qquad (10.13)$$

где $p_0 = 0{,}1$ МПа – атмосферное давление; $\rho = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды.

Отсюда скорость воды на входе в трубку

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \qquad (10.14)$$

Объемный расход воды (объем, проходящий через поперечное сечение трубки в единицу времени) определим по формуле (10.4), учитывая, что площадь сечения трубки $S = \pi d^2 / 4$,

$$Q = \upsilon S = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}\,\frac{\pi d^2}{4}. \qquad (10.15)$$

Подставив численные данные, найдем

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot (0{,}2 - 0{,}1) \cdot 10^6}{10^3}}\,\frac{3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 10^{-6}}{4} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}. \qquad (10.16)$$

Мощность насоса равна произведению силы $F = (p - p_0)S$, действующей на воду со стороны насоса, на скорость υ, с которой вода выходит из насоса. Приняв во внимание (10.15), получим

$$P = F\upsilon = (p - p_0)S\upsilon = (p - p_0)Q. \qquad (10.17)$$

Используя (10.16), выполним вычисления

$$P = (0{,}2 - 0{,}1) \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} = 160 \text{ Вт}. \qquad (10.18)$$

Пример 3. Какую разность давлений необходимо создать на трубопроводе, внутренний диаметр которого $d = 15$ мм и длина $l = 200$ м, чтобы расход воды составил $Q = 1$ л/с? Коэффициент динамической вязкости воды $\eta = 1$ мПа · с.

Решение. Выражение для перепада давления в трубопроводе следует из формулы Пуазейля (10.6) с учетом, что $R = d / 2$:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{8l\eta Q}{\pi R^4} = \frac{8 \cdot 200 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot (7{,}5 \cdot 10^{-3})^4} \approx 161 \text{ кПа}. \quad (10.19)$$

Задачи

10.1. Определите силу гидростатического давления на поверхность тонкой пластины длиной $l = 15$ см и шириной $a = 5$ см, вертикально погруженной в воду так, что край пластины совпадает с поверхностью воды. Какая сила требуется для удержания пластины в этом положении, если плотность материала пластины $\rho = 500$ кг/м^3, а толщина $b = 1$ мм?

10.2. Найдите плотность материала круглой пластины, погруженной в ртуть, если она удерживается усилием $F = 0{,}284$ Н. Диаметр пластины $D = 6$ см, толщина $b = 2$ мм. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

10.3. Определите силу гидростатического давления на боковую поверхность вертикально стоящей цилиндрической бочки, заполненной водой до высоты $h = 1$ м. Диаметр бочки $D = 50$ см.

10.4. Пробирку длиной $l = 18$ см, запаянную с одного конца, располагают вертикально и опускают в воду. На какую глубину H погружают пробирку, если высота столбика воды в ней $h = 9$ см? Условия на поверхности воды нормальные.

10.5. Определите скорость течения газа по трубе, если известно, что за время $t = 1$ ч через поперечное сечение трубы протекает масса газа $m = 0{,}32$ кг. Плотность газа $\rho = 3{,}5$ кг/м^3. Диаметр трубы $D = 1$ см.

10.6. В сосуд наливается вода со скоростью $V_t = 0{,}2$ л/с и вытекает через отверстие в дне сосуда. Каким должен быть диаметр этого отверстия, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне на высоте $h = 8{,}3$ см?

10.7. Вода течет в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость воды в широкой части трубы $\upsilon_1 = 0{,}2$ м/с. Определите скорость υ_2 в узкой части трубы, диаметр d_2 которой в 1,5 раза меньше диаметра D широкой части.

10.8. Какое давление создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью $\upsilon = 25$ м/с? Плотность краски $\rho = 800$ кг/м^3.

10.9. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность ρ_1 которой в 4 раза больше плотности ρ_2 материала шарика. Во сколько раз сила вязкого трения $F_{тр}$, действующая на всплывающий шарик, больше силы тяжести mg, действующей на этот шарик?

10.10. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром $d = 0{,}5$ мм, если коэффициент динамической вязкости воздуха $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Па · с?

10.11. Стальной шарик диаметром $d = 1$ мм падает с постоянной скоростью $\upsilon = 0{,}54$ см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом. Определите динамическую вязкость касторового масла. Плотность масла $\rho = 960$ кг/м^3.

10.12. В широкой части горизонтально расположенной сужающейся трубы нефть течет со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с. Чему равна скорость υ_2 нефти в узкой части трубы, если разность давлений в широкой и узкой частях ее $\Delta p = 6{,}65$ кПа? Плотность нефти $\rho = 712$ кг/м^3. Вязкостным трением пренебречь.

10.13. С какой скоростью вытекает вода из узкого отверстия в дне широкого бака высотой $h = 5{,}3$ м? Вязкостным трением пренебречь.

10.14. Определите подъемную силу, действующую на крыло самолета площадью $S = 88$ м^2, если скорость воздушного потока над крылом $\upsilon_1 = 280$ км/ч, а под крылом – $\upsilon_2 = 140$ км/ч. Плотность воздуха $\rho = 1{,}2$ кг/м^3.

10.15. Какая сила необходима для удержания пожарного шланга, если расход воды из выпускного сопла этого шланга диаметром $d =$ $= 7{,}5$ мм составляет $Q = 450$ л/мин?

10.16. В горизонтальной трубе площадью поперечного сечения $S_1 = 16$ см^2 течет жидкость. В зауженном участке трубы площадь ее поперечного сечения $S_2 = 9$ см^2. Разность уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, $\Delta h = 4$ см. Найдите объемный расход жидкости.

10.17. Горизонтальный цилиндр насоса имеет диаметр $d_1 = 10$ см. В нем движется со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с поршень, выталкивая воду через отверстие диаметром $d_2 = 4$ см. С какой скоростью υ_2 будет вытекать вода из отверстия? Чему равно избыточное давление воды в цилиндре?

10.18. Давление ветра на стену составляет $p = 360$ Па. Определите скорость ветра, если он дует перпендикулярно стене. Плотность воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м^3.

10.19. Струя воды диаметром $d = 1{,}5$ см, движущаяся со скоростью $\upsilon = 6$ м/с, ударяется о неподвижную плоскую поверхность под углом $\varphi = 60°$ к ней. Найдите силу F давления струи на поверхность, считая, что после удара о поверхность скорость частиц воды равна нулю.

10.20. Бак высотой $H = 1{,}5$ м наполнен до краев водой. На расстоянии $h = 1$ м от верхнего края бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии s от бака падает на пол струя, вытекающая из отверстия?

10.21. Цилиндрический сосуд высотой $H = 1{,}6$ м до краев заполнен жидкостью. На какой высоте h должно быть проделано отверстие в стенке сосуда, чтобы место падения струи, вытекающей из отверстия, было на максимальном от него расстоянии?

10.22. Вода течет по круглой гладкой трубе диаметром $d = 2$ см со средней по сечению скоростью $\upsilon_{ср} = 6$ см/с. Определите число Рейнольдса для потока жидкости в трубе и укажите характер течения жидкости. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с. Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$.

10.23. В трубе с внутренним диаметром $d = 2$ см течет вода. Чему равен максимальный массовый расход воды при ламинарном течении? Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с. Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$.

10.24. Свинцовый шарик ($\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3) диаметром $d = 1$ см падает с постоянной скоростью в глицерине (динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па · с, плотность $\rho = 1260$ кг/м^3). Является ли движение масла, вызванное падением в нем шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$.

10.25. Определите, какую разность давлений необходимо поддерживать на прямом участке трубопровода диаметром $D = 80$ см и длиной $L = 10$ км для перекачки нефти, если расход нефти должен составлять $Q = 10$ м^3/мин. Динамическая вязкость нефти $\eta = 17{,}8$ мПа · с. Покажите, что течение нефти при данных условиях можно считать ламинарным.

10.26. Какой диаметр должен быть у вентиляционного воздуховода длиной $L = 16$ м для полной смены воздуха в комнате объемом $V =$ $= 14\times8\times4$ м^3 каждые 12 мин? Динамическая вязкость воздуха $\eta =$ $= 12$ мкПа · с. Насос системы вентиляции развивает давление $\Delta p = 70$ Па.

10.27. По капилляру, диаметр которого $d = 0{,}6$ мм и длина $l = 5$ см, течет водород. На капилляре поддерживается разность давлений $\Delta p = 310$ Па. Найдите коэффициент динамической вязкости водорода, если его расход $Q = 120$ см^3/мин.

10.28. Определите отношение величины разности давлений Δp_1 на горизонтальной трубе круглого сечения длиной $l = 10$ м без учета вязкости текущей в ней воды к разности давлений Δp_2 на такой же трубе, но с учетом вязкости, при одинаковом объемном расходе $Q = 100$ см^3/с. Динамическая вязкость воды $\eta = 1$ мПа · с. Течение ламинарное.

10.29. Чему равен коэффициент объемного сжатия машинного масла, если скорость звука в нем составляет $\upsilon = 1250$ м/с, а плотность $\rho = 850$ кг/м^3?

10.30. На какое расстояние сместится поршень в цилиндре гидропривода длиной $L = 0{,}2$ м, заполненном маслом, коэффициент объемного сжатия которого $\beta = 4 \cdot 10^{-10}$ м^2/Н? Поршень развивает давление $p = 2 \cdot 10^7$ Па.

§ 11. Релятивистская механика

Основные формулы и законы

1. Преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad (11.1)$$

где x', y', z', t' и x, y, z, t – координаты и время одного и того же события соответственно в двух инерциальных системах отсчета K' и K, двигающихся друг относительно друга со скоростью $\vec{V}$; c – скорость света в вакууме.

2. Лоренцево сокращение длины:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}, \qquad (11.2)$$

где l – длина тела в направлении движения; l_0 – собственная длина (в системе отсчета, в которой тело покоится); υ – скорость тела.

3. Замедление хода движущихся часов:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad (11.3)$$

где Δt – длительность процесса в системе отсчета, относительно которой объект движется со скоростью υ; Δt_0 – собственное время процесса, измеренное в системе отсчета, в которой объект покоится.

4. Преобразование скорости в релятивистской механике:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1-\upsilon_x V/c^2}, \quad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\upsilon_x V/c^2}, \quad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\upsilon_x V/c^2}, \qquad (11.4)$$

где υ_x', υ_y', υ_z' и υ_x, υ_y, υ_z – компоненты скорости частицы соответственно в двух инерциальных системах отсчета K' и K, движущихся друг относительно друга со скоростью $\vec{V}$.

5. Импульс релятивистской частицы:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad (11.5)$$

где $m = m_0/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ – релятивистская масса; m_0 – масса (покоя) частицы; υ – скорость частицы.

6. Связь силы и ускорения релятивистской частицы:

а) *частица двигается в направлении действия силы или в противоположном направлении*

$$\vec{F} = \frac{m_0\vec{a}}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}}; \qquad (11.6)$$

б) *сила действует перпендикулярно скорости частицы (движение по окружности с постоянной скоростью)*

$$\vec{F} = \frac{m_0\vec{a}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (11.7)$$

7. Полная энергия релятивистской частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (11.8)$$

8. Кинетическая энергия релятивистской частицы:

$$K = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right), \qquad (11.9)$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.

9. Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \qquad (11.10)$$

10. Связь импульса и кинетической энергии релятивистской частицы:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}. \qquad (11.11)$$

Примеры решения задач

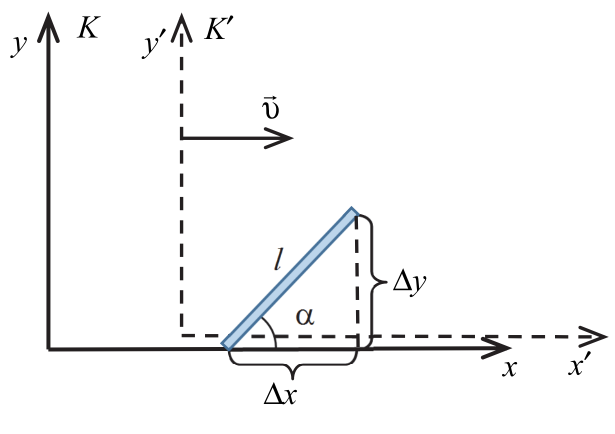
Пример 1. Определите собственную длину стержня l_0, если в лабораторной системе отсчета его скорость $\upsilon = 0{,}6c$, длина $l = 1$ м и угол между осью стержня и вектором скорости $\alpha = 60°$.

Решение. Длина l стержня в лабораторной системе отсчета (K-системе) рассчитывается по формуле (рисунок)

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \qquad (11.12)$$

где Δx, Δy – проекции стержня на оси координат в K-системе отсчета

$$\Delta x = l\cos\alpha, \quad \Delta y = l\sin\alpha. \qquad (11.13)$$



Рисунок

Длина l_0 этого же стержня в K'-системе отсчета, связанной со стержнем и движущейся относительно лабораторной K-системы отсчета со скоростью υ стержня, определяется по формуле

$$l_0 = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2}, \qquad (11.14)$$

где Δx_0, Δy_0 – проекции стержня на оси координат в K'-системе отсчета.

Принимая во внимание, что продольные размеры (размеры в направлении движения) уменьшаются (см. формулу (11.2)), а поперечные размеры не изменяются, найдем

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}, \ \Delta y = \Delta y_0. \qquad (11.15)$$

Отсюда с учетом (11.13) получим

$$\Delta x_0 = \frac{l \cos\alpha}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \ \Delta y_0 = l \sin\alpha. \qquad (11.16)$$

Подставив (11.16) в (11.14), найдем собственную длину стержня

$$l_0 = l \frac{\sqrt{1 - (\upsilon^2 / c^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = \frac{\sqrt{1 - 0{,}6^2 \sin^2 60}}{\sqrt{1 - 0{,}6^2}} \approx 1{,}07 \text{ м}. \qquad (11.17)$$

Пример 2. Альфа-частица, испущенная ядром при альфа-распаде, имеет кинетическую энергию $K = 14{,}4 \cdot 10^{-13}$ Дж. Определите скорость альфа-частицы. Какой должна быть скорость протона, чтобы его полная релятивистская энергия была такой же, как и у альфа-частицы? Масса покоя альфа-частицы и протона: $m_{0\alpha} = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг и $m_{0p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение. Скорость альфа-частицы найдем из формулы (11.9) для кинетической энергии релятивистской частицы

$$\upsilon_\alpha = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + K / m_{0\alpha} c^2)^2}} \approx 0{,}07c. \qquad (11.18)$$

Поскольку полная релятивистская энергия равна сумме кинетической энергии и энергии покоя, из условия следует, что полная релятивистская энергия протона

$$E_p = K + m_{0\alpha} c^2. \qquad (11.19)$$

Приняв во внимание (11.8), получим

$$\frac{m_{0p}c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = K + m_{0\alpha}c^2. \tag{11.20}$$

Отсюда скорость протона

$$\upsilon_p = c\sqrt{1-\frac{1}{(K/m_{0p}c^2 + m_{0\alpha}/m_{0p})^2}} \approx 0{,}97c. \tag{11.21}$$

Задачи

11.1. В земной атмосфере при взаимодействии космических лучей с атомами рождаются нестабильные частицы – мюоны. В системе отсчета, связанной с самой частицей, время жизни мюона $\tau_0 = 2{,}2$ мкс. Определите время жизни мюона для неподвижного наблюдателя на поверхности Земли, если скорость мюона $\upsilon = 0{,}99c$.

11.2. Найдите собственное время жизни частицы, если ее скорость υ меньше скорости света в вакууме c на 0,2%, а расстояние, которое она пролетает до распада, $s = 300$ км.

11.3. В неподвижной системе отсчета (K-системе) покоится стержень длиной $l_0 = 1$ м, ориентированный под углом $\alpha_0 = 30°$ к оси Ox. Определите длину l стержня и соответствующий угол α в подвижной системе отсчета (K'-системе), движущейся относительно K-системы вдоль оси Ox со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$.

11.4. Две частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0{,}75c$ относительно неподвижного наблюдателя на поверхности Земли. Чему равна относительная скорость частиц?

11.5. Два протона, движущихся прямолинейно с постоянной скоростью $\upsilon = 0{,}8c$, сталкиваются с неподвижным препятствием. В неподвижной системе отсчета (K-системе) временной интервал между последовательными столкновениями протонов с препятствием $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ с. Найдите расстояние между частицами в системе отсчета, связанной с любой из движущихся частиц (K'-системе).

11.6. С Земли на космический аппарат, движущийся со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$, с временным интервалом $\Delta t = 60$ мин отправлены два радиосигнала. Определите временной интервал по часам космического аппарата между приемом этих радиосигналов.

11.7. Пассажирский самолет совершает полет от побережья Тихого океана до побережья Атлантического океана ($s = 4800$ км) со скоростью $\upsilon = 1080$ км/ч. На сколько отстанут часы пассажиров самолета после полета по отношению к показанию часов у наблюдателя на Земле?

11.8. Два космических аппарата движутся равномерно и прямолинейно с относительной скоростью $\upsilon = 0{,}8c$. В первом аппарате проводится некоторый эксперимент длительностью $\Delta t = 8$ ч. Какова длительность этого эксперимента по часам, находящимся во втором космическом аппарате?

11.9. В неподвижной системе отсчета (K-системе) найдите угол между диагоналями квадрата, который движется со скоростью $\upsilon = 0{,}9c$ в направлении: 1) параллельном одной из сторон; 2) параллельном диагонали квадрата.

11.10. Космический аппарат движется в неподвижной системе отсчета (K-системе) со скоростью $\upsilon = 0{,}99c$. Определите: 1) как изменятся линейные размеры самого аппарата и находящихся в нем предметов; 2) как изменится плотность вещества цилиндрического тела, ось которого ориентирована параллельно направлению движения аппарата.

11.11. Какую работу необходимо совершить, чтобы скорость движущегося протона увеличилась от $\upsilon_1 = 0{,}5c$ до $\upsilon_2 = 0{,}8c$? Масса покоя протона $m_{0p} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

11.12. Космический аппарат, движущийся со скоростью $\upsilon = 0{,}9c$ относительно неподвижного наблюдателя на Земле, запускает в направлении движения тело со скоростью $\upsilon_1 = 0{,}7c$ относительно аппарата. Найдите скорость запущенного тела относительно неподвижного наблюдателя на Земле. Изменением скорости аппарата после запуска тела пренебречь.

11.13. Вдогонку космическому аппарату, движущемуся со скоростью $\upsilon_1 = 0{,}9c$ относительно неподвижного наблюдателя на Земле, запускают второй аппарат со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}95c$. Чему равна скорость второго аппарата относительно первого?

11.14. Рядом с Землей пролетает космический аппарат со скоростью $\upsilon = 0{,}985c$ относительно Земли. В момент, когда корабль находится в зените, с Земли посылают сигнал в виде светового импульса длительностью $\Delta t = 75$ мкс. Какова будет длительность импульса, принятого на космическом аппарате?

11.15. Время жизни отрицательного π-мезона, определенное в системе отсчета, которая связана с самой частицей, $\tau_0 = 26$ нс, а в лабораторной системе отсчета $\tau = 420$ нс. Найдите: 1) скорость

π-мезона; 2) пройденное π-мезоном расстояние в лабораторной системе отсчета.

11.16. Электрон движется под действием силы $F = 2 \cdot 10^{-15}$ Н в направлении действия силы. Чему равно ускорение электрона в моменты времени, когда скорость: 1) $\upsilon_1 = 1$ км/с; 2) $\upsilon_2 = 2 \cdot 10^8$ м/с? Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

11.17. Электрон движется в направлении действия силы $F = 8 \cdot 10^{-14}$ Н. Определите величину импульса и ускорения электрона в момент, когда его скорость $\upsilon = 0{,}5c$. Как изменится величина ускорения, если сила такой же величины будет приложена в направлении, перпендикулярном вектору скорости? Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

11.18. Кинетическая энергия релятивистской частицы в $k = 2$ раза превышает ее энергию покоя. Найдите скорость элементарной частицы.

11.19. Релятивистская частица с массой покоя m_0 движется из состояния покоя под действием постоянной силы $\vec{F}$. Направления движения частицы и приложенной силы совпадают. Определите зависимость скорости частицы от времени.

11.20. Источником энергии Солнца являются ядерные реакции синтеза, в ходе которых материя трансформируется в энергию излучения. За время $\Delta t = 1$ с Солнце излучает энергию $W = 4 \cdot 10^{26}$ Дж. Найдите время, за которое его масса за счет излучения уменьшится в 2 раза, считая излучение Солнца постоянным во времени. Масса Солнца $M_с = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

11.21. Масса искусственного спутника Земли, измеренная на космодроме перед запуском, $m_0 = 1000$ кг. Как изменится масса спутника при его движении на околоземной орбите с первой космической скоростью $\upsilon = 8$ км/с?

11.22. Пружину с коэффициентом жесткости $k = 10^5$ Н/м сжали на $\Delta x = 0{,}01$ м. Определите изменение массы пружины.

11.23. В результате столкновения двух протонов, двигавшихся с одинаковыми скоростями, рождается нейтральный π-мезон с массой $m_\pi = 2{,}4 \cdot 10^{-28}$ кг. Считая, что в данной реакции закон сохранения энергии выполняется, а все три частицы после столкновения покоятся, найдите скорость протонов до столкновения. Масса покоя протона $m_{0p} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

11.24. Какую энергию необходимо затратить, чтобы разделить ядро дейтрона, имеющего массу покоя $m_{0D} = 3{,}343 \cdot 10^{-27}$ кг, на протон и нейтрон? Массы покоя протона и нейтрона: $m_{0p} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{0n} = 1{,}674 \cdot 10^{-27}$ кг.

11.25. В Большом адронном коллайдере в лаборатории ЦЕРН в Швейцарии протону может быть сообщена кинетическая энергия $K = 6{,}5$ ТэВ. Какова при этом будет масса протона? Ответ выразите в единицах массы покоя протона.

11.26. Атомная бомба содержит $m = 12$ кг плутония. Отношение суммарной массы покоя продуктов деления ядер при взрыве бомбы к массе покоя исходного вещества $\eta = 10^{-4}$. Определите: 1) какая энергия высвобождается при взрыве бомбы; 2) какова средняя мощность бомбы, если ядерные реакции завершаются за промежуток времени $\Delta t = 4$ мкс.

11.27. В радиоактивном процессе распада ядра электрон (β-частица) вылетает из ядра со скоростью $\upsilon_\beta = 0{,}9995c$ относительно радиоактивного ядра. Найдите скорость β-частицы в лабораторной системе отчета, если ядро движется в лабораторной системе отсчета со скоростью $\upsilon = 0{,}75c$ в том же направлении, что и испущенная β-частица.

11.28. В циклическом ускорителе элементарных частиц с радиусом камеры $R = 628$ м протон движется с постоянной скоростью $\upsilon = 0{,}7c$. Определите величину силы, действующей на протон. Масса покоя протона $m_{0p} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

11.29. Атом, движущийся со скоростью $\upsilon = 0{,}9c$ в лабораторной системе отсчета, испускает фотон в направлении движения. Чему равна скорость фотона в лабораторной системе отсчета?

11.30. Неподвижное ядро испускает γ-квант. Определите величину импульса p, приобретаемого ядром при испускании, если энергия γ-кванта $E_\gamma = 4{,}8 \cdot 10^{-13}$ Дж.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§ 12. Уравнения состояния газа. Термодинамические процессы

Основные формулы и законы

1. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева − Клапейрона):

$$pV = \nu RT, \qquad (12.1)$$

где p − давление; V − объем газа; $\nu = m / M$ − количество вещества в молях; m, M − соответственно масса и молярная масса газа; R − универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура.

2. Закон Дальтона для давления смеси газов:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i, \qquad (12.2)$$

где p_i – парциальные давления компонентов смеси газов; n – число компонентов смеси.

3. Закон Бойля − Мариотта (изотермический процесс T = const, m = const):

$$pV = \text{const}. \qquad (12.3)$$

4. Закон Гей-Люссака (изобарный процесс p = const, m = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \qquad (12.4)$$

5. Закон Шарля (изохорный процесс V = const, m = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const}. \qquad (12.5)$$

6. Уравнения адиабатического процесса для идеального газа:

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}, \qquad (12.6)$$

где γ – показатель адиабаты.

7. Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса):

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT, \tag{12.7}$$

где a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса; $b \approx 4N_\text{A}V_0$; N_A – число Авогадро; V_0 – собственный объем одной молекулы.

8. Параметры критического состояния реального газа:

$$V_\text{кр}=3b\nu,\ \ p_\text{кр}=\frac{a}{27b^2},\ \ T_\text{кр}=\frac{8a}{27bR}. \tag{12.8}$$

9. Уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенной форме:

$$\left(\pi+\frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega-1)=8\tau, \tag{12.9}$$

где $\pi = p / p_\text{кр}$, $\omega = V / V_\text{кр}$, $\tau = T / T_\text{кр}$.

Примеры решения задач

Пример 1. При нагревании углекислого газа происходит диссоциация молекул CO_2 на атомарный кислород O и окись углерода CO. Определите степень диссоциации α молекул CO_2, если при нагревании $\nu = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ моль этого газа в объеме $V = 50$ см^3 до температуры $T = 2400$ К давление повысилось до $p = 1{,}1 \cdot 10^6$ Па.

Решение. Для решения задачи используем закон Дальтона (12.2), согласно которому давление смеси равно сумме парциальных давлений молекул CO_2, CO и атомов кислорода O, которые обозначим p_1, p_2 и p_3 соответственно:

$$p = p_1 + p_2 + p_3. \tag{12.10}$$

Степень диссоциации α численно равна доле распавшихся молекул CO_2. Так как распад одной молекулы углекислого газа дает одну молекулу CO и один атом кислорода O, то доля этих частиц в смеси будет также равна α, а доля нераспавшихся молекул CO_2 в смеси равна $(1-\alpha)$. Тогда из уравнения состояния идеального газа (12.1) следует, что парциальные давления компонентов смеси

$$p_1=(1-\alpha)\frac{\nu RT}{V},\ p_2=p_3=\alpha\frac{\nu RT}{V}. \tag{12.11}$$

Подставив (12.11) в уравнение (12.10), получим выражение для давления смеси газов

$$p = (1+\alpha)\frac{\nu RT}{V}. \tag{12.12}$$

Из уравнения (12.12) найдем степень диссоциации

$$\alpha = \frac{pV}{\nu RT} - 1 = \frac{1{,}1\cdot 10^6 \cdot 5\cdot 10^{-5}}{2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 2400} - 1 \approx 0{,}1. \tag{12.13}$$

Пример 2. Определите при температуре $T = 300$ К давление углекислого газа, имеющего плотность: 1) $\rho = 2$ кг/м^3; 2) $\rho = 20$ кг/м^3. Расчет проведите для идеального и реального газов. Для углекислого газа критическая температура $T_{кр} = 304$ К, критическое давление $p_{кр} = 7{,}39$ МПа.

Решение. Для случая идеального газа давление найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона (12.1)

$$p_{ид} = \frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \frac{\rho RT}{M}, \tag{12.14}$$

где $\rho = m / V$ – плотность газа.

Для случая реального газа давление определим из уравнения Ван-дер-Ваальса (12.7)

$$p_{реал} = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}. \tag{12.15}$$

Учитывая в (12.15), что $\nu = m / M$ и $m = \rho V$, получим

$$p_{реал} = \frac{\rho RT}{M - \rho b} - \frac{\rho^2 a}{M^2}. \tag{12.16}$$

Постоянные Ван-дер-Ваальса a и b в (12.16) найдем из формул для критических значений давления и температуры (12.8)

$$\frac{T_{кр}}{p_{кр}} = \frac{8b}{R} \quad\Rightarrow\quad b = \frac{RT_{кр}}{8p_{кр}}, \tag{12.17}$$

$$p_{кр} = \frac{a}{27b^2} = \frac{64p_{кр}^2 a}{27R^2T_{кр}^2} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{27R^2T_{кр}^2}{64p_{кр}}. \tag{12.18}$$

Выполним вычисления по формулам (12.17), (12.18)

$$b = \frac{8{,}31 \cdot 304}{8 \cdot 7{,}39 \cdot 10^6} \approx 0{,}43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}, \tag{12.19}$$

$$a = \frac{27 \cdot 8{,}31^2 \cdot 304^2}{64 \cdot 7{,}39 \cdot 10^6} \approx 0{,}36 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2. \tag{12.20}$$

Принимая во внимание, что молярная масса углекислого газа $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, рассчитаем по формулам (12.14), (12.16) давление газа для двух плотностей из условия.

При $\rho = 2$ кг/м^3

$$p_{\text{ид}} = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}133 \cdot 10^5 \text{ Па}, \tag{12.21}$$

$$p_{\text{реал}} = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 0{,}43 \cdot 10^{-4}} - \frac{2^2 \cdot 0{,}36}{(44 \cdot 10^{-3})^2} \approx 1{,}128 \cdot 10^5 \text{ Па}. \tag{12.22}$$

При $\rho = 20$ кг/м^3

$$p_{\text{ид}} = \frac{20 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}133 \cdot 10^6 \text{ Па}, \tag{12.23}$$

$$p_{\text{реал}} = \frac{20 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3} - 20 \cdot 0{,}43 \cdot 10^{-4}} - \frac{20^2 \cdot 0{,}36}{(44 \cdot 10^{-3})^2} \approx 1{,}081 \cdot 10^6 \text{ Па}. \tag{12.24}$$

При малых плотностях в первом случае различие давлений оказывается незначительным (меньше 0,5%). Во втором случае различие возрастает до 5%. Поэтому использование уравнения Ван-дер-Ваальса при больших плотностях является более обоснованным.

Задачи

12.1. На сколько изменится давление кислорода в баллоне объемом $V = 20$ л при температуре $T = 300$ К, если из него выпустить $\Delta m = 100$ г газа? Газ считать идеальным.

12.2. В баллоне вместимостью $V = 3$ л содержится кислород массой $m = 10$ г. Определите концентрацию молекул газа. Газ считать идеальным.

12.3. В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа и при температуре $t_1 = 27$°C. После того как из баллона было взято $\Delta m = 10$ г гелия, температура в баллоне понизилась до $t_2 = 17°C$. Чему равно давление гелия, оставшегося в баллоне? Газ считать идеальным.

12.4. В баллоне находится идеальный газ при температуре $t_1 = 17°C$. Во сколько раз уменьшится давление газа, если 20% его выйдет из баллона, а температура при этом понизится на $\Delta t = 10°C$?

12.5. В колбе емкостью $V = 100$ см^3 содержится некоторый идеальный газ при температуре $t = 27°C$. На сколько понизится давление газа, если вследствие утечки из колбы выйдет $\Delta N = 10^{20}$ молекул?

12.6. В баллоне объемом $V = 5$ л находится смесь кислорода и водорода под давлением $p = 5 \cdot 10^5$ Па и при температуре $t = 27°C$. Масса кислорода втрое больше массы водорода ($m_1 = 3m_2$). Определите число молекул N_1 кислорода и число молекул N_2 водорода в этом баллоне. Газы считать идеальными.

12.7. Чему равна плотность смеси кислорода и углекислого газа, если масса кислорода $m_1 = 50$ г, масса углекислого газа $m_2 = 80$ г? Смесь идеальных газов находится под давлением $p = 0{,}5$ МПа и при температуре $t = 7°C$.

12.8. Резиновая лодка может выдержать давление надутого в нее воздуха не более $p_{max} = 112$ кПа. Лодку надули до давления $p_1 = 106$ кПа при температуре $t_1 = 10°C$. Не лопнет ли лодка, когда температура повысится до $t_2 = 33°C$? Увеличение объема лодки не превышает 5%. Газ считать идеальным.

12.9. Цилиндрический сосуд, расположенный горизонтально, заполнен газом при температуре $t_0 = 27°C$ и давлении $p_0 = 0{,}1$ МПа и разделен на две равные части подвижной перегородкой. Определите давление газа в цилиндре, если в левой половине газ нагреть до температуры $t_1 = 57°C$, а в правой температуру газа оставить без изменения.

12.10. В аудитории площадью $S = 30$ м^2 и высотой $H = 3$ м температура повысилась с $t_1 = 20°C$ до $t_2 = 28°C$. Какая масса воздуха Δm вышла из аудитории? Молярная масса воздуха $M = 0{,}029$ кг/моль. Атмосферное давление в аудитории нормальное.

12.11. В колбе объемом $V = 1$ л содержится кислород при температуре $t_1 = 17°C$. В колбу впускают некоторое количество этого газа, из-за чего его давление повышается на $\Delta p = 5$ кПа. Сколько ΔN молекул газа было впущено в колбу, если температура газа не изменилась?

12.12. В сосуде содержится смесь двух газов одинаковой массы, причем молярная масса первого из них втрое меньше, чем второго.

Число молекул первого газа превышает число молекул второго на $\Delta N = 4 \cdot 10^{22}$. Определите число молекул N_1 и N_2 каждого газа в отдельности.

12.13. Воздух, находящийся под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа, был адиабатически сжат до давления $p_2 = 1$ МПа. Каково будет давление p_3, когда сжатый воздух, сохраняя объем неизменным, охладится до первоначальной температуры? Изобразите процесс графически. Газ считать идеальным.

12.14. Баллон емкостью $V = 20$ л заполнен азотом при температуре $T = 400$ К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 200$ кПа. Определите массу израсходованного газа. Процесс считать изотермическим, а газ идеальным.

12.15. В баллоне емкостью $V = 2$ дм^3 содержится газ под давлением $p = 0{,}66 \cdot 10^6$ Па. Сколько молекул газа в баллоне, если его температура $t = 17$°С? Газ считать идеальным.

12.16. Найдите массу идеального газа в баллоне объемом $V = 90$ л при температуре $T = 285$ К и давлении $p = 0{,}5$ МПа, если его плотность при нормальных условиях $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3.

12.17. Чему равна молярная масса газа, если при температуре $T = 155$ К и давлении $p = 0{,}28$ МПа он имеет плотность $\rho = 6{,}1$ кг/м^3? Газ считать идеальным.

12.18. В баллоне объемом $V = 0{,}5$ м^3 находится $m_1 = 4$ кг водорода и $m_2 = 6{,}5$ кг азота. Определите давление смеси на стенки сосуда, если температура окружающей среды $t = 18$°С. Газы считать идеальными.

12.19. В цилиндре под поршнем находится кислород под давлением $p_1 = 1$ атм. Кислород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в $n = 4$ раза, а затем был сжат изотермически до первоначального объема. Определите давление p_3 в конце изотермического сжатия. Изобразите процесс графически. Газ считать идеальным.

12.20. Найдите массу сернистого газа SO_2, занимающего объем $V = 25$ л при температуре $t = 27$°С и давлении $p = 100$ кПа. Газ считать идеальным.

12.21. В сосуде объемом $V = 2$ л находятся углекислый газ CO_2 массой $m_1 = 6$ г и закись азота N_2O массой $m_2 = 2$ г при температуре $t = 127$°С. Чему равно давление смеси газов в сосуде? Газы считать идеальными.

12.22. Закрытый сосуд объемом $V = 2$ л наполнен воздухом при нормальных условиях. В сосуд вводится диэтиловый эфир $C_2H_5OC_2H_5$.

После того как весь эфир испарился, давление в сосуде стало равным $p = 0{,}14$ МПа, а температура смеси не изменилась. Какая масса эфира была введена в сосуд? Газы считать идеальными.

12.23. Воздух объемом $V_1 = 100$ л при температуре $t = 27°C$ и давлении $p = 1$ МПа превратили в жидкость. Какой объем V_2 он займет в жидком состоянии? Плотность жидкого воздуха $\rho = 861$ кг/м^3, его молярная масса в любом состоянии $M = 0{,}029$ кг/моль. Газ считать идеальным.

12.24. При медленном изотермическом сжатии идеального газа его объем уменьшился на $\Delta V = 2$ л, а давление увеличилось в 2 раза. Определите первоначальный объем газа V_1.

12.25. В горизонтально расположенной трубке длиной L, закрытой с одного конца, посередине находится столбик ртути длиной h, запирающий столбик воздуха. Трубку располагают вертикально отверстием вверх. Чему равна длина l воздушного столбика под опустившейся ртутью? Плотность ртути ρ, атмосферное давление p_0. Газ считать идеальным.

12.26. Один сосуд сферической формы радиусом R_1 заполнен идеальным газом под давлением p_1, а в другом сосуде радиусом R_2 – вакуум. Сосуды соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Какое давление p_2 установится в сосудах после их соединения? Температура при расширении газа не изменяется.

12.27. В вертикально расположенном цилиндре под невесомым подвижным поршнем находится идеальный газ. Расстояние от поршня до дна цилиндра $h = 1$ м, диаметр поршня $D = 30$ см. На какое расстояние Δh опустится поршень, если на него поставить гирю весом $P = 0{,}1$ кН? Атмосферное давление p_0 нормальное, процесс сжатия газа под поршнем изотермический.

12.28. На сколько градусов надо нагреть идеальный газ, чтобы он, изобарно расширившись, увеличил объем на 30%, если до нагревания его температура была $t_1 = 17°C$?

12.29. Температура воздуха в цилиндре, закрытом подвижным поршнем, $t_1 = 27°C$. После нагревания на $\Delta t = 30°C$ поршень переместился на $\Delta l = 5$ см. Какой объем V_2 займет воздух после нагревания? Площадь поршня $S = 10$ см^2. Процесс изобарный.

12.30. Температура воздуха в цилиндре с поршнем $t_1 = 7°C$. На сколько переместился поршень при нагревании воздуха на $\Delta T =$ $= 20$ К, если вначале расстояние от дна цилиндра до поршня было равно $h = 14$ см?

12.31. Бутылка, заполненная идеальным газом при нормальных условиях, закрыта пробкой диаметром $d = 2$ см. Чтобы пробка вылетела из бутылки, надо нагреть газ в ней на $\Delta T = 100$ К. Чему равна сила трения $F_{тр}$, удерживающая пробку в бутылке?

12.32. В сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ при нормальных условиях. Расстояние между дном сосуда и поршнем $h = 25$ см. Когда на поршень положили груз массой $m = 25$ кг, поршень опустился на $\Delta h = 13{,}4$ см. Считая сжатие адиабатическим, определите показатель γ адиабаты для данного газа. Площадь поперечного сечения поршня $S = 10$ см^2.

12.33. Идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$ занимает объем $V_1 = 0{,}5$ дм^3 при давлении $p_1 = 50$ кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема V_2 и давления p_2. Затем он охлаждается до первоначальной температуры при постоянном объеме V_2. При этом его давление становится $p_0 = 100$ кПа. Найдите объем V_2 и давление p_2. Постройте график этого процесса.

12.34. Сосуд объемом $V = 0{,}5$ л заполнен парообразным йодом I_2 массой $m = 1$ г. При температуре $t = 1000$°C давление в сосуде $p = 93{,}3$ кПа. Определите степень диссоциации α молекул йода на атомы. Газ считать идеальным. Молярная масса молекул йода $M = 0{,}254$ кг/моль.

12.35. В сосуде находится углекислый газ CO_2. При некоторой температуре степень диссоциации молекул углекислого газа на кислород O_2 и окись углерода CO $\alpha = 0{,}25$. Во сколько раз давление в сосуде при этих условиях будет больше того давления, которое имело бы место, если бы молекулы углекислого газа не были диссоциированы? Газ считать идеальным.

12.36. Определите число частиц в единице массы парообразного йода I_2, степень диссоциации которого $\alpha = 0{,}5$. Молярная масса молекулярного йода $M = 0{,}254$ кг/моль.

12.37. Какое количество частиц содержится в кислороде массой $m = 16$ г, у которого степень диссоциации $\alpha = 0{,}5$?

12.38. Для некоторого газа постоянная в уравнении Ван-дер-Ваальса $a = 45{,}3 \cdot 10^4$ Н $\cdot$ м^4/кмоль^2, а критическая температура $T_{кр} = 282{,}7$ К. Оцените диаметр молекулы газа.

12.39. Плотность азота $\rho = 140$ кг/м^3, его давление $p = 10$ МПа. Определите температуру газа, считая его реальным. Постоянные Ван-дер-Ваальса a и b принять равными соответственно 0,135 Н $\cdot$ м^4/моль^2 и $3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.40. В баллоне емкостью $V = 20$ л находится $\nu = 80$ моль некоторого газа. При температуре $t_1 = 14°C$ давление газа $p_1 = 9 \cdot 10^6$ Па, при $t_2 = 63°C$ давление газа $p_2 = 10{,}9 \cdot 10^6$ Па. Найдите постоянные Ван-дер-Ваальса a и b для этого газа.

12.41. Во сколько раз давление газа больше его критического давления, если известно, что его объем и температура вдвое больше критических значений этих величин?

12.42. В закрытом сосуде объемом $V = 0{,}5$ м^3 находится $\nu = 0{,}6$ кмоль углекислого газа при давлении $p = 3 \cdot 10^6$ Па. Пользуясь уравнением для реального газа, определите, во сколько раз необходимо увеличить температуру газа, чтобы его давление возросло вдвое. Для углекислого газа критическая температура $T_{кр} = 304$ К, критическое давление $p_{кр} = 7{,}39 \cdot 10^6$ Па.

12.43. При какой температуре $\nu = 1$ кмоль аргона будет занимать объем $V = 1$ м^3, если его давление $p = 3 \cdot 10^6$ Па? Критические параметры для аргона: $p_{кр} = 48{,}6 \cdot 10^5$ Па, $T_{кр} = 150{,}8$ К. Для решения задачи воспользуйтесь приведенной формой уравнения Ван-дер-Ваальса.

12.44. Чему равна плотность водорода в критическом состоянии? Для водорода критическая температура $T_{кр} = 33{,}2$ К, критическое давление $p_{кр} = 1{,}3 \cdot 10^6$ Па.

12.45. Определите критический объем $\nu = 1$ моль кислорода. Для кислорода критическая температура $T_{кр} = 155$ К, критическое давление $p_{кр} = 5{,}08$ МПа.

12.46. Какой наибольший объем может занимать $m = 1$ кг жидкой углекислоты? Критические параметры для углекислого газа: $p_{кр} = 7{,}39$ МПа, $T_{кр} = 304$ К.

12.47. Определите внутреннее давление p_i, обусловленное силами взаимодействия молекул газа, находящегося при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление этого газа равны соответственно $T_{кр} = 417$ К и $p_{кр} = 7{,}7$ МПа.

12.48. Для водорода силы взаимодействия между молекулами незначительны. Преимущественную роль играют собственные размеры молекул. Напишите уравнение состояния такого полуидеального газа. Определите ошибку ε, которая допускается при нахождении количества ν водорода, занимающего некоторый объем при температуре $t = 0°C$ и давлении $p = 28$ МПа, не учитывая собственных размеров молекул. Постоянная Ван-дер-Ваальса для водорода $b = 2{,}63 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.49. Оцените диаметр молекулы кислорода, если критическая температура и критическое давление этого газа равны соответственно $T_{кр} = 155$ К и $p_{кр} = 5{,}08$ МПа.

§ 13. Молекулярно-кинетическая теория. Статистические распределения

Основные формулы и законы

1. Зависимость давления идеального газа от концентрации молекул и температуры:

$$p = nkT, \tag{13.1}$$

где $n = N / V$ – концентрация молекул; N – число частиц в объеме V; k – постоянная Больцмана.

2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 <\upsilon^2> = \frac{2}{3} n \varepsilon_{\text{пост}}, \tag{13.2}$$

где n – концентрация молекул газа; m_0 – масса молекулы; $<\upsilon^2>$ – среднее значение квадрата скорости молекулы; $\varepsilon_{\text{пост}}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

3. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} kT, \tag{13.3}$$

где ε_0 – средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы.

4. Средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\varepsilon = i\varepsilon_0 = \frac{i}{2} kT, \tag{13.4}$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$; $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вр}}$, $i_{\text{кол}}$ – числа соответственно поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекулы.

5. Функция распределения Максвелла по модулю скорости молекул:

$$f(\upsilon) = \frac{dN}{Nd\upsilon} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m_0 \upsilon^2}{2kT} \right), \tag{13.5}$$

где dN – число молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$; N – полное число молекул системы.

6. Наиболее вероятная $\upsilon_в$, средняя (арифметическая) $\bar{\upsilon}$ и средняя квадратичная $\upsilon_{кв}$ скорости молекул идеального газа:

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad \bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad (13.6)$$

где M – молярная масса газа.

7. Распределение Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right), \qquad (13.7)$$

где n – концентрации молекул, обладающих потенциальной энергией Π; n_0 – концентрации молекул на нулевом уровне отсчета потенциальной энергии.

8. Барометрическая формула:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right), \qquad (13.8)$$

где p, p_0 – давление газа на высоте h и при $h = 0$ соответственно.

Примеры решения задач

Пример 1. Чему равны средние кинетические энергии поступательного $E_{пост}$ и вращательного $E_{вр}$ движения всех молекул, содержащихся в $m = 4$ кг кислорода при температуре $T = 200$ К?

Решение. При низких температурах колебательные степени свободы не возбуждаются, поэтому у двухатомной молекулы кислорода O_2 общее число степеней свободы $i = 5$. Из них поступательных степеней свободы $i_{пост} = 3$ и вращательных степеней свободы $i_{вр} = 2$. Согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы, в среднем на одну степень свободы молекулы приходится одна и та же энергия ε_0 (см. формулу (13.3)). Тогда кинетическая энергия поступательного $\varepsilon_{пост}$ и вращательного $\varepsilon_{вр}$ движения одной молекулы

$$\varepsilon_{пост} = 3\varepsilon_0 = \frac{3}{2}kT, \quad \varepsilon_{вр} = 2\varepsilon_0 = kT. \qquad (13.9)$$

Число N молекул, содержащихся в газе массой m,

$$N = \nu N_\text{А} = \frac{mN_\text{А}}{M}, \qquad (13.10)$$

где $\nu = m / M$ − число молей газа; M − молярная масса газа; $N_\text{А}$ − число Авогадро.

Тогда средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения всех молекул газа

$$E_\text{пост} = N\varepsilon_\text{пост} = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT, \quad E_\text{вр} = N\varepsilon_\text{вр} = \frac{m}{M}RT, \qquad (13.11)$$

где $R = kN_\text{А}$ − универсальная газовая постоянная.

Учитывая, что молярная масса кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, выполним вычисления по формулам (13.11)

$$E_\text{пост} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4 \cdot 8{,}31 \cdot 200}{32 \cdot 10^{-3}} \approx 3{,}1 \cdot 10^5 \text{ Дж}, \qquad (13.12)$$

$$E_\text{вр} = \frac{4 \cdot 8{,}31 \cdot 200}{32 \cdot 10^{-3}} \approx 2{,}1 \cdot 10^5 \text{ Дж}. \qquad (13.13)$$

Пример 2. Найдите функцию распределения молекул массой m_0 по их кинетической энергии. Определите наиболее вероятное значение кинетической энергии $K_\text{в}$, а также долю молекул, которые обладают энергией, отличающейся от $K_\text{в}$ на $\Delta K = 0{,}05K_\text{в}$.

Решение. Число частиц dN со скоростями в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$ численно равно числу частиц, имеющих соответствующие кинетические энергии от K до $K + dK$. Из определения функции распределения Максвелла (см. формулу (13.5)) следует, что

$$\frac{dN}{N} = f(\upsilon)d\upsilon = f(K)dK, \qquad (13.14)$$

где $f(K)$ – функция распределения молекул по кинетической энергии.

Из (13.14) найдем

$$f(K) = f(\upsilon)\frac{d\upsilon}{dK}. \qquad (13.15)$$

Из выражения для кинетической энергии молекулы $K = m_0\upsilon^2 / 2$ выразим скорость υ и вычислим производную $d\upsilon / dK$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2K}{m_0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dK} = \frac{1}{\sqrt{2m_0K}}. \tag{13.16}$$

Подставив в (13.15) функцию распределения Максвелла по модулю скорости (см. формулу (13.5)) и уравнения (13.16), получим

$$f(K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\sqrt{K}\,e^{-\frac{K}{kT}}. \tag{13.17}$$

Наиболее вероятное значение кинетической энергии $K_в$ соответствует максимуму функции $f(K)$. Исследуем функцию на максимум. Возьмем производную от функции (13.17) по K и, приравняв ее к нулю, получим

$$\frac{df(K)}{dK} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{K}} - \frac{\sqrt{K}}{kT} = 0. \tag{13.18}$$

Выразив из (13.18) K, найдем наиболее вероятную кинетическую энергию $K_в$ молекулы ($K_в = K$)

$$K_в = \frac{kT}{2}. \tag{13.19}$$

Определим долю частиц с энергией в диапазоне от $K_в - \Delta K$ до $K_в + \Delta K$. Из (13.14) при $\Delta K << K_в$ следует, что

$$\frac{\Delta N}{N} = \int\limits_{K_в-\Delta K}^{K_в+\Delta K} f(K)dK \approx 2f(K_в)\Delta K. \tag{13.20}$$

Подставив в (13.20) функцию $f(K)$ (см. формулу (13.17)) при $K = K_в$ и $\Delta K = 0{,}05K_в$, получим

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\sqrt{K_в}\,e^{-\frac{K_в}{kT}}\,0{,}05K_в. \tag{13.21}$$

Учитывая при вычислении формулу (13.19), найдем

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{0{,}1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}024. \tag{13.22}$$

Пример 3. В высоком вертикальном сосуде содержится газ, состоящий из двух сортов молекул с массами m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$). Концентрации этих молекул у дна сосуда равны соответственно n_1 и n_2

($n_1 < n_2$). Учитывая, что сосуд находится в однородном поле силы тяжести и по всей его высоте поддерживается постоянная температура T, определите высоту, на которой концентрации обоих сортов молекул будут одинаковыми.

Решение. Потенциальная энергия молекул в однородном поле силы тяжести

$$\Pi = mgh, \tag{13.23}$$

где m – масса молекулы; h – высота, на которой находится молекула, над нулевым уровнем отсчета потенциальной энергии, который совпадает с дном сосуда.

Тогда, согласно распределению Больцмана (см. формулу (13.7)), концентрация n_1' молекул газа первого сорта на некоторой высоте h определяется выражением

$$n_1' = n_1 \exp\left(-\frac{m_1 gh}{kT}\right), \tag{13.24}$$

где n_1 – концентрация молекул первого сорта на нулевом уровне отсчета потенциальной энергии.

Для молекул второго сорта распределение Больцмана имеет вид

$$n_2' = n_2 \exp\left(-\frac{m_2 gh}{kT}\right), \tag{13.25}$$

где n_2' – концентрация молекул на высоте h; n_2 – концентрация молекул второго сорта на нулевом уровне отсчета потенциальной энергии.

Поскольку на высоте h концентрации молекул обоих сортов одинаковые ($n_1' = n_2'$), то, приравняв правые части выражений (13.24) и (13.25), получим

$$n_1 \exp\left(-\frac{m_1 gh}{kT}\right) = n_2 \exp\left(-\frac{m_2 gh}{kT}\right). \tag{13.26}$$

Преобразуем уравнение (13.26) к виду

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(\frac{(m_2 - m_1)gh}{kT}\right). \tag{13.27}$$

Отсюда выразим искомую высоту h

$$h = \frac{kT}{(m_2 - m_1)g} \ln \frac{n_2}{n_1}. \tag{13.28}$$

Задачи

13.1. Определите среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы двухатомного газа, если для $\nu = 1$ кмоль этого газа суммарная кинетическая энергия молекул $E = 6{,}02$ МДж.

13.2. Найдите суммарную кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в $m = 0{,}25$ г водорода при температуре $t = 13$°C.

13.3. Давление идеального газа $p = 2$ мПа, концентрация молекул $n = 2 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$. Определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы и температуру газа.

13.4. Чему равно среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы неона, кислорода и водяного пара при температуре $T = 690$ К?

13.5. Средняя кинетическая энергия поступательного движения каждой молекулы газа $\varepsilon_{\text{пост}} = 5 \cdot 10^{-21}$ Дж. Концентрация молекул $n = 3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Найдите давление газа.

13.6. Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения всех молекул, содержащихся в $m = 2$ кг водорода при температуре $T = 400$ К?

13.7. Газ находится в надувном шарике, объем которого может изменяться. Во сколько раз изменится давление газа, если его объем уменьшится в 1,5 раза, а средняя кинетическая энергия молекул увеличится в 3 раза?

13.8. Температура воздуха $t = 17$°C. На сколько градусов надо повысить температуру, чтобы средняя кинетическая энергия его молекул увеличилась в 3 раза?

13.9. Чему равна концентрация молекул водорода при давлении $p = 0{,}2$ МПа, если их средняя квадратичная скорость $\upsilon_{\text{кв}} = 500$ м/с?

13.10. При нормальных условиях $\nu = 1$ моль кислорода адиабатически сжали так, что его объем уменьшился в 5 раз. Определите среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул газа в конечном состоянии. Газ считать идеальным.

13.11. Масса $m = 1$ кг двухатомного газа находится под давлением $p = 80$ кПа и имеет плотность $\rho = 4$ кг/м^3. Чему равна энергия теплового движения молекул газа при этих условиях? Газ считать идеальным.

13.12. Определите среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, заключенного в сосуде объемом $V = 2$ л при давлении $p = 200$ кПа. Масса газа $m = 3$ г.

13.13. Молекулы азота, находящегося под давлением $p = 100$ кПа, имеют среднюю кинетическую энергию $\varepsilon = 2{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж. Чему равна концентрация молекул газа? Газ считать идеальным.

13.14. Плотность смеси азота и водорода при температуре $t =$ $= 47$°C и давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па составляет $\rho = 0{,}3$ кг/м^3. Найдите концентрацию n_1 молекул азота и концентрацию n_2 молекул водорода в смеси.

13.15. Определите наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорости молекул водорода при температуре $t = 17$°C. Какова для этой температуры доля молекул от общего количества ($\Delta N / N$), скорости которых находятся в малом интервале $\Delta \upsilon = 10$ м/с вблизи наиболее вероятной скорости?

13.16. В результате нагревания давление газа в закрытом сосуде возросло в η раз. Во сколько раз увеличилась средняя квадратичная скорость его молекул?

13.17. Найдите число молекул газа, средняя квадратичная скорость которых при температуре $t = 27$°C оказывается $\upsilon_{кв} = 500$ м/с, если масса газа $m = 10$ г.

13.18. Определите среднюю квадратичную скорость и среднюю энергию поступательного движения молекул азота, если масса $m =$ $= 50$ кг его производит давление $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, занимая объем $V =$ $= 32$ м^3. Какова энергия молекул всей массы газа?

13.19. Оцените среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения частичек тумана диаметром $d = 10$ мкм, находящихся в воздухе при температуре $t = 5$°C.

13.20. Определите среднюю арифметическую скорость молекул идеального газа, плотность которого при давлении $p = 35$ кПа составляет $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

13.21. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре $T = 400$ К, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на $\Delta \upsilon = 5$ м/с?

13.22. Установите, какая часть молекул газа имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость.

13.23. При какой температуре функция распределения по скоростям молекул водорода будет совпадать с функцией распределения по скоростям молекул азота при комнатной температуре $t_0 = 20$°C?

13.24. При каком значении скорости кривые распределения Максвелла для температур T_1 и $T_2 = 2T_1$ пересекаются?

13.25. Определите число молекул гелия в $V = 1$ см^3, скорости которых лежат в интервале от $\upsilon_1 = 2{,}39 \cdot 10^3$ м/с до $\upsilon_2 = 2{,}41 \cdot 10^3$ м/с. Температура гелия $t = 690$°С, его плотность $\rho = 2{,}16 \cdot 10^{-4}$ кг/м^3.

13.26. Чему равно отношение числа молекул водорода, скорости которых лежат в интервале от 100 до 101 м/с, к числу молекул, скорости которых находятся в диапазоне от 10 до 11 м/с, если температура водорода $t = 0$°С?

13.27. Какая часть молекул азота при температуре $T = 400$ К имеет скорости, лежащие в интервале от $\upsilon_в$ до $\upsilon_в + \Delta\upsilon$, где $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость молекул газа при данной температуре, а $\Delta\upsilon = 20$ м/с?

13.28. Определите, какая часть молекул воздуха от общего их числа при температуре $t = 20$°С движется со скоростями от $\upsilon_1 = 350$ м/с до $\upsilon_2 = 360$ м/с. Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

13.29. Какая часть общего числа молекул имеет скорости меньше наиболее вероятной скорости?

13.30. С какой частотой ν должен вращаться барабан центрифуги диаметром $d = 20$ см, чтобы концентрация пылинок массой $m_0 = 10^{-22}$ кг на оси барабана была в 10 раз меньше, чем у стенок? Температура воздуха $t = 20$°С.

13.31. На какой высоте h давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна $t = 10$°С. Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

13.32. На высоте $h = 3$ км над поверхностью земли в единице объема воздуха содержится примерно $N = 10^2$ пылинок, а у самой поверхности – приблизительно $N_0 = 10^5$. Найдите среднюю массу m пылинки и оцените ее размер d, полагая, что плотность пылинки $\rho = 1{,}5$ г/см^3. Температура воздуха $t = 27$°С.

13.33. На поверхности земли барометр показывает $p_0 = 101$ кПа. Определите показание барометра при подъеме его на телевизионную башню высотой $h = 400$ м. Температуру считать постоянной и равной $t = 7$°С. Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

13.34. Найдите давление и число молекул в единице объема воздуха на высоте $h = 2$ км над уровнем моря. Давление на уровне моря $p_0 = 101$ кПа, а температура $t = 17$°С. Изменением температуры с высотой пренебречь. Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

13.35. Определите плотности воздуха ρ_0 у поверхности земли и ρ на высоте $h = 4$ км от поверхности земли. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0$°С. Давление воздуха у поверхности земли принять равным $p_0 = 100$ кПа. Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

§ 14. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

Основные формулы и законы

1. Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A, \tag{14.1}$$

где Q – количество теплоты; ΔU – изменение внутренней энергии системы; A – работа системы.

2. Молярная *C* и удельная *c* теплоемкости:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad c = \frac{\delta Q}{m dT}, \tag{14.2}$$

где δQ – количество теплоты, необходимое для изменения температуры системы на dT; ν, m – соответственно число молей вещества и масса системы.

3. Количество теплоты, необходимое для изменения температуры системы на ΔT при постоянной теплоемкости:

$$Q = \nu C \Delta T = mc\Delta T. \tag{14.3}$$

4. Связь между молярной *C* и удельной *c* теплоемкостями:

$$C = Mc, \tag{14.4}$$

где M – молярная масса.

5. Молярные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме C_V и постоянном давлении C_p:

$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2}, \tag{14.5}$$

где i – число степеней свободы молекулы; R – универсальная газовая постоянная.

6. Показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \tag{14.6}$$

7. Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \nu C_V T. \tag{14.7}$$

8. Внутренняя энергия реального газа:

$$U = \nu C_V T - \frac{a\nu^2}{V}, \tag{14.8}$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса.

9. Работа, совершаемая системой:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \tag{14.9}$$

где V_1, V_2 – соответственно начальный и конечный объемы системы.

10. Работа идеального газа при изобарном процессе:

$$A = p\Delta V = \nu R(T_2 - T_1), \tag{14.10}$$

где T_1, T_2 – соответственно начальная и конечная температуры газа.

11. Работа идеального газа при изотермическом процессе:

$$A = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln\frac{p_1}{p_2}, \tag{14.11}$$

где p_1, p_2 – соответственно начальное и конечное давления газа.

12. Работа идеального газа при адиабатическом процессе:

$$A = -\nu C_V \Delta T = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \tag{14.12}$$

13. Теплота фазового перехода первого рода (плавления, кристаллизации, парообразования, конденсации):

$$Q = mq, \tag{14.13}$$

где m – масса вещества; q – удельная теплота фазового перехода.

Примеры решения задач

Пример 1. Один моль кислорода расширился от объема $V_1 = 1$ л до $V_2 = 3$ л при постоянной температуре $T = 300$ К. Считая газ реальным, определите количество поглощенного газом тепла. Критические значения температуры и давления для кислорода: $T_{кр} = 155$ К, $p_{кр} = 5{,}08$ МПа.

Решение. Количество поглощенного газом тепла определим из первого начала термодинамики (14.1). Для этого найдем изменение внутренней энергии газа ΔU и его работу A.

Так как газ реальный, то из (14.8) при постоянной температуре следует, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \tag{14.14}$$

Работу газа определим по формуле (14.9). Для этого выразим давление реального газа из уравнения Ван-дер-Ваальса (12.7)

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}. \tag{14.15}$$

Подставим (14.15) в формулу (14.9) и выполним интегрирование при условии $T = \text{const}$

$$A = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)dV = \nu RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V - \nu b} - \nu^2 a\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2} =$$

$$= \nu RT\ln\frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} - \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \tag{14.16}$$

Используя (14.14) и (14.16) в первом начале термодинамики (14.1), найдем

$$Q = \nu RT\ln\frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b}. \tag{14.17}$$

Проверим размерность теплоты по формуле (14.17): $[Q]$ = моль × × Дж/(моль · К) · К = Дж.

Постоянную Ван-дер-Ваальса b определим из формул (12.8) для критических значений давления и температуры

$$p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2} \;\Rightarrow\; a = 27b^2 p_{\text{кр}}. \tag{14.18}$$

Подставим a в выражение для $T_{\text{кр}}$ и выразим b

$$b = \frac{RT_{\text{кр}}}{8p_{\text{кр}}} = \frac{8{,}31\cdot 155}{8\cdot 5{,}08\cdot 10^6} \approx 3{,}2\cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}. \tag{14.19}$$

Используя данные условия и (14.19), выполним вычисление по формуле (14.17)

$$Q = 8{,}31\cdot 300\cdot\ln\frac{3\cdot 10^{-3} - 3{,}2\cdot 10^{-5}}{1\cdot 10^{-3} - 3{,}2\cdot 10^{-5}} \approx 2{,}8\ \text{кДж}. \tag{14.20}$$

Пример 2. Определите удельную теплоемкость c_V при постоянном объеме для смеси, состоящей из $\nu_1 = 2$ моль водорода и $\nu_2 = 3$ моль гелия. Газы считать идеальными.

Решение. С одной стороны, количество теплоты, необходимое для изменения температуры смеси на ΔT при постоянном объеме, находится по формуле (14.3)

$$Q = c_V m\Delta T = c_V(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)\Delta T, \tag{14.21}$$

где c_V – удельная теплоемкость смеси; $m = m_1 + m_2 = \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2$ – масса смеси; M_1, M_2 – молярные массы компонентов смеси.

С другой стороны, это же количество теплоты можно выразить через молярные теплоемкости при постоянном объеме (см. формулу (14.5)) компонентов смеси

$$Q = C_{V_1}\nu_1\Delta T + C_{V_2}\nu_2\Delta T = \frac{(i_1\nu_1 + i_2\nu_2)R\Delta T}{2}, \tag{14.22}$$

где i_1, i_2 – число степеней свободы молекул водорода и атомов гелия соответственно.

Приравняв правые части выражений (14.21) и (14.22), найдем

$$c_V = \frac{(i_1\nu_1 + i_2\nu_2)R}{2(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)}. \tag{14.23}$$

Учитывая, что для водорода $i_1 = 5$, $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и для гелия $i_2 = 3$, $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, выполним вычисление по формуле (14.23)

$$c_V = \frac{(5\cdot 2 + 3\cdot 3)\cdot 8{,}31}{2\cdot(2\cdot 2\cdot 10^{-3} + 3\cdot 4\cdot 10^{-3})} \approx 4{,}9\cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}. \tag{14.24}$$

Задачи

14.1. В сосуде находится гелий, который изобарно расширяется. При этом к нему подводится количество теплоты $Q = 15$ кДж. Определите работу A и изменение внутренней энергии ΔU газа. Газ считать идеальным.

14.2. При расширении одноатомного идеального газа от $V_1 = 0{,}2$ м^3 до $V_2 = 0{,}5$ м^3 его давление линейно возросло от $p_1 = 4$ атм до $p_2 = 8$ атм. Найдите работу A и изменение внутренней энергии ΔU газа. Какое количество теплоты Q к нему было подведено?

14.3. Определите работу расширения воздуха массой $m = 5$ кг при постоянном давлении и количество теплоты, переданное ему, если в процессе расширения температура газа повысилась на $\Delta t = 175°C$. Газ считать идеальным. Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

14.4. Какое количество теплоты потребуется для нагревания $V = 5$ м^3 окиси углерода (угарного газа, CO) от температуры $t_1 = 0°C$ до $t_2 = 220°C$, если газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим невесомым поршнем? Атмосферное давление $p_0 = 9{,}35 \cdot 10^4$ Па. Газ считать идеальным.

14.5. Найдите удельные теплоемкости c_V и c_p воздуха, считая, что в его составе содержится: 78,09% азота, 20,95% кислорода, 0,93% аргона и 0,03% углекислого газа. Газы считать идеальными.

14.6. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона Ne и водорода H_2, если массовые доли неона и водорода соответственно равны $\eta_1 = 80\%$ и $\eta_2 = 20\%$. Газы считать идеальными.

14.7. Некоторый идеальный газ при температуре $t = 15°C$ и давлении $p = 1$ атм имеет удельный объем $V / m = 0{,}738$ м^3/кг. Чему равны удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа?

14.8. Для изобарического нагревания идеального газа массой $m = 150$ г на $\Delta T = 12$ К требуется на $\Delta Q = 7{,}44$ кДж тепла больше, чем при его изохорическом нагревании. Определите газ и его молярные теплоемкости C_p и C_V.

14.9. Идеальный двухатомный газ занимает объем $V_1 = 5$ дм^3 при давлении $p_1 = 200$ кПа. В конце адиабатического расширения его объем увеличился до $V_2 = 7$ дм^3. В ходе дальнейшего изохорного охлаждения давление газа упало до $p_1 = 100$ кПа. Найдите работу газа, изменение внутренней энергии и количество теплоты, отданное газом. Изобразите процесс графически.

14.10. Баллон емкостью $V = 15$ л с кислородом, находящимся при давлении $p_1 = 200$ кПа и температуре $t_1 = 22°C$, нагревается до $t_2 = 25°C$. Какое количество тепла Q при этом получает газ? Газ считать идеальным.

14.11. Определите молярную массу M двухатомного идеального газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность удельных теплоемкостей этого газа $c_p - c_V = 260$ Дж/(кг $\cdot$ К).

14.12. Азот в количестве $\nu = 3$ моль расширяется адиабатно в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 5$ л. Найдите изменение температуры ΔT при этом расширении. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной? Для азота критическая температура $T_{кр}$ = 126 К, критическое давление $p_{кр}$ = 3,49 МПа.

14.13. Определите количество теплоты Q, которое надо сообщить кислороду объемом V = 50 л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на Δp = 0,5 МПа. Газ считать идеальным.

14.14. В цилиндре диаметром d = 30 см и высотой h = 50 см с подвижным поршнем находится идеальный газ под давлением p = 150 кПа при температуре t_1 = 250°С. Чему равна работа A, совершаемая газом, при снижении температуры до t_2 = 5°С при постоянном давлении?

14.15. Найдите удельные теплоемкости c_V и c_p парообразного йода I_2, если степень диссоциации его α = 0,5. Молярная масса молекулярного йода M = 0,254 кг/моль. Газ считать идеальным.

14.16. При изотермическом расширении азота при температуре T = 280 К его объем увеличился в 2 раза. Масса азота m = 0,2 кг. Определите: 1) совершенную при расширении работу A; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) количество теплоты Q, полученное газом. Газ считать идеальным.

14.17. Чему равны удельные теплоемкости c_p и c_V смеси кислорода массой m_1 = 8 г и азота массой m_2 = 9 г? Газы считать идеальными.

14.18. Определите показатель адиабаты для смеси газов, содержащей гелий He массой m_1 = 8 г и водород H_2 массой m_2 = 2 г. Газы считать идеальными.

14.19. Двухатомный идеальный газ расширили так, что его давление зависело от объема по закону $p = \alpha V$, где α – некоторая постоянная. Найдите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

14.20. Азот массой m = 1 кг занимает при температуре T_1 = 300 К объем V_1 = 0,5 м^3. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в n = 3 раза. Определите: 1) конечный объем газа V_2; 2) конечную температуру T_2; 3) изменение внутренней энергии газа ΔU. Газ считать идеальным.

14.21. Азот, находившийся при температуре T_1 = 400 К, подвергли адиабатному расширению. В результате расширения объем увеличился в n = 5 раз, а внутренняя энергия уменьшилась на ΔU = = –4 кДж. Чему равна масса азота? Газ считать идеальным.

14.22. Кислород в количестве ν = 2 моль занимает объем V_1 = 1 л. Считая газ реальным, определите изменение температуры ΔT кислорода, если он адиабатно расширяется в вакуум до объема V_2 = 10 л. Для кислорода критическая температура $T_{кр}$ = 155 К, критическое давление $p_{кр}$ = 5,08 МПа.

14.23. Идеальный одноатомный газ совершает процесс, при котором его внутренняя энергия зависит от объема по закону $U = \alpha V^2$, где α – некоторая постоянная. Найдите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

14.24. Кислород массой m = 200 г занимает объем V_1 = 100 л и находится под давлением p_1 = 200 кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема V_2 = 300 л, а затем его давление возросло до p_3 = 500 кПа при неизменном объеме. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и теплоту Q, переданную газу. Постройте график процесса. Газ считать идеальным.

14.25. Водород, занимающий при давлении p_1 = 0,5 МПа объем V_1 = 10 л, расширяется в n = 4 раза. В каком из процессов – изотермическом или адиабатическом – газ совершает бóльшую работу и на сколько? Газ считать идеальным.

14.26. В баллоне емкостью V = 10 л содержится азот при температуре t_1 = 18°C и под давлением p_1 = 250 кПа. Нагреваясь солнечными лучами, азот получил Q = 450 Дж теплоты. Найдите температуру и давление азота после нагревания. Газ считать идеальным.

14.27. При изобарном нагревании ν = 2 моль некоторого идеального газа на ΔT = 90 К ему было сообщено количество теплоты Q = 5,25 кДж. Определите: 1) работу A, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии ΔU; 3) показатель адиабаты γ.

14.28. Азот массой m = 0,1 кг был изобарно нагрет от температуры T_1 = 200 К до температуры T_2 = 400 К. Найдите работу A, совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии азота. Газ считать идеальным.

14.29. Азот в количестве ν = 2 моль адиабатно расширяется в вакуум. Температура газа при этом уменьшается на 1 К. Чему равна работа, которая совершается газом против межмолекулярных сил притяжения?

14.30. Кислород в количестве ν = 1 моль, занимавший при температуре T_1 = 400 К объем V_1 = 1 л, расширяется изотермически до объема $V_2 = 2V_1$. Считая газ реальным, определите работу при расширении и изменение внутренней энергии. Постоянные Ван-дер-Ваальса соответственно равны a = 0,136 Н · м^4/моль^2 и $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

14.31. Во сколько раз увеличится объем ν = 0,4 моль водорода при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество теплоты $Q = 800$ Дж? Температура водорода $T = 300$ К. Газ считать идеальным.

14.32. При адиабатном расширении $\nu = 2$ моль кислорода, находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в $n = 3$ раза. Найдите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа. Газ считать идеальным.

14.33. В результате изотермического сжатия газа массой $m = 6$ кг его давление увеличилось в $n = 4$ раза и работа, затраченная на сжатие, составила $A = 7{,}59 \cdot 10^5$ Дж. Определите газ и его первоначальный объем, если в начальный момент времени газ находился под давлением $p_1 = 0{,}5$ МПа и при температуре $T_1 = 308$ К.

14.34. Идеальный газ объемом $V_1 = 10$ л находится под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па. Чему равна работа, которую совершит газ при изотермическом увеличении объема до $V_2 = 28$ л?

14.35. Какую скорость должна иметь свинцовая пуля, чтобы: 1) при ударе о стальную плиту она полностью расплавилась; 2) при ударе о стальную плиту она расплавилась наполовину? Считать, что вся кинетическая энергия пули идет на ее нагрев. Начальная температура пули $T_1 = 300$ К. Удельная теплота плавления свинца $q = 2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг, температура его плавления $T_{пл} = 600$ К, удельная теплоемкость свинца $c = 1{,}3 \cdot 10^2$ Дж/(кг · К).

14.36. Массу $m = 12$ г гелия, находящуюся при температуре $T_1 = 308$ К, охладили изохорически, в результате чего давление газа уменьшилось в $n = 4$ раза. Затем газ изобарически расширили так, что в конечном состоянии его температура стала равна первоначальной. Определите суммарное количество тепла Q в этих процессах и изобразите их графически. Газ считать идеальным.

14.37. Изохорная и изобарная удельные теплоемкости идеального газа равны соответственно $c_V = 3{,}15 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) и $c_p = 5{,}23 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Чему равна молярная масса газа?

14.38. Некоторый идеальный газ при нормальных условиях имеет плотность $\rho = 1{,}429$ кг/м^3. Определите, какой это газ, и найдите его удельные изобарную и изохорную теплоемкости.

14.39. Идеальный газ может перейти из состояния A в состояние C двумя способами: 1) A–B–C; 2) A–C (рис. 14.1). Чему равно отношение работ, затраченных на эти переходы, если известно, что $p_2 = np_1$ $(n > 1)$?

14.40. Кислород массой $m = 3$ кг, находящийся при температуре $T_1 = 296$ К и занимающий объем $V_1 = 1{,}5$ м^3, сжали адиабатически так, что его давление увеличилось в $n = 3$ раза. Определите конечные объем V_2, температуру T_2 и изменение внутренней энергии ΔU газа. Газ считать идеальным.

14.41. Одноатомный идеальный газ ($\nu = 1$ моль) совершает процесс A–B–C (рис. 14.2). Чему равно изменение внутренней энергии при переходе из состояния A в состояние C, если известно, что в начальном состоянии температура газа равна T_0?

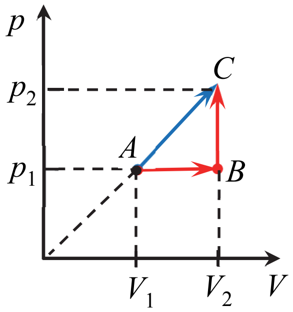


Рис. 14.1

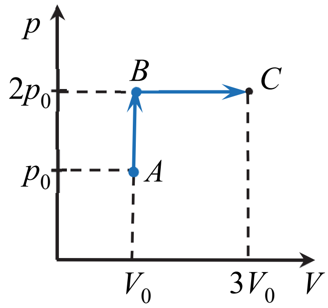


Рис. 14.2

14.42. Идеальный газ в количестве $\nu = 5$ моль изотермически расширили в $n = 4$ раза, а затем изохорически нагрели так, что его давление стало равным первоначальному. За весь процесс газу сообщили количество тепла $Q = 109{,}3$ кДж. Постройте диаграмму процесса и определите молярную теплоемкость газа при постоянном объеме, если начальная температура газа $t = 23$°C.

§ 15. Второе начало термодинамики

Основные формулы и законы

1. Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}, \qquad (15.1)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное холодильнику; $A = Q_1 - Q_2$ – работа за цикл.

2. КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{15.2}$$

где T_1, T_2 – температуры соответственно нагревателя и холодильника.

3. Энтропия системы:

$$S = k \ln \Omega, \tag{15.3}$$

где k – постоянная Больцмана; Ω – статистический вес.

4. Изменение энтропии при переходе системы из состояния *1* в состояние *2*:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \tag{15.4}$$

5. Изменение энтропии идеального газа:

$$\Delta S = \nu \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \tag{15.5}$$

6. Изменение энтропии при фазовом переходе первого рода (плавлении, кристаллизации, парообразовании и конденсации):

$$\Delta S = \frac{mq}{T_0}, \tag{15.6}$$

где q, T_0 – соответственно удельная теплота и температура фазового перехода.

Примеры решения задач

Пример 1. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, выполняет за один цикл работу A = 16 кДж. При этом температура нагревателя в n = 1,8 раза больше температуры холодильника. Определите работу изотермического сжатия.

Решение. Диаграмма цикла Карно показана на рис. 15.1. Работу газа при изотермическом расширении на участке *1–2* и изотермическом сжатии на участке *3–4* определим по формуле (14.11)

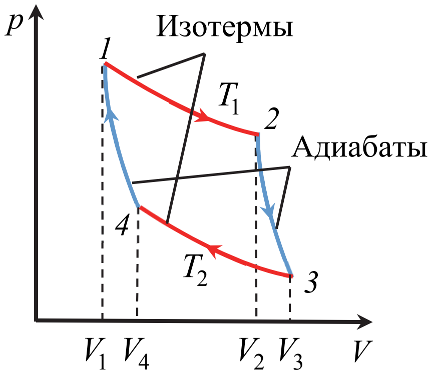


Рис. 15.1

$$A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad (15.7)$$

$$A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}, \qquad (15.8)$$

где ν – число молей газа; R – универсальная газовая постоянная; T_1, T_2 – температуры соответственно нагревателя и холодильника; V_1, V_2, V_3 и V_4 – объемы газа соответственно в состояниях *1*, *2*, *3*, *4*.

Используя уравнение адиабаты (12.6) в T, V-переменных для процессов *2–3* и *4–1*, найдем связь между объемами газа

$$\left.\begin{aligned} T_1V_2^{\gamma-1} &= T_2V_3^{\gamma-1} \\ T_1V_1^{\gamma-1} &= T_2V_4^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}, \qquad (15.9)$$

где γ – показатель адиабаты.

С учетом соотношения (15.9) из формул (15.7), (15.8) следует, что

$$A_{34} = -A_{12}\frac{T_2}{T_1} = -\frac{A_{12}}{n} = -\frac{Q_1}{n}, \qquad (15.10)$$

где принято во внимание, что газ получает тепло на участке *1–2* и количество теплоты, полученное за цикл, $Q_1 = A_{12}$.

Из формулы (15.2) для КПД цикла Карно имеем

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{n-1}{n}. \qquad (15.11)$$

Количество теплоты, полученное за цикл, найдем из (15.1) с учетом (15.11)

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{n}{n-1}A. \qquad (15.12)$$

Подставив (15.12) в (15.10), определим работу изотермического сжатия

$$A_{34} = -\frac{A}{n-1} = -\frac{16}{1{,}8-1} = -20 \text{ кДж}. \qquad (15.13)$$

Знак минус показывает, что над газом выполняют работу внешние силы.

Пример 2. Кислород массой m = = 16 г адиабатически расширили в n = = 2 раза, а затем изобарически сжали до первоначального объема. Найдите изменение энтропии газа в этом процессе. Газ считать идеальным.

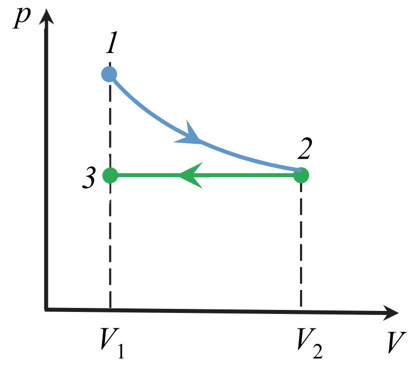


Рис. 15.2

Решение. Диаграмма процесса представлена на рис. 15.2. Общее изменение энтропии складывается из изменений ее в отдельных процессах, т. е.

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}, \tag{15.14}$$

где ΔS_{12}, ΔS_{23} – изменение энтропии соответственно при адиабатическом и изобарическом процессах.

При адиабатическом процессе *1–2* количество переданной теплоты $\delta Q = 0$. Поэтому изменение энтропии (см. формулу (15.4)) в этом процессе

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = 0. \tag{15.15}$$

Изменение энтропии при изобарном сжатии *2–3* определим по формуле (15.5)

$$\Delta S_{23} = \nu\left(C_V \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + R\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)\right), \tag{15.16}$$

где $\nu = m / M$ – число молей газа; M – молярная масса; C_V – молярная теплоемкость (см. формулу (14.5)) при постоянном объеме; T_2, T_3 и V_2, V_3 – соответственно температуры и объемы газа в состояниях *2* и *3*.

Поскольку процесс *2–3* изобарический, то $T / V = \text{const}$, поэтому

$$\frac{T_2}{V_2} = \frac{T_3}{V_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{n}. \tag{15.17}$$

Подставим (15.15) и (15.16) с учетом (15.17) в формулу (15.14), получим

$$\Delta S = \frac{m}{M}\left(\frac{i}{2}R\ln\frac{1}{n} + R\ln\frac{1}{n}\right) = -\frac{m}{M}\frac{i+2}{2}R\ln n. \tag{15.18}$$

Проверим единицы измерения по формуле (15.18)

$$[\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}}{\text{кг/моль}} = \text{Дж/К}. \tag{15.19}$$

Принимая во внимание, что молярная масса кислорода M = $= 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и число степеней свободы двухатомной молекулы O_2 $i = 5$, выполним вычисление

$$\Delta S = -\frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot (5+2)}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \cdot 8{,}31 \cdot \ln 2 \approx -10 \text{ Дж/К}. \tag{15.20}$$

Задачи

15.1. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприемнику теплоту $Q_2 = 14$ кДж. Найдите температуру T_1 теплоотдатчика, если при температуре теплоприемника $T_2 = 280$ К работа цикла $A = 6$ кДж.

15.2. Идеальный трехатомный газ нагревается при постоянном объеме так, что его давление возрастает в $n = 2$ раза. После этого газ изотермически расширяется до первоначального давления и затем изобарно сжимается до начального объема. Представьте диаграмму цикла и определите его КПД.

15.3. Идеальный двухатомный газ ($\nu = 3$ моль), занимающий объем $V_1 = 5$ л и находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа, подвергли изохорному нагреванию до $T_2 = 500$ К. После этого газ изотермически расширился до начального давления, а затем в результате изобарного сжатия он возвращен в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите его КПД.

15.4. Работа идеального газа, который совершает цикл Карно с КПД $\eta = 25\%$, при изотермическом расширении $A = 240$ Дж. Найдите работу газа при изотермическом сжатии.

15.5. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет температуру нагревателя $t_1 = 227°\text{C}$, температуру холодильника $t_2 = 27°\text{C}$. Во сколько раз нужно увеличить температуру нагревателя при неизменной температуре холодильника, чтобы КПД машины увеличился в 2 раза?

15.6. Тепловая машина работает по циклу Карно, КПД которого $\eta = 0{,}15$. Каков будет холодильный коэффициент $\eta_х$ машины, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении? Холодильный коэффициент численно равен отношению количества теплоты, отнятой от охлаждаемого тела, к работе двигателя, приводящего в движение машину, за цикл.

15.7. Газ, совершая цикл Карно, получил от нагревателя количество теплоты Q_1 = 5,5 кДж и совершил работу A = = 1,1 кДж за цикл. Определите: 1) КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника.

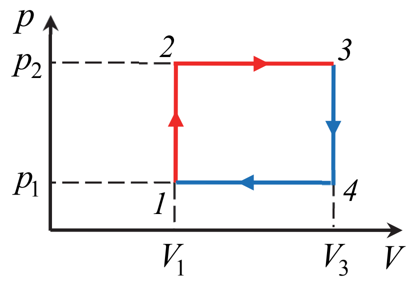


Рис. 15.3

15.8. Воздух массой m = 1 кг совершает цикл, который состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 15.3). Начальный объем газа V_1 = = 80 дм^3, давление изменяется от p_1 = 1,2 МПа до p_2 = 1,4 МПа, температура t_3 = 150°С. Чему равен КПД цикла? Газ считать идеальным.

15.9. Идеальный двухатомный газ, находящийся при давлении p_1 = 0,5 МПа, нагревают изохорически до давления p_2 = 0,74 МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем был изобарно сжат до первоначального объема. Постройте диаграмму цикла и определите его КПД.

15.10. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изобарного и адиабатического расширений, изотермического сжатия в первоначальное состояние. При изобарном процессе температура газа изменяется от T_1 = 300 К до T_2 = 600 К. Постройте диаграмму цикла и найдите его КПД.

15.11. Идеальный двухатомный газ совершает прямой цикл, состоящий из двух изобар и двух адиабат. Во сколько раз изменяется давление газа в пределах цикла, если КПД цикла η = 0,2?

15.12. За один цикл идеальный тепловой двигатель, работающий по циклу Карно, поднимает поршень массой m = 4 кг на высоту h = 20 см и сжимает при этом пружину жесткостью k = 200 кН/м на Δl = 5 см. Какое количество теплоты получает рабочее вещество, если абсолютная температура нагревателя в n = 2,5 раза больше температуры холодильника?

15.13. Идеальный газ массой m и молярной массой M совершает циклический процесс, изображенный на рис. 15.4. Определите работу за цикл, если температура в состоянии *1* и *2* соответственно равна T_1 и T_2, а на участке *2–3* объем газа увеличился в n раз.

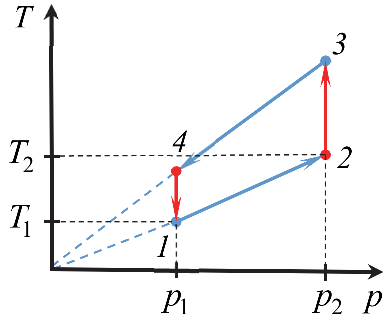


Рис. 15.4

15.14. Идеальный одноатомный газ совершает прямой цикл, состоящий из двух изохор и двух адиабат. Во сколько раз изменяется объем газа в пределах цикла, если КПД цикла $\eta = 0{,}24$?

15.15. Идеальный трехатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (см. рис. 15.3 на с. 155). Определите КПД цикла, если $V_1 = 1$ л, $V_3 = 3$ л, $p_1 = 1$ МПа, $p_2 = 2$ МПа.

15.16. В циклическом процессе идеальный двухатомный газ вначале изохорически увеличивает давление в $n_1 = 2$ раза, потом изобарически расширяется так, что его объем увеличивается в $n_2 = 3$ раза, а затем газ возвращается в исходное состояние в процессе, при котором давление линейно зависит от объема. Постройте диаграмму цикла и найдите его КПД.

15.17. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изохорного увеличения давления, потом адиабатического расширения, а затем изотермического сжатия в первоначальное состояние. Максимальная температура в цикле отличается от минимальной в $n = 1{,}2$ раза. Постройте диаграмму цикла и определите его КПД.

15.18. Какое количество теплоты, полученной от нагревателя, превращается в работу A в цикле Карно, если изменение энтропии на участке между двумя адиабатами $\Delta S = 5$ кДж/К, а разность температур между двумя изотермами $T_1 - T_2 = 100$ К?

15.19. Рабочее вещество совершает циклический процесс (рис. 15.5). В пределах цикла абсолютная температура изменяется в $n = 1{,}6$ раза. Найдите КПД цикла.

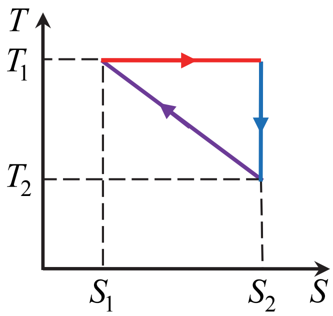


Рис. 15.5

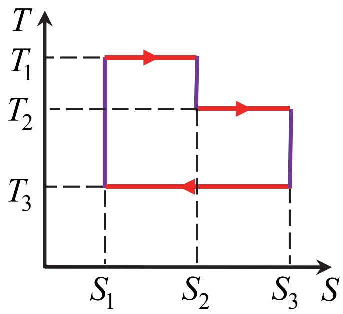


Рис. 15.6

15.20. Рабочее вещество совершает цикл (рис. 15.6). Изотермические процессы происходят при температурах $T_1 = 400$ К, $T_2 = 300$ К и $T_3 = 250$ К. Определите КПД цикла, если при каждом изотермическом расширении энтропия увеличивается на одну и ту же величину.

15.21. В резиновом шаре находится азот массой $m = 14$ г. Температура газа $T_1 = 300$ К. Чему равно изменение энтропии газа при его нагреве на $\Delta T = 20$ К, если считать, что давление внутри шара все время было равным атмосферному?

15.22. Определите изменение энтропии воздуха массой $m = 40$ мг при переходе от объема $V_1 = 30$ л при температуре $t_1 = 18°C$ к объему $V_2 = 60$ л при температуре $t_2 = 34°C$.

15.23. Найдите изменение энтропии при переходе массы $m = 4$ г азота объемом $V_1 = 40$ л под давлением $p_1 = 140$ кПа к объему $V_2 =$ $= 60$ л под давлением $p_2 = 100$ кПа.

15.24. Кислород массой $m = 7$ г расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2 = 4V_1$. Определите изменение энтропии при этом расширении.

15.25. При каких условиях (изохорический или изобарический процесс) производилось нагревание гелия массой $m = 16$ г от температуры $t_1 = 27°C$ до температуры $t_2 = 57°C$, если в результате этого энтропия увеличилась на $\Delta S = 4{,}75$ Дж/К?

15.26. Два одинаковых резиновых шара содержат соответственно $m = 28$ г азота и гелия при одинаковой температуре. Определите отношение изменения энтропии газа в двух шарах при их нагреве на $\Delta T = 50$ К. Как изменится результат, если шары охладить на $\Delta T = 50$ К? Принять, что давление внутри шаров при нагревании (охлаждении) поддерживалось равным атмосферному за счет растяжения (сжатия) оболочки шаров.

15.27. Теплоизолированный сосуд, разделенный перегородкой на две части, объем которых $V_1 = 2$ л и $V_2 = 3$ л, содержит в каждой из частей различные идеальные газы при одинаковой температуре $T = 300$ К. Давление газа в первой части $p_1 = 10^5$ Па, а во второй – $p_2 = 5p_1$. Чему равно изменение энтропии газа в сосуде, после того как убрана перегородка?

15.28. Как изменился объем $\nu = 1$ моль идеального газа при его изотермическом расширении, если энтропия газа увеличилась на $\Delta S = 13{,}4$ Дж/К?

15.29. Идеальный двухатомный газ ($\nu = 10$ моль), находящийся в закрытом сосуде, нагрели на $\Delta T = 100$ К. Определите изменение энтропии при нагревании, если начальная температура газа $T_1 = 273$ К.

15.30. Идеальный газ ($\nu = 10$ моль) с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$ при нагревании увеличился в объеме в $n = 2$ раза, а его давление стало равным $p_2 = 3{,}039 \cdot 10^5$ Па. Найдите изменение энтропии газа при нагревании, если начальное давление было равно нормальному атмосферному давлению.

15.31. Два моль азота вначале изотермически расширяют от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$, после чего изобарно сжимают до первоначального объема. Постройте график процесса и определите изменение энтропии азота. Газ считать идеальным.

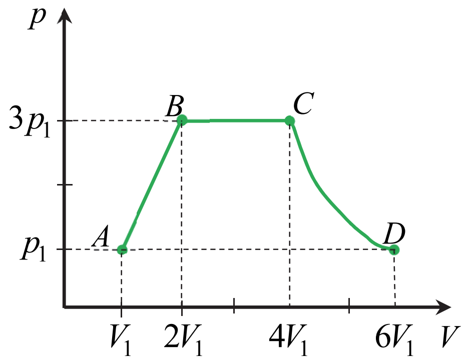


Рис. 15.7

15.32. Чему равно изменение энтропии $\nu = 1$ моль идеального двухатомного газа в результате процесса A–B–C–D (рис. 15.7), если известно, что на участке C–D температура оставалась неизменной?

15.33. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu = 1$ моль находится в сосуде при температуре $T_1 = 300$ К. Как и во сколько раз изменится статистический вес этой макросистемы при ее изохорном нагревании на $\Delta T = 1$ К? Как изменится результат, если газ будет двухатомным?

15.34. Энтропия термодинамической системы в некотором процессе зависит от температуры по закону $S = \alpha T^2$, где α – положительная константа. Определите зависимость теплоемкости системы от температуры в этом процессе и количество теплоты, сообщенное системе, при ее нагревании от T_1 до T_2.

15.35. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс, в котором давление газа зависит от объема по закону $p = p_0 - aV$, где p_0 и a – положительные постоянные. Чему равен объем, занимаемый газом, при котором его энтропия будет максимальной?

15.36. Газ Ван-дер-Ваальса в начальном состоянии при температуре T_1 занимает объем V_1. В ходе некоторого процесса газ переходит в состояние с температурой T_2 и объемом V_2. Считая количество вещества ν, изохорную теплоемкость C_V и поправку Ван-дер-Ваальса b известными, найдите выражение для изменения энтропии газа в этом процессе.

15.37. В теплоизолированном сосуде, который разделен перегородкой на две части с объемами V_1 и $V_2 = nV_1$, содержатся различные идеальные газы в количестве ν_1 и ν_2 соответственно. Температура газа в обеих частях одинакова. Определите изменения энтропии смеси газов в сосуде, после того как перегородку убрали.

15.38. Система состоит из двух одинаковых теплоизолированных сосудов, соединенных между собой трубкой с вентилем, содержащих по $\nu = 1$ моль одного и того же газа. Температура газа в одном сосуде T_1, а в другом – T_2. Найдите установившуюся температуру и изменение энтропии в системе, после того как вентиль открыли. Газ считать идеальным с известной молярной теплоемкостью C_V.

15.39. Определите изменение энтропии при адиабатическом объединении объемов азота массой $m_1 = 3$ кг и углекислого газа массой $m_2 = 2$ кг. Температура и давление газов до смешивания одинаковы. Газы считать идеальными.

15.40. К воде массой $m_1 = 50$ г при температуре $t_1 = 20°C$ добавили $m_2 = 100$ г льда при температуре $t_2 = 0°C$. Найдите изменение энтропии ΔS системы, когда она придет в равновесное состояние. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $q = 335$ кДж/кг.

15.41. Расплавленный алюминий массой $m = 780$ г, находящийся при температуре плавления ($t_{пл} = 660°C$), вылили на лед ($t = 0°C$). Считая систему «алюминий – лед» замкнутой, определите изменение энтропии ΔS при установлении равновесия. Удельную теплоемкость и удельную теплоту плавления алюминия примите равными $c = 898$ Дж/(кг · К) и $q = 395$ кДж/кг соответственно.

15.42. Лед массой $m = 3$ кг, находящийся при температуре $t_0 = -20°C$, нагрели и превратили в пар. Найдите изменение энтропии. Удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $q_л = 335$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $q_в = 2{,}26$ МДж/кг.

15.43. Определите изменение энтропии при кристаллизации свинца массой $m = 2$ кг при температуре $t_{пл} = 327°C$ и дальнейшем охлаждении до $t = 0°C$. Удельная теплоемкость свинца $c = 126$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления свинца $q = 22{,}6$ кДж/кг.

§ 16. Жидкости

Основные формулы и законы

1. Коэффициент поверхностного натяжения:

$$\alpha = \frac{A}{\Delta S}, \qquad (16.1)$$

где A – работа, необходимая для изменения площади поверхности жидкости на ΔS.

2. Формула Лапласа для добавочного давления:

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (16.2)$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости.

3. Высота подъема жидкости в капиллярной трубке:

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r}, \qquad (16.3)$$

где θ – краевой угол; ρ – плотность жидкости; r – радиус трубки.

4. Коэффициент объемного расширения при изменении температуры тела:

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \approx \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta t}. \qquad (16.4)$$

Примеры решения задач

Пример. В сосуде с воздухом при нормальном атмосферном давлении находится мыльный пузырек диаметром $d_0 = 1$ см. Во сколько раз надо изотермически уменьшить давление воздуха, чтобы диаметр пузырька увеличился в $n = 1{,}5$ раза? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 40$ мН/м.

Решение. Давление внутри пузырька определяется давлением в сосуде p_0 и добавочным давлением Δp, обусловленным кривизной поверхности пузырька. В начальном состоянии давление внутри пузырька

$$p_1 = p_0 + \Delta p. \qquad (16.5)$$

Принимая во внимание, что пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности (внешнюю и внутреннюю) почти одинакового радиуса R_0, добавочное давление в пузырьке найдем по формуле (16.2) при $R_1 = R_2 = R_0 = d_0 / 2$

$$\Delta p = 2\frac{2\alpha}{R_0} = \frac{8\alpha}{d_0}. \qquad (16.6)$$

После уменьшения давления воздуха в сосуде в k раз давление внутри пузырька

$$p_2 = \frac{p_0}{k} + \frac{8\alpha}{d}, \tag{16.7}$$

где d – диаметр пузырька после увеличения давления.

Поскольку процесс уменьшения давления изотермический, то

$$p_1V_1 = p_2V_2, \tag{16.8}$$

где $V_1 = \pi d_0^3 / 6$, $V_2 = \pi d^3 / 6$ – объемы пузырька соответственно до и после уменьшения давления воздуха в сосуде.

Подставив в уравнение (16.8) выражение (16.5) с учетом (16.6) и (16.7), получим

$$\left(p_0 + \frac{8\alpha}{d_0}\right)d_0^3 = \left(\frac{p_0}{k} + \frac{8\alpha}{d}\right)d^3. \tag{16.9}$$

Отсюда найдем k, учитывая, что, согласно условию $d / d_0 = n$,

$$p_0 + \frac{8\alpha}{d_0}\left(1 - n^2\right) = \frac{p_0}{k}n^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{p_0 n^3}{p_0 + \frac{8\alpha}{d_0}\left(1 - n^2\right)}. \tag{16.10}$$

Выполним вычисление по формуле (16.10), приняв во внимание, что нормальное атмосферное давление $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па:

$$k = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5^3}{1{,}01 \cdot 10^5 + \frac{8 \cdot 0{,}04}{0{,}01} \cdot \left(1 - 1{,}5^2\right)} \approx 3{,}4. \tag{16.11}$$

Задачи

16.1. При слиянии n мелких капель воды радиусом $r = 0{,}02$ мм в одну большую каплю радиусом $R = 2$ мм освобождается энергия $\Delta E = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж. Найдите по этим данным коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

16.2. Три капли воды радиусом $r = 1{,}2$ мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если коэффициент поверхностного натяжения воды $\alpha = 0{,}07$ Н/м.

16.3. Чему равен радиус капли, полученной в результате слияния $N = 8$ капель ртути радиусом $r = 1{,}5$ мм каждая? Считая, что вся выделившаяся при этом энергия идет на нагревание капли, определите изменение ее температуры. Коэффициент поверхностного натяжения, удельную теплоемкость ртути и ее плотность считать равными $\alpha = 0{,}465$ Н/м, $c = 140$ Дж/(кг · К) и $\rho = 13{,}6$ г/см^3 соответственно.

16.4. Вычислите объем, занимаемый молекулой воды, и оцените ее линейный размер (диаметр).

16.5. При каком давлении находится кровь в капельке сферической формы диаметром $d = 100$ мкм при нормальных условиях? Коэффициент поверхностного натяжения крови принять равным $\alpha = 61$ мН/м.

16.6. Определите работу, которую надо совершить, чтобы увеличить диаметр мыльного пузыря с $d_1 = 4$ мм до $d_2 = 40$ мм. Процесс считать изотермическим. Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным $\alpha = 40$ мН/м.

16.7. Давление внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 145$ Па больше атмосферного. Чему равен диаметр пузыря, если поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}04$ Н/м?

16.8. Определите силу, которую нужно приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой $h = 5$ мм, внутренним радиусом $r_1 = 30$ мм и внешним радиусом $r_2 = 31$ мм, чтобы оторвать его от поверхности воды. Какую часть найденной силы составляет сила поверхностного натяжения? Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3, коэффициент поверхностного натяжения воды $\alpha = 0{,}07$ Н/м.

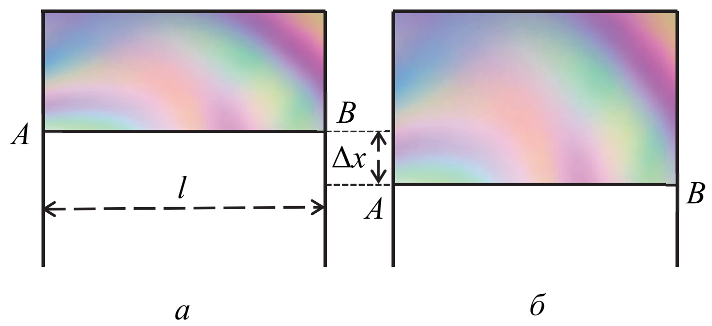
16.9. Чему равно давление воздуха внутри пузырька радиусом $R = 5 \cdot 10^{-3}$ мм, расположенного под поверхностью воды? Атмосферное давление $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

16.10. На дне озера образовался пузырек газа радиусом $R_1 = 2$ мкм. При подъеме этого пузырька к поверхности воды его радиус увеличился в $n = 1{,}1$ раза. Найдите глубину озера в данном месте, если поверхностное натяжение воды $\alpha = 73$ мН/м. Атмосферное давление нормальное, процесс расширения газа считать изотермическим.

16.11. Легкое кольцо внутренним радиусом $r_1 = 18$ мм и внешним радиусом $r_2 = 19$ мм подвешено на пружине и соприкасается с поверхностью жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой равен $\alpha = 0{,}02$ Н/м. Жесткость пружины $k = 0{,}98$ Н · м. Чему равна величина растяжения пружины в момент отрыва кольца от поверхности жидкости?

16.12. Вертикально расположенная рамка с подвижной нижней перекладиной AB диаметром $d = 2$ мм (рисунок, *а*) затянута мыльной пленкой ($\alpha = 42$ мН/м). Определите плотность материала перекладины, если она находится в равновесии.

16.13. Горизонтальная рамка с подвижной перекладиной AB длиной $l = 20$ см затянута мыльной пленкой (рисунок, *а*). Какую работу нужно совершить против сил поверхностного натяжения, чтобы растянуть пленку на $\Delta x = 6$ см (рисунок, *б*), если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора составляет $\alpha = 0{,}045$ Н/м?



Рисунок

16.14. На какую глубину погрузится нижняя грань смачиваемого водой кубика, плавающего на поверхности воды? Масса кубика $m = 75$ г, его ребро $a = 5$ см, коэффициент поверхностного натяжения воды $\alpha = 73$ мН/м.

16.15. Определите время, за которое из вертикальной трубки внутренним диаметром $d = 1$ мм по каплям вытечет $m = 10$ г глицерина ($\alpha = 65{,}7$ мН/м). Капли отрываются через $\Delta\tau = 3$ с одна после другой. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

16.16. Чему равен радиус капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки радиусом $r = 1{,}5$ мм? Считать, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта $\alpha = 22$ мН/м, а его плотность $\rho = 800$ кг/м^3.

16.17. Капля этилового спирта массой $m = 0{,}2$ г введена между двумя плоскими и параллельными между собой стеклянными пластинками, смачиваемыми этанолом, причем краевой угол $\theta = 0$. Определите силу притяжения между пластинками, если они находятся друг от друга на расстоянии $d = 2$ мкм. Коэффициент поверхностного натяжения этилового спирта $\alpha = 22$ мН/м и его плотность $\rho = 790$ кг/м^3.

16.18. Между двумя вертикальными плоскопараллельными стеклянными пластинами налита жидкость. Найдите плотность жидкости, если она поднимается на высоту $h = 4{,}7$ мм при расстоянии между пластинами $d = 2$ мм. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости при данной температуре $\alpha = 59$ мН/м. Смачивание считать полным.

16.19. Покровное стеклышко для микроскопа имеет вид круга диаметром $D = 4$ см. На него нанесли воду массой $m = 0{,}2$ г и наложили другое такое же стеклышко; в результате оба покровных стекла слиплись. С какой силой, перпендикулярной поверхностям стеклышек, надо растягивать их, чтобы разъединить? Считать, что вода полностью смачивает стекло и поэтому меньший радиус R кривизны боковой поверхности водяного слоя равен половине расстояния d между стеклышками. Коэффициент поверхностного натяжения $\alpha = 73$ мН/м и плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

16.20. Широкое колено U-образного манометра имеет диаметр $d_1 = 2$ мм, узкое – $d_2 = 1$ мм. Определите разность Δh уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути $\alpha = 0{,}5$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а краевой угол $\theta = 138°$.

16.21. В сосуд с жидкостью с коэффициентом поверхностного натяжения $\alpha = 23{,}3$ мН/м и плотностью $\rho = 784$ кг/м^3 опущена стеклянная трубка, внутренний радиус которой $r = 2$ мм. Высота поднятия жидкости в трубке $h = 1{,}2$ мм. Чему равен краевой угол? Сделайте выводы о характере смачивания.

16.22. Высота столба жидкости в стеклянном капилляре диаметром $d = 0{,}4$ мм составляет $h = 2{,}8$ см. Определите плотность жидкости, если ее коэффициент поверхностного натяжения $\alpha = 0{,}022$ Н/м. Смачивание считать полным.

16.23. Капилляр, внутренний радиус которого $r = 0{,}5$ мм, опущен в жидкость. Чему равна масса жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение $\alpha = 60$ мН/м? Смачивание считать полным.

16.24. Вертикальный капилляр погружен в воду. Найдите радиус кривизны мениска, если высота столба воды в трубке $h = 20$ мм. Поверхностное натяжение воды $\alpha = 73$ мН/м. Смачивание считать полным.

16.25. Вода по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 2$ мм. На сколько изменится масса капли при остывании воды от $t_1 = 90°$C до $t_2 = 20°$C, если коэффициенты поверхностного натяжения воды для этих температур принимают соответственно значения $\alpha_1 = 60{,}75$ мН/м и $\alpha_2 = 73$ мН/м?

Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

16.26. Чему равен коэффициент объемного расширения воды, если ее уровень в одном колене сообщающихся сосудов, имеющем температуру $t_1 = 20°C$, равен $h_1 = 280$ мм, а в другом, находящемся при температуре $t_2 = 80°C$, – $h_2 = 283$ мм?

16.27. Найдите объем, который займет в паровом котле вода массой $m = 1400$ кг при повышении температуры от $t_1 = 23°C$ до $t_2 = 100°C$. Коэффициент объемного расширения воды примите равным $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.

16.28. Определите длину шкалы капилляра термометра, проградуированной от 0 до 50°C, если объем этилового спирта ($\beta = 11 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$) в резервуаре при 0°C составляет $V_0 = 75$ мм^3, а диаметр капилляра $d = 0{,}27$ мм. Изменением размеров капилляра с температурой пренебречь.

16.29. Для точных измерений применяется ртутный термометр ($\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$) с длиной шкалы $l = 196{,}4$ мм на 5 градусов. Какой диаметр капилляра термометра, если объем ртути в резервуаре при нулевом положении столбика $V_0 = 2550$ мм^3? Расширением стекла пренебречь.

16.30. Чему равна плотность ртути при $t = 100°C$, если при температуре $t_0 = 10°C$ ее плотность $\rho_0 = 13{,}57$ г/см^3? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.

16.31. Определите температуру глицерина, при которой его плотность $\rho = 1{,}18$ г/см^3, если при температуре $t_0 = 0°C$ его плотность $\rho_0 = 1{,}27$ г/см^3. Коэффициент объемного расширения глицерина $\beta = 5 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$.

§ 17. Явления переноса

Основные формулы и законы

1. Средняя длина свободного пробега молекулы газа:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \tag{17.1}$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул.

2. Коэффициенты диффузии *D*, динамической вязкости η и теплопроводности æ газов:

$$D = \frac{1}{3}\overline{\upsilon}\lambda,\;\; \eta = \frac{1}{3}\rho\overline{\upsilon}\lambda,\;\; æ = \frac{1}{3}c_V\rho\overline{\upsilon}\lambda, \tag{17.2}$$

где $\overline{\upsilon}$ – средняя скорость молекул газа; ρ – плотность газа; c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

3. Закон диффузии Фика:

$$m = -D\frac{d\rho}{dx}S\Delta t, \tag{17.3}$$

где m – масса газа, переносимая вдоль оси x через площадь S за время Δt; $d\rho / dx$ – градиент плотности газа вдоль оси x.

4. Закон Ньютона для внутреннего трения:

$$F = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dz}\right|S, \tag{17.4}$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися с различными скоростями слоями газа; $d\upsilon / dz$ – градиент скорости в направлении, перпендикулярном движению слоев; S – площадь соприкасающихся слоев.

5. Закон Фурье для теплопроводности:

$$Q = -æ\frac{dT}{dx}S\Delta t, \tag{17.5}$$

где Q – теплота, передаваемая вдоль оси x через площадь S за время Δt; dT / dx – градиент температуры в направлении оси x.

Примеры решения задач

Пример 1. Кислород находится при нормальных условиях ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К). Определите коэффициенты диффузии D, динамической вязкости η и теплопроводности æ молекул кислорода. Как изменятся найденные величины в результате двукратного увеличения объема V газа: 1) при постоянном давлении, 2) при постоянной температуре? Эффективный диаметр молекул кислорода $d = 0{,}36$ нм, молярная масса $M = 0{,}032$ кг/моль.

Решение. Коэффициенты определим по формулам (17.2). Предварительно найдем среднюю скорость $\overline{\upsilon}$, длину свободного пробега λ, плотность ρ и удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V.

Используя (13.6), получим среднюю скорость молекул

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{3{,}14 \cdot 0{,}032}} \approx 424{,}9 \text{ м/с}. \qquad (17.6)$$

Длину свободного пробега определим из (17.1) с учетом, что концентрация молекул зависит от давления и температуры по формуле $n = p / kT$,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \qquad (17.7)$$

Выполним вычисления по формуле (17.7)

$$\lambda = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}36 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5} \approx 0{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ м}. \qquad (17.8)$$

Плотность газа найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона (12.1)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}032}{8{,}31 \cdot 273} \approx 1{,}43 \text{ кг/м}^3. \qquad (17.9)$$

Удельную теплоемкость при постоянном объеме определим из (14.4) с учетом формулы (14.5) для молярной теплоемкости при постоянном объеме. Принимая во внимание, что число степеней свободы для двухатомного кислорода $i = 5$, получим

$$c_V = \frac{iR}{2M} = \frac{5 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 0{,}032} \approx 649{,}2 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}. \qquad (17.10)$$

Тогда коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\lambda = 424{,}9 \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-7} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2\text{/с}. \qquad (17.11)$$

Коэффициент динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{\upsilon}\lambda = \rho D = 1{,}43 \cdot 9{,}2 \cdot 10^{-6} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}. \qquad (17.12)$$

Коэффициент теплопроводности

$$æ = \frac{1}{3}c_V\rho\bar{\upsilon}\lambda = c_V\eta = 649{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5} \approx 8{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}. \qquad (17.13)$$

При увеличении объема газа в 2 раза при постоянном давлении справедлив закон Гей-Люссака (12.4)

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1}=\frac{V_2}{V_1}=2. \tag{17.14}$$

Из формул (17.6)–(17.10) с учетом соотношения (17.14) следует, что

$$\frac{\bar{\upsilon}_2}{\bar{\upsilon}_1}=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}=\sqrt{2},\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{T_2}{T_1}=2,\ \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{1}{2},\ \frac{c_{V_2}}{c_{V_1}}=1. \tag{17.15}$$

Тогда из (17.11)–(17.13) с учетом (17.15) найдем изменение коэффициентов переноса

$$\frac{D_2}{D_1}=2\sqrt{2}\approx 2,8,\ \frac{\eta_2}{\eta_1}=\sqrt{2}\approx 1,4,\ \frac{æ_2}{æ_1}=\sqrt{2}\approx 1,4. \tag{17.16}$$

При увеличении объема газа в 2 раза при постоянной температуре выполняется закон Бойля – Мариотта (12.3)

$$p_1V_1=p_2V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2}=\frac{V_2}{V_1}=2. \tag{17.17}$$

Из формул (17.6)–(17.10) с учетом (17.17) следует, что

$$\frac{\bar{\upsilon}_2}{\bar{\upsilon}_1}=1,\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{p_1}{p_2}=2,\ \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{1}{2},\ \frac{c_{V_2}}{c_{V_1}}=1. \tag{17.18}$$

Из (17.11)–(17.13) с учетом (17.18) найдем изменение коэффициентов переноса при изменении объема при постоянной температуре

$$\frac{D_2}{D_1}=2,\ \frac{\eta_2}{\eta_1}=1,\ \frac{æ_2}{æ_1}=1. \tag{17.19}$$

Пример 2. Определите плотность теплового потока q сквозь медную пластину толщиной d = 1 мм, если температура одной из сторон пластины поддерживается постоянной и равна T_1 = 500 К, а температура другой стороны – T_2 = 260 К. Коэффициент теплопроводности меди æ = 380 Вт/(м · К).

Решение. Согласно закону Фурье (17.5), количество тепла, передаваемого через медную пластину,

$$Q=-æ\frac{dT}{dx}S\Delta t. \tag{17.20}$$

Из (17.20) найдем тепловой поток q – количество тепла, передаваемого через единицу площади в единицу времени,

$$q = \frac{Q}{S\Delta t} = -æ\frac{dT}{dx}. \qquad (17.21)$$

Учитывая, что при установившемся потоке градиент температуры dT / dx в направлении переноса является постоянной величиной, получим

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{d}, \qquad (17.22)$$

где d – толщина пластины.

Подставив (17.22) в (17.21), вычислим тепловой поток

$$q = -æ\frac{T_2 - T_1}{d} = 380 \cdot \frac{500 - 260}{10^{-3}} = 9{,}12 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2. \qquad (17.23)$$

Проверим единицы измерения

$$[q] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot \frac{\text{К}}{\text{м}} = \text{Вт/м}^2. \qquad (17.24)$$

Задачи

17.1. В сосуде находится воздух, плотность которого $\rho = 1{,}22$ кг/м^3. Средняя длина свободного пробега его молекул $\lambda = 122$ нм. Чему равен эффективный диаметр молекул воздуха?

17.2. Как изменится среднее число столкновений в единицу времени молекул одноатомного газа, если при адиабатическом сжатии его объем уменьшится в 10 раз?

17.3. Определите давление, при котором молекулы углекислого газа в сферическом сосуде не будут сталкиваться друг с другом, если диаметр сосуда составляет: 1) 0,5 см; 2) 5 см; 3) 50 см. Температура газа $T = 273$ К, эффективный диаметр молекул углекислого газа $d = 0{,}47$ нм.

17.4. Чему равны среднее число z столкновений за время $t = 1$ с и средняя длина свободного пробега λ молекул водорода, если газ находится под давлением $p = 1$ МПа и при температуре $t = 17$°C? Эффективный диаметр молекул водорода $d = 0{,}23$ нм.

17.5. Определите среднюю продолжительность свободного пробега τ молекул кислорода при давлении $p = 0{,}1$ МПа и температуре

$t = 25°C$. Эффективный диаметр молекул кислорода примите равным $d = 0,36$ нм.

17.6. Найдите среднюю длину свободного пробега λ молекул углекислого газа в баллоне вместимостью $V = 40$ л. Масса газа $m = 3,73$ кг. Эффективный диаметр молекул углекислого газа $d = 0,47$ нм.

17.7. Чему равна средняя длина свободного пробега λ молекул гелия при давлении $p = 101,3$ кПа и температуре $t = 0°C$, если вязкость гелия $\eta = 13$ мкПа · с?

17.8. Как изменится средняя длина λ и среднее время τ свободного пробега молекул газа, если температуру увеличили в n раз: 1) при постоянной концентрации молекул; 2) постоянном давлении?

17.9. Определите зависимость коэффициента динамической вязкости η от температуры T при следующих процессах: 1) изобарическом; 2) изохорическом; 3) адиабатическом.

17.10. Определите зависимость коэффициента динамической вязкости η одноатомного идеального газа от давления p при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорическом; 3) адиабатическом.

17.11. Определите зависимость коэффициента диффузии D идеального газа с показателем адиабаты γ от давления p при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорическом; 3) адиабатическом.

17.12. Определите зависимость коэффициента диффузии D одноатомного идеального газа от температуры T при следующих процессах: 1) изобарическом; 2) изохорическом; 3) адиабатическом.

17.13. Заданы коэффициент динамической вязкости η и коэффициент диффузии D идеального газа с молярной массой M. Какую концентрацию имеют n молекул газа?

17.14. В сосуде $V = 1,5$ л находится $N = 1,64 \cdot 10^{22}$ молекул воздуха. Теплопроводность газа $æ = 24,1$ мВт/(м · К). Чему равен его коэффициент диффузии?

17.15. Определите коэффициент теплопроводности æ кислорода, если коэффициент динамической вязкости для него при тех же условиях $\eta = 19,8$ мкПа · с.

17.16. Найдите коэффициенты диффузии и динамической вязкости гелия при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы гелия $d = 0,2$ нм.

17.17. Во сколько раз отличаются: 1) коэффициенты динамической вязкости η; 2) коэффициенты диффузии D; 3) коэффициенты теплопроводности æ аргона и кислорода, если оба газа находятся при одинаковой температуре и одном и том же давлении? Эффективные диаметры молекул этих газов равны.

17.18. Чему равен коэффициент теплопроводности æ азота, находящегося в некотором объеме при температуре $T = 290$ К? Эффективный диаметр молекул азота принять равным $d = 0{,}38$ нм.

17.19. Водород и кислород находятся при нормальных условиях. Определите для этих газов отношение: 1) коэффициентов диффузии; 2) вязкости; 3) теплопроводности. Эффективные диаметры молекул принять равными $d = 0{,}23$ нм для водорода и $d = 0{,}38$ нм для кислорода.

17.20. Как изменятся коэффициенты диффузии D и динамической вязкости η идеального газа, если его объем увеличить в 4 раза: 1) изотермически; 2) изобарно?

17.21. Азот находится под давлением $p = 110$ кПа при температуре $T = 293$ К. Определите коэффициент диффузии D и внутреннего трения η. Эффективный диаметр молекул азота принять равным $d = 0{,}38$ нм.

17.22. Чему равна масса азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку площадью $S = 75$ см^2 за $\Delta t = 15$ с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, $d\rho / dx = 1{,}2$ кг/м^4? Температура азота $T = 290$ К, а средняя длина свободного пробега его молекул $\lambda = 1$ мкм.

17.23. Определите градиент плотности $d\rho / dx$ для углекислого газа в направлении, перпендикулярном площадке, через каждый квадратный метр которой переносится поток массы, равный $j_m = 0{,}003$ кг/с. Температуру газа принять равной $t = 23$°C, среднее давление $p = 10^5$ Па. Эффективный диаметр молекулы углекислого газа $d = 0{,}47$ нм, молярная масса $M = 0{,}044$ кг/моль.

17.24. За какое время углекислый газ массой $m = 720$ мг продиффундирует из почвы в атмосферу, если градиент плотности углекислого газа через каждый квадратный метр поверхности почвы составляет $d\rho / dx = -0{,}05$ кг/м^4? Коэффициент диффузии газа $D = 0{,}04$ см^2/с.

17.25. Какой толщины следовало бы сделать деревянную стену здания, чтобы она давала такую же потерю теплоты, как кирпичная стена толщиной $d_к = 12$ см, при одинаковой температуре внутри и снаружи здания? Коэффициенты теплопроводности кирпича и дерева равны соответственно $æ_к = 0{,}70$ Вт/(м · К), $æ_д = 0{,}175$ Вт/(м · К).

17.26. Для расчета отопительной системы найдите потерю теплоты через $S = 1$ м^2 стены здания в течение суток. Толщина стены $d = 50$ см, температура стены внутри $t_1 = 18$°C и снаружи здания $t_2 = -30$°C, коэффициент теплопроводности стены $æ = 0{,}2$ Вт/(м · К).

17.27. Потолочное перекрытие парового котла состоит из двух слоев тепловой изоляции. Определите температуру t_3 на границе между слоями, если температура наружных поверхностей перекрытия $t_1 = 800°C$ и $t_2 = 80°C$, а толщина и теплопроводность каждого слоя соответственно равны: $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 300$ мм, $æ_1 = 1{,}25$ Вт/(м · К), $æ_2 = 0{,}15$ Вт/(м · К).

17.28. Стальная стенка котла толщиной $d_1 = 1$ мм покрыта с внутренней стороны слоем котельной накипи толщиной $d_2 = 0{,}5$ мм. Найдите плотность теплового потока, проходящего через $S = 1$ м^2 стенки котла, и температуру стального листа под накипью, если температура внутренней поверхности $t_1 = 255°C$ и наружной $t_2 = 200°C$. Коэффициент теплопроводности стали $æ = 46$ Вт/(м · К), накипи – $æ = 0{,}6$ Вт/(м · К).

17.29. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено водородом при температуре $t = 25°C$. Радиус внутреннего цилиндра $R_1 = 5$ см. Расстояние между цилиндрами $h = 0{,}15$ см. Внутренний цилиндр вращается, совершая $\nu = 12$ с$^{-1}$. Чему равна сила, действующая на площадь $S = 1$ см^2 поверхности внешнего цилиндра? Эффективный диаметр молекул водорода считать $d = 0{,}23$ нм.

17.30. Определите вязкость газа, находящегося между двумя коаксиальными цилиндрами радиусом $R_1 = 5{,}7$ см и $R_2 = 6$ см. Высота внутреннего цилиндра $h = 26$ см. Внешний цилиндр вращается с частотой $\nu = 420$ об/мин. Для того чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу $F = 1{,}42$ мН.

17.31. При каком давлении отношение коэффициентов внутреннего трения и диффузии идеального газа $\eta / D = 0{,}55$ кг/м^3, а средняя квадратичная скорость его молекул $\upsilon_{кв} = 700$ м/с?

17.32. Слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, $d = 4$ см. Касательная сила, действующая на единицу поверхности крыла, $F_s = 110{,}5$ мН/м^2. Найдите скорость движения самолета. Диаметр молекул воздуха принять равным $d = 0{,}27$ нм, температура воздуха $t = 0°C$.

17.33. Определите количество теплоты Q, которое теряет аудитория за время $\Delta t = 45$ мин через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами. Площадь каждой рамы $S = 4$ м^2, расстояние между ними $d = 15$ см. Температура в аудитории $t_1 = 18°C$, температура воздуха снаружи $t_2 = -10°C$. Диаметр молекул воздуха $d = 0{,}27$ нм. При вычислении коэффициента теплопроводности температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур внутри и снаружи помещения. Удельная теплопроводность воздуха $c_V = 717$ Дж/(кг · К).

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1.1. $s = 160$ км, $\upsilon_т = 2$ км/ч. **1.2.** $\upsilon_{отн} = 180$ км/ч, $\Delta t \approx 13{,}3$ мин, $x = 27{,}8$ км. **1.3.** $\upsilon \approx 3{,}4$ км/ч, $\Delta t = 2$ мин, $s = 50$ м. **1.4.** $\upsilon_т = s / 2\Delta t \approx$ $\approx 2{,}7$ км/ч. **1.5.** $\varphi = \arcsin(\upsilon_т / \upsilon_к) = 30°$, $\upsilon = \sqrt{\upsilon_к^2 - \upsilon_т^2} \approx 5{,}2$ км/ч, $\Delta t =$ $= d / \upsilon \approx 6{,}9$ мин. **1.6.** 1) $y = \alpha x^2$ при $0 \le x < d / 2$ и $y = -\alpha x^2 + \beta x - \gamma$ при $d / 2 \le x \le d$, где $\alpha = \upsilon_0 / d\upsilon_к \approx 7{,}8$ км$^{-1}$, $\beta = 2\upsilon_0 / \upsilon_к = 2{,}5$, $\gamma =$ $= d\upsilon_0 / 2\upsilon_к = 0{,}1$ км; 2) $s = \gamma = 100$ м. **1.7.** $\upsilon_{ср} = 5$ м/с. **1.8.** $\upsilon_{ср} = (\upsilon_1 +$ $+ 2\upsilon_2) / 3 = 60$ км/ч. **1.9.** $\upsilon_{1ср} = 8\upsilon_{ср} / 7 = 16$ км/ч. **1.10.** $\upsilon_{ср} = 3$ м/с. **1.11.** $\Delta t = 1{,}1$ ч, $l_{\min} = 20$ км. **1.12.** $x = s / \sqrt{n^2 - 1} \approx 10$ км. **1.13.** $\upsilon_2 =$ $= \upsilon_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) / \Delta t_2 = 24$ м/с. **1.14.** $\upsilon_1 / \upsilon_2 = 4$. **1.15.** $\upsilon_x = -2$ м/с. **1.16.** $\upsilon_{ср} = \upsilon / 1{,}2 \approx 16{,}7$ м/с. **1.17.** $s - \Delta r \approx 17{,}6$ км. **1.18.** $s / \Delta r =$ $= 3\pi / 2 \approx 4{,}7$. **1.19.** $\Delta t_р \approx 16{,}8$ мин, $\upsilon \approx 100$ км/ч. **1.20.** $\Delta t =$ $= (\sqrt{\upsilon^2 + 2as} - \upsilon) / a = 10$ с. **1.21.** $s = 15$ м, $\Delta r = 3$ м, $\upsilon_{ср} = 1{,}5$ м/с, $|\vec{\upsilon}_{ср}| =$ $= 0{,}3$ м/с. **1.22.** $\Delta t = h / \upsilon + \upsilon / a = 31$ с. **1.23.** $\upsilon = \sqrt{(\upsilon_1^2 + \upsilon_0^2) / 2} =$ $= 10$ м/с. **1.24.** 1) $y = -x^2 / 9$, $x > 0$; 2) $\Delta r = 20$ м, $|\vec{\upsilon}_{ср}| = 10$ м/с. **1.25.** $\upsilon =$ $= \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} \approx 2{,}8$ м/с, $a = 2|\beta| = 1$ м/с^2, $\varphi = 45°$. **1.26.** 1) $y = 1 + 2x$, $x > 0$; 2) $\upsilon = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \approx 4{,}5$ м/с, $a = 0$. **1.27.** 1) $x^2 + y^2 = 0{,}25$, по часовой стрелке; 2) $s = \omega\Delta t\alpha \approx 6{,}3$ м. **1.28.** $t_1 = 1 / \alpha = 10$ с, $t_2 = (1 +$ $+ \sqrt{1 + 2\alpha s / \upsilon_0}) / \alpha \approx 24$ с. **1.29.** 1) $x^2 / 4 + y^2 / 9 = 1$, против часовой стрелки; 2) $\Delta r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} / \omega \approx 3{,}6$ м. **1.30.** $t = \sqrt{-2\alpha_0 / \alpha} = 4$ с, $\upsilon = \beta_0 +$ $+ \beta t = 10$ м/с. **1.31.** 1) $y = x^2 / 8$, $x > 0$; 2) $\upsilon = \alpha\sqrt{1 + \beta^2 t^2} \approx 3{,}6$ м/с, $a =$ $= \alpha\beta = 1$ м/с^2. **1.32.** $s = 2$ м, $\upsilon_{ср} = 0{,}5$ м/с, $\Delta r = 0$. **1.33.** $\upsilon_{ср} = 5$ м/с. **1.34.** $\Delta t = -1 / \beta = 2{,}5$ с, $s = -\alpha / 2\beta = 3{,}75$ м, $\upsilon = \alpha = 3$ м/с, $a = 2\alpha|\beta| =$ $= 2{,}4$ м/с^2. **1.35.** $t = -1 / \beta = 4$ с, $\upsilon = \sqrt{2}\alpha \approx 7$ м/с, $a = 2\alpha|\beta| = 2{,}5$ м/с^2. **1.36.** 1) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$; 2) $\upsilon = \alpha\beta = 6$ м/с, $a = \alpha\beta^2 = 12$ м/с^2, $\varphi = 90°$. **1.37.** 1) $y = 4x / 3 - 7$, $x > 3$; 2) $\upsilon = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = 5$ м/с, $a = 0$. **1.38.** $t_1 = 1$ с, $t_2 = 5$ с. **1.39.** 1) $y = \mathrm{tg}\alpha\, x - gx^2 / (2\upsilon_0^2\cos^2\alpha) \approx 1{,}7x - 0{,}2x^2$; 2) $\Delta t_д =$

$= 2\upsilon_0 \sin\alpha / g \approx 1{,}8$ с; 3) $h = \upsilon_0^2 \sin^2\alpha / 2g \approx 3{,}8$ м, $l = \upsilon_0^2 \sin(2\alpha) / g \approx$ $\approx 8{,}8$ м. **1.40.** 1) $\Delta r \approx 48$ м; 2) $\upsilon \approx 26{,}7$ м/с, $\varphi \approx 61°$. **1.41.** $l =$ $= \upsilon_0 t\sqrt{2(1-\sin\alpha)} \approx 20{,}7$ м/с. **1.42.** $t = \sqrt{\upsilon_{01}\upsilon_{02}} / g \approx 1$ с, $l \approx 25{,}5$ м. **1.43.** $h = \upsilon_0^2 / 2g \approx 20{,}4$ м, $t = \upsilon_0 / g \approx 2$ с, $\upsilon = \upsilon_0 / \sqrt{2} \approx 14$ м/с. **1.44.** $\alpha =$ $= 45°$. **1.45.** $l \approx 20{,}2$ м. **1.46.** $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = \arccos(\upsilon_2 / \sqrt{gs_{\max}}) \approx 60°$. **1.47.** $\Delta t = 2\sqrt{\upsilon_0} / \alpha = 8$ с, $s = 2\upsilon_0^{3/2} / 3\alpha \approx 10{,}7$ м. **1.48.** $\Delta t = \ln 2 / \alpha \approx 3{,}5$ с, $s = \upsilon_0 / 2\alpha = 5$ м. **1.49.** $\upsilon = \alpha^2 t / 2 = 24$ м/с, $a = \alpha^2 / 2 = 8$ м/с^2. **1.50.** $\upsilon =$ $= \upsilon_0 / (1 + \upsilon_0\alpha t) \approx 1{,}8$ м/с, $a = \upsilon_0^2\alpha / (1 + \upsilon_0\alpha t)^2 \approx 0{,}3$ м/с^2, $s = \ln((1 +$ $+ \upsilon_0\alpha t) / \alpha) \approx 24$ м. **1.51.** $\upsilon = \upsilon_1^{s/s_1} / \upsilon_0^{s/s_1 - 1} \approx 1$ м/с. **1.52.** $s = \alpha t^2 / 2 + \beta t^3 / 3 +$ $+ \gamma t^4 / 4 \approx 9{,}3$ м, $\upsilon_{ср} \approx 4{,}7$ м/с. **1.53.** $\upsilon = \alpha t + \beta t^2 / 2 = 6$ м/с, $s = \alpha t^2 / 2 +$ $+ \beta t^3 / 6 \approx 4{,}7$ м. **1.54.** $x = \alpha(1 - \cos(\beta t)) / \beta^2 \approx 24$ см. **1.55.** 1) $s = \pi / 3 \approx$ $\approx 1{,}05$ м, $\Delta r = 2R\sin(s / 2R) = 1$ м; 2) $\upsilon = \beta t / 6 \approx 1$ м/с, $a_\tau = \beta / 6 \approx$ $\approx 0{,}5$ м/с^2, $a_n = \beta^2 t^2 / 36R \approx 1{,}1$ м/с^2, $a = \beta\sqrt{1 + \beta^2 t^4 / 36R^2} / 6 \approx 1{,}2$ м/с^2. **1.56.** 1) $a = \alpha^2\beta^2 / R \approx 1{,}6$ м/с^2; 2) $a = \alpha\beta^2 \approx 4{,}9$ м/с^2. **1.57.** $\upsilon \approx 1{,}8$ м/с, $a_\tau \approx 1{,}1$ м/с^2, $a_n \approx 6{,}6$ м/с^2, $a \approx 6{,}7$ м/с^2. **1.58.** $\upsilon \approx 10{,}5$ м/с, $a_\tau = 5$ м/с^2, $a_n \approx 110{,}3$ м/с^2, $a \approx 110{,}4$ м/с^2. **1.59.** $a = 0{,}4$ м/с^2, $a_\tau = \beta\alpha^2 t / \sqrt{1 + \alpha^2 t^2} \approx$ $\approx 0{,}28$ м/с^2, $a_n = \alpha\beta / \sqrt{1 + \alpha^2 t^2} \approx 0{,}28$ м/с^2, $\rho = \beta(1 + \alpha^2 t^2)^{3/2} / \alpha \approx 1{,}1$ м. **1.60.** $s = 5$ м, $\Delta r = 2R\sin(s / 2R) \approx 3{,}8$ м, $\upsilon_{ср} = 2{,}5$ м/с, $|\vec{\upsilon}_{ср}| \approx 1{,}9$ м/с. **1.61.** $t = \sqrt{R / 2\alpha} = 1$ с, $a \approx 1{,}4$ м/с^2. **1.62.** $a_\tau = 2g\sin\alpha / \sqrt{7} \approx 3{,}7$ м/с^2, $a_n = 2\sqrt{2}g\cos\alpha / \sqrt{7} \approx 9{,}1$ м/с^2, $\rho = 7\sqrt{7}\upsilon_0^2 / (8\sqrt{6}g) \approx 21{,}7$ м. **1.63.** $\alpha =$ $= \arccos(\sqrt[3]{\rho_2 / \rho_1}) \approx 60°$. **1.64.** $a = \alpha\sqrt{1 + 4\pi^2} \approx 12{,}7$ м/с^2. **1.65.** $\upsilon = \upsilon_0 e^{-2\pi} \approx$ $\approx 4{,}7$ см/с, $a = \sqrt{2}\upsilon_0^2 e^{-4\pi} / R \approx 0{,}6$ см/с^2. **1.66.** $\varphi = \operatorname{arctg}(2s / R) = 45°$. **1.67.** $\rho = a_\tau^2 / \alpha = 1$ м, $a = \sqrt{a_\tau^2 + 4(\alpha s / a_\tau)^2} \approx 8{,}2$ м/с^2. **1.68.** $a_\tau \approx 0{,}35$ м/с^2, $\rho \approx 2{,}37$ м. **1.69.** $\upsilon = t\sqrt{9\alpha^2 t^2 + 4\beta^2} \approx 25{,}3$ м/с, $a = 2\sqrt{9\alpha^2 t^2 + \beta^2} \approx$ $\approx 24{,}3$ м/с^2, $\rho \approx 168{,}7$ м. **1.70.** $a_\tau = 2$ м/с^2, $s = 32$ м. **1.71.** $a_n = \upsilon^4 t^2 / 64\pi^2 R^3 \approx$ ≈ 8 см/с^2. **1.72.** $a = a_\tau\sqrt{1 + 4\pi^2} \approx 3{,}2$ м/с^2. **1.73.** $\upsilon = \sqrt{2\alpha x} = 4$ м/с. **1.74.** $a_\tau \approx$ $\approx 0{,}4$ м/с^2. **1.75.** $a_\tau = 2\sqrt{3\beta\upsilon} = 0{,}36$ м/с^2, $a_n \approx 0{,}1$ м/с^2, $a \approx 0{,}37$ м/с^2.

2.1. $R = r\upsilon_1 / (\upsilon_1 - \upsilon_2) = 30$ см, $\nu = (\upsilon_1 - \upsilon_2) / 2\pi r \approx 1{,}6$ с$^{-1}$. **2.2.** $\nu =$ $= \upsilon N_2 / (\pi d N_1) \approx 0{,}84$ с$^{-1}$. **2.3.** $\Delta\upsilon = \upsilon d / (R + d / 2) \approx 3{,}7$ км/ч. **2.4.** $\omega_ч =$

$= \pi / 6$ рад/ч, $\omega_м = 2\pi$ рад/ч, $\omega_с = 120\pi$ рад/ч, $\upsilon_м / \upsilon_ч = 24$. **2.5.** $\nu = \varphi\upsilon / 2\pi l = 40$ с$^{-1}$. **2.6.** $R = rn / (n - 1) = 40$ см. **2.7.** $\nu_д = \nu D_1 / D_2 = 2400$ мин$^{-1}$, $\upsilon = \pi\nu DD_1 / D_2 \approx 63$ м/с. **2.8.** $s = 8R = 3{,}2$ м, $a = \upsilon^2 / R = 10$ м/с^2, направлено к центру колеса. **2.9.** $N_1 \approx 3{,}3 \cdot 10^3$, $N_2 \approx 18{,}3 \cdot 10^3$. **2.10.** $\upsilon \approx 3{,}1$ км/с, $a_n \approx 0{,}22$ м/с^2. **2.11.** $\upsilon \approx 68$ м/с, $a_n \approx 74{,}3$ км/с^2. **2.12.** $\upsilon_O = 0$, $\upsilon_A = 2at = 18$ см/с, $\upsilon_B = \sqrt{2}at \approx 12{,}7$ м/с, $a_O = a^2t^2 / R \approx 4$ см/с^2, $a_A = 2a\sqrt{1 + a^2t^4 / 4R^2} \approx 7$ см/с^2, $a_B = a\sqrt{1 + (1 - at^2 / R)^2} \approx 3$ см/с^2. **2.13.** $a = \upsilon\sqrt{1 + 4\alpha^2t^4} / t \approx 0{,}9$ м/с^2, $R = \upsilon / 2\alpha t = 0{,}8$ м. **2.14.** $\varepsilon \approx 12{,}6$ рад/с^2, $N = \nu\Delta t / 2 = 16$. **2.15.** $R = a / \varepsilon\sqrt{1 + \varepsilon^2\Delta t^4} \approx 30$ см. **2.16.** $N = \omega l / 2\pi\upsilon \approx 2$. **2.17.** $\varepsilon = \pi\nu^2 / N \approx 8{,}7$ рад/с^2, $\Delta t = 2N / \nu = 3{,}6$ с. **2.18.** $n = 2{,}6$. **2.19.** $\varepsilon = 2\alpha / R = 0{,}2$ рад/с^2, $\omega = 0{,}8$ рад/с. **2.20.** $\varepsilon = 2\pi(\nu_2 - \nu_1) / \Delta t \approx 3$ рад/с^2, $N = (\nu_2 + \nu_1)\Delta t / 2 = 6$. **2.21.** $\varepsilon = \omega^2 / 4\pi N \approx 0{,}2$ рад/с^2, $\upsilon = 0{,}6$ м/с, $a_n = 0{,}9$ м/с^2, $a_\tau \approx 0{,}07$ м/с^2. **2.22.** $N_2 = 18$. **2.23.** $t = \sqrt{\mathrm{tg}\alpha / \varepsilon} \approx 10$ с. **2.24.** 1) $t = \sqrt{\alpha / 3\beta} = 2$ с; 2) $\omega_{ср} = 2\alpha / 3 = 2$ рад/с, $\varepsilon_{ср} = -\sqrt{3\alpha\beta} = -1{,}5$ рад/с^2; 3) $\varepsilon = -2\sqrt{3\alpha\beta} = -3$ рад/с^2. **2.25.** $\Delta t = \sqrt[3]{4\mathrm{tg}\varphi / \alpha} \approx 3$ с. **2.26.** $\varphi = 1$ рад, $\varphi_{max} = 1{,}5$ рад. **2.27.** $R = a_\tau / (2\alpha + 6\beta t) = 0{,}3$ м. **2.28.** $\varphi = \omega_0(1 - e^{-\alpha t}) / \alpha$, $\omega = \omega_0 e^{-\alpha t}$, $\varphi = \omega_0 / 2\alpha = 2{,}5$ рад. **2.29.** 1) $\omega = 0{,}8$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}6$ рад/с^2; 2) $a_\tau = 0{,}12$ м/с^2, $a_n \approx 0{,}13$ м/с^2, $a \approx 0{,}18$ м/с^2; 3) $\gamma \approx 43°$. **2.30.** $\omega_{ср} = \omega_0 / 3 = 0{,}3$ рад/с. **2.31.** $R = a_n / (\alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2)^2 = 0{,}4$ м. **2.32.** $\omega = \omega_0 / (1 + \omega_0\alpha t) = 0{,}1$ рад/с, $\varphi = \ln(1 + \omega_0\alpha\Delta t) / \alpha \approx 0{,}8$ рад. **2.33.** $N = (\alpha t^2 / 2 + \beta t^3 / 3) / 2\pi R \approx 10$. **2.34.** $\omega_{ср} = 2\omega_0 / 3\ln 3 \approx 0{,}9$ рад/с, $\varepsilon_{ср} = -2\omega_0\alpha / 3\ln 3 \approx -0{,}4$ рад/с^2. **2.35.** $\omega = \omega_0 + \alpha\Delta t^3 / 3 \approx 1{,}8$ рад/с, $\varphi \approx 0{,}83$ рад. **2.36.** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon_0\sin\varphi} = 3$ рад/с. **2.37.** $\Delta t = -\beta / 3\gamma = 4$ с, $\omega = \alpha - \beta^2 / 3\gamma = 10$ рад/с. **2.38.** $\Delta t = \sqrt[4]{4\omega_0 / \alpha} = 3$ с, $\varphi = \omega_0\Delta t - \alpha\Delta t^5 / 20 \approx 19{,}4$ рад. **2.39.** $\omega = 1$ рад/с. **2.40.** $r = \alpha t^3 / 6\varphi = 0{,}2$ м, $\omega = 3\varphi / t = 6$ рад/с.

3.1. 1) $\upsilon = mg^2\cos\alpha / 2k\sin^2\alpha \approx 16{,}6$ м/с; 2) $s = m^2g^3\cos\alpha / 6k^2\sin^3\alpha \approx 11$ м. **3.2.** $\Delta r = 16$ м, $\upsilon = 8$ м/с. **3.3.** $\upsilon = \alpha\tau^3 / 6m = 12{,}5$ м/с, $s = \alpha\tau^4 / 12m = 62{,}5$ м. **3.4.** 1) $\Delta t = \pi / \omega = 4$ с; 2) $s = 2F_0 / m\omega^2 \approx 16$ м; 3) $\upsilon_m = F_0 / m\omega \approx 6{,}4$ м/с. **3.5.** 1) $\Delta t_m = \pi / \omega = 3$ с; 2) $s = \pi F_0 / m\omega^2 \approx 5{,}7$ м. **3.6.** $F_x = 2m\alpha = 2$ Н, $F_x = -2m\alpha = -2$ Н, $t = -\alpha / 3\beta = 8{,}3$ с. **3.7.** $F = m\omega^2 A = 0{,}08$ Н, направлена к началу координат. **3.8.** $F \approx 0{,}37$ Н.

3.9. $\upsilon = g\,\mathrm{tg}\alpha\Delta t \approx 25$ м/с. **3.10.** $a \approx 0{,}25$ м/с^2. **3.11.** $F_{\text{ср}} = 2\sqrt{2}m\upsilon^2 / \pi R \approx$ ≈ 9 Н. **3.12.** $T_1 = 2F / 3 = 12$ Н, $T_2 = F / 3 = 6$ Н, $a = F / 3m = 1{,}5$ м/с^2. **3.13.** $\mu = (\sin\alpha - \upsilon^2 / 2sg) / \cos\alpha \approx 0{,}16$. **3.14.** $a = (F / m - \mu g)\cos\alpha -$ $- (\mu F / m + g)\sin\alpha \approx 0{,}2$ м/с^2. **3.15.** $\mu = (2|\beta| / g - \sin\varphi) / \cos\varphi \approx 0{,}24$, $s = \alpha^2 / 4|\beta| = 12{,}5$ м. **3.16.** 1) $\upsilon = 2F|\sin(\omega t / 2)| / m\omega$; 2) $s = 8F / m\omega^2 \approx$ $\approx 20{,}3$ м, $\upsilon_{\text{ср}} = 4F / m\pi\omega \approx 10$ м/с. **3.17.** $\upsilon = \alpha(t - t_0)^2 / 2m = 19{,}6$ м/с, $s = \alpha(t - t_0)^3 / 6m \approx 26$ м, где $t_0 = \mu mg / \alpha = 1$ с. **3.18.** $\Delta t_{\text{c}} =$ $= \sqrt{2s / (2g\sin\alpha - 2s / \Delta t^2)} \approx 4{,}6$ с, $\mu = (2s / g\Delta t^2 - \sin\alpha) / \cos\alpha \approx 0{,}05$. **3.19.** $\upsilon = F\ln(M / (M - u\Delta t)) / u - \mu g\Delta t \approx 20{,}4$ м/с. **3.20.** $a =$ $= g / 3 \approx 3{,}3$ м/с^2, $T_1 = 4mg / 3 \approx 3{,}9$ Н, $T_2 = 2mg \approx 5{,}9$ Н. **3.21.** $\alpha =$ $= \mathrm{arctg}((\eta^2 + 1)\mu / (\eta^2 - 1)) \approx 30°$. **3.22.** $\alpha = \mathrm{arctg}(1 / \mu) \approx 68°$, $s = \upsilon_0^2 / 2g\sqrt{1+\mu^2} \approx 0{,}76$ м. **3.23.** $F = \mu mg / \sqrt{1+\mu^2} \approx 21{,}8$ Н при $\alpha =$ $= \mathrm{arctg}\mu \approx 16°$. **3.24.** $s = \upsilon_0^2 M / 2\mu g(m + M) \approx 1{,}7$ м. **3.25.** $s =$ $= R\sqrt{((\mu g / a_\tau)^2 - 1)} / 2 \approx 233$ м. **3.26.** $s = h(1 / \mu - \mathrm{ctg}\alpha) \approx 22$ м. **3.27.** 1) $a =$ $= g(\sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha / (m_1 + m_2)) \approx 1{,}7$ м/с^2, $F = (\mu_1 -$ $- \mu_2)gm_1m_2\cos\alpha / (m_1 + m_2) \approx 1$ Н; 2) $\alpha < \mathrm{arctg}((\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) / (m_1 +$ $+ m_2)) \approx 10{,}2°$. **3.28.** $\upsilon = \sqrt{g\sin\varphi / 2k} = 7$ м/с. **3.29.** $a = g\sin(2\alpha) / 2(\eta +$ $+ \sin^2\alpha) \approx 1{,}5$ м/с^2. **3.30.** $F = mg(h / l + \mu\sqrt{1 - (h / l)^2}) / \sqrt{1+\mu^2} \approx 2{,}3$ кН. **3.31.** $\alpha = \mathrm{arctg}(\mu + \sqrt{1+\mu^2}) \approx 50{,}7°$. **3.32.** $s = 2\mathrm{tg}\alpha / k \approx 0{,}58$ м, $\upsilon_m =$ $= \sin\alpha\sqrt{g / k\cos\alpha} \approx 1{,}2$ м/с. **3.33.** $s_2 = s_1(\upsilon_0 - \upsilon_2) / (\upsilon_0 - \upsilon_1) \approx 5{,}6$ м. **3.34.** $h_2 = h_1\ln(\upsilon_0 / \upsilon_2) / \ln(\upsilon_0 / \upsilon_1) \approx 31$ см. **3.35.** $s = m\upsilon_0 / k \approx 27{,}8$ м. **3.36.** $a = (m_1 - \mu(m_2 + m_3))g / (m_1 + m_2 + m_3) \approx 3{,}9$ м/с^2, $T_1 \approx 5{,}9$ Н, $T_2 \approx 2{,}9$ Н. **3.37.** $\Delta l = 2m_1m_2g / k(m_1 + m_2) = 4{,}9$ см. **3.38.** $a = (m_1(\sin\alpha_1 -$ $- \mu_1\cos\alpha_1) - m_2(\sin\alpha_2 + \mu_2\cos\alpha_2))g / (m_1 + m_2) \approx 0{,}3$ м/с^2, $T \approx 7{,}6$ Н. **3.39.** $F = 2m_1mg / (m_1 + m_2 + m) \approx 0{,}4$ Н. **3.40.** $F = 4m_1m_2(a + g) / (m_1 +$ $+ m_2) \approx 46$ Н. **3.41.** Вверх, $a = (m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1)g / (m_1 + m_2) \approx$ $\approx 0{,}9$ м/с^2. **3.42.** $F_{\text{тр}} = 2lMm / (M - m)\Delta t^2 \approx 0{,}01$ Н, $a_{\text{с}} \approx 9{,}7$ м/с^2, $a_{\text{ш}} \approx$ $\approx 9{,}3$ м/с^2. **3.43.** $a = 2g / 3 \approx 6{,}5$ м/с^2. **3.44.** $a_0 = 4m_1m_2g / (4m_1m_2 + m_0(m_1 +$ $+ m_2)) = 4{,}2$ м/с^2, $a_1 = g - m_0a_0 / 2m_1 = 1{,}4$ м/с^2, $a_2 = g - m_0a_0 / 2m_2 =$ $= 7$ м/с^2. **3.45.** $\Delta l = 4m_1m_2g\Delta l_0 / (m_1 + m_2)F \approx 12$ см. **3.46.** $a_2 = (2\eta -$ $- \sin\alpha)g / (1/2 + 2\eta) \approx 5{,}2$ м/с^2. **3.47.** $T = 2m_1m_2g / (m_1 + m_2) \approx 5$ Н, $s = (m_2 - m_1)g\Delta t^2 / (m_1 + m_2) \approx 0{,}8$ м. **3.48.** $\upsilon_m = 2\sqrt{2gh(\eta - 2) / (\eta + 4)} \approx$

$\approx 1{,}7$ м/с, $H = 6\eta h / (\eta + 4) \approx 1{,}2$ м. **3.49.** $P_1 = m(\upsilon^2 / R - g) \approx 1{,}2$ кН, $P_2 = m(\upsilon^2 / R + g) \approx 2{,}7$ кН, $P_3 = m\sqrt{g^2 + \upsilon^4 / R^2} \approx 2{,}1$ кН. **3.50.** $m = 2m_1m_2 / (m_1 + m_2) \approx 537{,}5$ кг. **3.51.** $k_{посл} = k_1k_2 / (k_1 + k_2) = 150$ Н/м, $k_{пар} = k_1 + k_2 = 800$ Н/м. **3.52.** $\Delta l = gT^2 / 4\pi^2\cos(\alpha / 2) - l \approx 2$ см. **3.53.** $\Delta V = Fl(1 - 2\mu_п) / E = 1{,}25$ мм^3. **3.54.** $F = E\pi d^2\alpha\Delta t / 4 \approx 1{,}3$ кН. **3.55.** $\Delta x = \rho g l^2 / 2E \approx 1{,}7$ мкм, $l = \sigma_{пр} / \rho g \approx 3$ км. **3.56.** $\Delta l = F_0 l / 2SE \approx 0{,}625$ мкм. **3.57.** $r_з = \sqrt{\eta}r / (1 + \sqrt{\eta}) = 345{,}6 \cdot 10^3$ км. **3.58.** Уменьшится в $\eta \approx 1{,}4$ раза. **3.59.** $\eta = (T_ю / T_з)^{2/3} \approx 5{,}2$. **3.60.** $h = R_з(gR_з / \upsilon^2 - 1) \approx 1792$ км. **3.61.** $g_п = \upsilon^2(R + h) / R^2 = 10$ м/с^2. **3.62.** $\eta \approx 2{,}8$.

4.1. $M = |x_1F_1 - y_2F_2| = 0{,}55$ Н · м, $h = M / \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 11$ см. **4.2.** $F_2 = 4$ Н, $d = (F_2 - F_1)l / 2F_2 = 0{,}25$ м. **4.3.** $M = |xF_y - yF_x| = 5$ Н · м, $h = M / \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0{,}5$ м. **4.4.** $F_р = 2F = 4$ Н, направлена параллельно диагонали AC и приложена к середине стороны BC. **4.5.** $\alpha = \mathrm{arctg}(1 / (1 + (1 + \mu)a / \mu g)) \approx 30°$, $F = \mu mg / (1 + \mu)\sin\alpha \approx 9$ Н. **4.6.** $I_z = ml^2 / 3 = 0{,}015$ кг · м^2; относительно оси, проходящей через середину стержня. **4.7.** 1) $I_1 = ma^2 / 3 = 2$ г · м^2, $I_2 = mb^2 / 3 = 1{,}28$ г · м^2; 2) $I_3 = I_1 + I_2 = 3{,}28$ г · м^2. **4.8.** 1) $I_1 = mR^2 = 0{,}5$ кг · м^2; 2) $I_2 = I_1 / 2 = 0{,}25$ кг · м^2. **4.9.** 1) $I_1 = mR^2 / 2 = 0{,}02$ кг · м^2; 2) $I_2 = I_1 / 2 = 0{,}01$ кг · м^2. **4.10.** $I_z = 3mR^2 / 10 = 4{,}5$ г · м^2. **4.11.** $I_z = 3m(R^2 / 4 + h^2) / 5 = 0{,}06$ кг · м^2. **4.12.** $I_z = 13mR^2 / 24 = 0{,}26$ кг · м^2. **4.13.** $I_z = 2m(R^5 - r^5) / 5(R^3 - r^3) \approx 0{,}02$ кг · м^2. **4.14.** $I_z = m(R_1^2 + R_2^2) / 2 = 0{,}5$ кг · м^2. **4.15.** $I_z = 0{,}57mR^2 \approx 0{,}3$ кг · м^2. **4.16.** $I_z \approx 0{,}15$ кг · м^2. **4.17.** $I_z \approx 0{,}2$ кг · м^2. **4.18.** $\omega = \sqrt{6F\sin\varphi / ml} = 2$ рад/с. **4.19.** $a = (m_2 - m_1)g / (m_1 + m_2 + m / 2) = 0{,}7$ м/с^2, $T_1 = m_1(g + a) = 5{,}25$ Н, $T_2 = m_2(g - a) = 9{,}1$ Н. **4.20.** $s = mg\Delta t^2 / (2m + M) \approx 38{,}4$ см. **4.21.** $\varepsilon = (m_2 - \mu m_1)g / (m_1 + m_2 + m / 2)R = 19{,}6$ рад/с^2, $T_1 \approx 5{,}9$ Н, $T_2 \approx 15{,}7$ Н. **4.22.** $\Delta t = 2I_z\omega_0^{1/2} / \alpha = 60$ с, $N = I_z\omega_0^{3/2} / 3\pi\alpha \approx 12{,}7$. **4.23.** $m = 2(FR - M_{тр}) / \varepsilon R^2 = 12$ кг. **4.24.** $\varphi = 2\sqrt{ml\omega^3 / 27\alpha} = 8$ рад. **4.25.** $M_{тр} = (F - 2\alpha mR)R = 0{,}4$ Н · м. **4.26.** $\Delta t = \pi\nu mR / F = 4$ с, $\varphi = \pi^2\nu^2 mR / F \approx 25$ рад. **4.27.** $\varepsilon = 3mRg / (I_z + 9mR^2) \approx 0{,}7$ рад/с^2. **4.28.** $a = mgr^2 / I_z = 0{,}28$ м/с^2; $T = mg / 2 \approx 3{,}9$ Н. **4.29.** $\Delta t = \sqrt{2s(I_z + mR^2) / mgR^2} \approx 1{,}7$ с. **4.30.** $\varepsilon = 2g / 3R \approx 130{,}7$ рад/с^2, $T = mg / 6 = 4{,}9$ Н. **4.31.** $\varepsilon = 2g\mu(1 + \mu) / (1 + \mu^2)R \approx 2$ рад/с^2, $N =$

$= (1 + \mu^2)R\omega_0^2 / 8\pi g\mu(1 + \mu) \approx 4$. **4.32.** $s = 3\upsilon_0^2 / 4g\sin\alpha \approx 7{,}4$ м, $\Delta t = 3\upsilon_0 / 2g\sin\alpha \approx 3$ с. **4.33.** $\Delta t = \sqrt{\omega_0 mR / 2\mu\alpha} \approx 21$ с. **4.34.** $\upsilon = 5g\sin\alpha\Delta t / 7 = 7$ м/с. **4.35.** $\varepsilon = Mgr / (Mr^2 + 4mR^2) \approx 21$ рад/с, $T = Mg / (1 + Mr^2 / 4mR^2) \approx 4{,}7$ Н. **4.36.** $I_z = (mgR - M_{\text{тр}})\Delta t / \omega - mR^2 = 0{,}1$ кг · м^2. **4.37.** $I_z = R((m_2 - m_1)g / \varepsilon - (m_2 + m_1)R) = 4$ г · м^2. **4.38.** $\varepsilon = (m_2R_2 + m_1R_1)g / (I_z + m_2R_2^2 + m_1R_1^2) \approx 5$ рад/с^2, $a_1 \approx 0{,}3$ м/с^2, $a_2 \approx 0{,}8$ м/с^2. **4.39.** $M_z = 7ml^2(2\alpha + 6\beta t) / 48 = 0{,}21$ Н · м. **4.40.** $a_1 = F / (m_1 + 2m_2 / 7) = 0{,}4$ м/с^2, $a_2 = 2a_1 / 7 \approx 0{,}1$ м/с^2, $\varepsilon = (a_1 - a_2) / R \approx 5$ рад/с^2.

5.1. $p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^4 / 4} = 0{,}5$ кг · м/с. **5.2.** $\varphi = \mathrm{arctg}(\beta / \alpha t) = 45°$. **5.3.** $F = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} = 5$ Н. **5.4.** $p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2\tau^4 / 36} = 10$ кг · м/с. **5.5.** При $t = 0$ $\vec{F} = \beta\vec{j} = 4\vec{j}$, при $t = \beta / \gamma = 2$ с $\vec{F} = -\beta\vec{j} = -4\vec{j}$. **5.6.** 1) $\Delta p = m(\sqrt{\upsilon_0^2 + 2\pi Ra_\tau} + \upsilon_0) \approx 10$ г · м/с; 2) $\Delta p \approx 4$ г · м/с. **5.7.** $\upsilon \approx 1$ км/с. **5.8.** $\langle F_{\text{тр}}\rangle \approx 141{,}5$ Н, $\langle N\rangle \approx 255$ Н. **5.9.** $\upsilon \approx 9{,}8$ м/с. **5.10.** $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 4\upsilon_0^2\cos^2\alpha} \approx 125$ м/с. **5.11.** $\upsilon = \sqrt{2\mu g(\eta^2 s_2 - s_1)} \approx 4$ м/с. **5.12.** 1) $\upsilon = 2mu / (2m + M) \approx 0{,}93$ м/с; 2) $\upsilon = m(3m + 2M)u / (2m + M)(m + M) \approx 1{,}1$ м/с. **5.13.** $\upsilon_1 = m\upsilon / (M - m) = 1{,}2$ м/с, $\upsilon_2 = M\upsilon / (M - m) = 2$ м/с. **5.14.** $\upsilon_{з} = \upsilon_0 - mu / (m + M) = 1{,}5$ м/с, $\upsilon_{п} = \upsilon_0 + mMu / (m + M)^2 \approx 2{,}3$ м/с. **5.15.** $s_{п} = ml / (m + M) = 1$ м, $\Delta r_{ч} = Ml / (m + M) = 3$ м. **5.16.** $\upsilon \approx 6{,}4$ м/с. **5.17.** $l = (\upsilon_1 + \upsilon_0\cos\alpha)\upsilon_0\cos\alpha / g(1 - \eta) \approx 1$ км. **5.18.** $\upsilon = \sqrt{\eta^2\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = 5$ м/с. **5.19.** 1) $\upsilon = 0{,}2$ м/с; 2) $\upsilon = 2{,}2$ м/с; 3) $\upsilon = 1$ м/с. **5.20.** $\upsilon = \sqrt{\eta^2\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\eta\upsilon_1\upsilon_2\sin\alpha} / (1 + \eta) \approx 1{,}4$ м/с, $\varphi \approx 47°$. **5.21.** $\upsilon = \sqrt{g / 2h} \times LM / (m + M) \approx 4{,}3$ м/с. **5.22.** 1) $p = m\omega l / 2 = 0{,}45$ кг · м/с; 2) $L_z = ml^2\omega / 3 = 0{,}18$ кг · м^2/с. **5.23.** $M = 2\sqrt{\alpha\beta / \mathrm{tg}\varphi} = 6$ Н · м, $L = \alpha / \sin\varphi = 8{,}5$ кг · м^2/с. **5.24.** $\vec{L} = -\vec{k}mg\upsilon_0 t^2\cos\alpha / 2$, $L = m\upsilon_0^3\cos\alpha\sin^2\alpha / 2g \approx 9{,}2$ кг · м^2/с. **5.25.** $\Delta L = 2mgl\sqrt{1 - g^2 / l^2\omega^4} / \omega \approx 0{,}01$ кг · м^2/с, относительно центра окружности. **5.26.** $\nu_2 = \nu_1(M / 2 + m / 4) / (M / 2 + m) = 3{,}5$ мин$^{-1}$. **5.27.** $\omega = m\upsilon / R(M + m / 2) = 0{,}3$ рад/с. **5.28.** $\omega = m_0\upsilon d / (ml^2 / 12 + m_0d^2) = 2$ рад/с. **5.29.** $\Delta t = m\upsilon l / M_{\text{тр}} = 30$ с. **5.30.** $\omega_2 = \omega_1(m / 6 + 4m_0d^2 / l^2) / (m / 6 + m_0) \approx 0{,}94$ рад/с. **5.31.** $\upsilon = 3MR\omega / 2m \approx 18$ м/с. **5.32.** $\omega_0 / \omega = 1 + 3 / \eta \approx 1{,}3$. **5.33.** $L_z = mgRt \approx 0{,}4$ кг · м^2/с.

6.1. $A = -9$ Дж. **6.2.** $A = 42$ Дж, сила консервативная. **6.3.** $A = mg(\mu l + h) = 245$ Дж. **6.4.** 1) $A = 4F_0 / \pi \approx 2{,}5$ Дж; 2) $A = -4F_0 / \pi \approx -2{,}5$ Дж; 3) $A = 0$. **6.5.** $A = 8mg / 9\alpha = 196$ Дж. **6.6.** $A = k_1k_2\Delta l^2 / 2(k_1 + k_2) = 1{,}2$ Дж. **6.7.** $A = -\mu mgs / (1 - \mu\mathrm{ctg}\alpha) \approx -71$ Дж. **6.8.** $A = m\alpha^4\Delta t^2 / 8 = 625$ Дж. **6.9.** $A = m\alpha Rt^2 / 2 = 5$ Дж. **6.10.** $A = \alpha\Delta t^3(4\beta + 3\gamma\Delta t) / 4 = 22{,}4$ Дж. **6.11.** $h_2 = 2(h_1 + A_{\text{тр}} / mg) / 3 = 30$ см, $\upsilon = \sqrt{gh_2} \approx 1{,}7$ м/с. **6.12.** $A = mh(g + 2h / \Delta t^2) \approx 20$ кДж, $P = 2mh(g + 2h / \Delta t^2) / t \approx 8$ кВт. **6.13.** $A_{\text{тр}} = -m\upsilon_0^2 / 2 = -50$ Дж, $P_{\text{ср}} = -\mu mg\upsilon_0 / 2 = -9{,}8$ Вт. **6.14.** $A = 2m\beta\Delta t(\alpha + \beta\Delta t) = 0{,}25$ Дж, $P = 2m\beta(\alpha + 2\beta t) = 0{,}3$ Вт. **6.15.** $P = \pm mg\upsilon_0\sin\alpha / \sqrt{2} = \pm 98$ Вт. **6.16.** $P_{\max} = -m\upsilon_0^2\sqrt{\alpha g} / 2 \approx -11$ Вт. **6.17.** $P_{\text{ср}} = 45$ мВт. **6.18.** $P = t(\alpha^2t^2 / 2 + \beta^2) / m = 91{,}2$ Вт. **6.19.** $r_0 = 2\alpha / \beta = 25$ км, устойчивое положение. **6.20.** $r_m = 3\alpha / \beta = 0{,}06$ м, $F_{\max} = \beta^3 / 27\alpha^2 \approx 0{,}02$ Н. **6.21.** $\upsilon = 2(m + M)\sqrt{gl}\sin(\alpha / 2) / m \approx 439$ м/с, $\eta = M / (M + m) \approx 0{,}998$. **6.22.** $\Delta l = \sqrt{m(2gl - \upsilon^2) / k} \approx 3$ см. **6.23.** $\alpha \approx 53°$, $\upsilon \approx 1{,}8$ м/с. **6.24.** $\upsilon = \sqrt{2gR / 3} \approx 1{,}8$ м/с. **6.25.** $F = \alpha\sqrt{1 + 4\pi^2} \approx 63{,}6$ мН. **6.26.** $\upsilon \approx 351$ м/с. **6.27.** $K_{\text{вр}} = K / 3 = 3$ Дж, $K_{\text{п}} = 2K / 3 = 6$ Дж. **6.28.** $\upsilon = \sqrt{6gl}\sin(\alpha / 2) \approx 5{,}4$ м/с. **6.29.** $K = m^2g^2t^2 / 2(M / 2 + m) \approx 11{,}4$ Дж. **6.30.** $h = \alpha R_з / (1 - \alpha) \approx 1593$ км, где $\alpha = \upsilon_0^2 / 2gR_з$. **6.31.** $h = H / 2 = 3$ м, $s_{\max} = H = 6$ м. **6.32.** $A = k\alpha l_0^2(1 + \alpha) / 2(1 - \alpha)^2 \approx 28{,}2$ мДж, где $\alpha = m\omega^2 / k$. **6.33.** $\Delta l \approx 13{,}4$ см. **6.34.** $\Delta K = -m_1m_2(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2) / 2(m_1 + m_2) = -625$ кДж. **6.35.** $\upsilon_2 = (\upsilon_0^2 - \upsilon^2) / \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon^2 - 2\upsilon_0\upsilon\cos\alpha} \approx 3{,}3$ м/с, $m_2 = m_1(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) / \upsilon_2^2 = 35$ г. **6.36.** $\varphi = \arccos(\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha / u_1u_2) \approx 70°$. **6.37.** $\upsilon = 1{,}1$ м/с, $K \approx 0{,}03$ Дж. **6.38.** $\eta = 2m_1 / (m_1 + m_2) = 0{,}5$. **6.39.** $m_2 / m_1 = 3$. **6.40.** $h \approx 2{,}6$ см. **6.41.** $\Delta U = m_1m_2(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 / 2(m_1 + m_2) \approx 0{,}47$ Дж. **6.42.** $m_2 = m_1 / (4\cos^2(\alpha / 2) - 1) = 15$ г. **6.43.** $k_c = \beta(m_1 + m_2) / \alpha m_1 - 1 \approx 0{,}54$, $k_э = (1 - m_2\beta / m_1\alpha)^2 + m_2\beta^2 / m_1\alpha^2 \approx 0{,}6$. **6.44.** $\eta = 1 - \mathrm{tg}^2\alpha_2 - m_1 / m_2\cos^2\alpha_2 = 0{,}4$. **6.45.** $h = (1 + k_c)^2l(1 - \cos\alpha) / (1 + m_2 / m_1)^2 \approx 8$ см.

7.1. $\alpha = \mathrm{arctg}(F / mg) \approx 17°$, $T = \sqrt{m^2g^2 + F^2} \approx 0{,}51$ Н. **7.2.** $F = \mu mg / (\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \approx 16$ Н. **7.3.** $\alpha = \arcsin(m_3 / 2m_1) \approx 5{,}7°$. **7.4.** $\Delta x = 2mg / k \approx 2$ см. **7.5.** $\mu = (m_1\sin\alpha - 2m_2\sin\beta) / (2m_2\cos\beta) \approx 0{,}42$. **7.6.** $F = mg(R + l) / \sqrt{l^2 + 2lR} \approx 27$ мН. **7.7.** $\mu = \eta / (1 - \eta) \approx 0{,}43$. **7.8.** $T_1 = g(m / 2 + m_0l / L) \approx 11{,}8$ Н, $T_2 = g(m / 2 + m_0(1 - l / L)) \approx 17{,}6$ Н.

7.9. $\alpha = \mathrm{arctg}((P - F\cos\beta) / F\sin\beta) \approx 77°$, $T = F\sin\beta / \cos\alpha \approx 450$ Н. **7.10.** $\alpha > \mathrm{arctg}(R / H)$, $\mu_{\min} = R / H$. **7.11.** $\mu \geq \sin 30° / (1 + \cos 30°) \approx$ $\approx 0{,}27$. **7.12.** $T = mg / 2\cos\alpha \approx 49$ Н. **7.13.** $\Delta x = L(\rho_п - \rho_з) / 4(\rho_п + \rho_з) \approx$ $\approx 1{,}3$ мм. **7.14.** $x = ((m_2 - m_1)(L / 2 + R_1)) / (m_1 + m_2 + m) \approx 9$ см. **7.15.** $\Delta l =$ $= 12{,}5$ см. **7.16.** $\upsilon = (m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1) / (m_1 + m_2) = 0{,}175$ м/с. **7.17.** $F_{\min} =$ $= mg / 2\sqrt{2} \approx 3{,}5$ Н. **7.18.** $F_{\min} = mg / 2 \approx 9{,}8$ кН. **7.19.** $\alpha = 30°$. **7.20.** $\Delta m =$ $= M / gr \approx 2{,}6$ г. **7.21.** $M_{тр} = m_1\Delta lgd / 2 \approx 78 \cdot 10^{-5}$ Н $\cdot$ м. **7.22** $x =$ $= R / 6$. **7.23.** $\alpha = \mathrm{arctg}(2\mu) \approx 39°$. **7.24.** $\alpha = \mathrm{arctg}(\sqrt{3} / 9) \approx 11°$. **7.25.** $F =$ $= mg\sqrt{h(2R - h)} / (R - h) \approx 26$ Н. **7.26.** $F_B = gL(0{,}5m + M) / (L - l_1) \approx$ ≈ 412 Н, $F_A = F_B - g(m + M) = g(Ml_1 - m(0{,}5L - l_1)) / (L - l_1) \approx 20$ Н (F_A направлена вверх, F_B – вниз). **7.27.** $\mu = (2mg - P\sin\alpha) / P\cos\alpha \approx 0{,}2$. **7.28.** $h = d / 2\mathrm{tg}\alpha \approx 1{,}2$ м.

8.1. $T = 2$ с$^{-1}$, $\varphi = \omega\tau = \pi / 4$, $x \approx 14$ см, $\upsilon \approx 44$ см/с. **8.2.** $\upsilon_{\max} = \omega A =$ $= 0{,}5$ см/с, $a_{\max} = \omega^2 A = 0{,}25$ см/с^2. **8.3.** 1) $\varphi = \pi / 6, -7\pi / 6$; 2) $\varphi =$ $= -\pi / 6, 7\pi / 6$. **8.4.** $\Delta\varphi = \pi / 2$. **8.6.** $x = 10^{-2}\cos(2t + \pi / 3)$ (м). **8.7.** $\omega =$ $= 0{,}52$ с$^{-1}$, $A = 25$ см. **8.8.** $\upsilon_1 / \upsilon_2 = 1{,}12$, $a_1 / a_2 = x_1 / x_2 = 0{,}5$. **8.9.** $a \approx$ ≈ 12 см/с^2. **8.10.** $\omega = a_m / \upsilon_m = 10$ с$^{-1}$, $A = \upsilon_m^2 / a_m = 0{,}5$ см, $T = 0{,}628$ с. **8.11.** $\Delta\varphi = \pi / 3$. **8.12.** $\Delta\varphi = \pm 2\pi / 3$. **8.13.** $\varphi \approx 36{,}5°$, $A = 4{,}35$ см. **8.14.** $x =$ $= 10\sin(62{,}8t + \pi)$ (см). **8.15.** $(x / 3)^2 + (y / 4)^2 = 1$, эллипс, движение по часовой стрелке. **8.16.** $y = 1{,}5(x^2 - 2)$. **8.17.** $x = 5{,}46\cos(2\pi t + \pi / 6)$ (см). **8.18.** $\pi / 3$. **8.19.** $T = 2 / (\nu_1 - \nu_2) = 4$ с. **8.20.** $\upsilon = 2\pi\nu A\sqrt{2} = 4{,}44$ м/с, $a_\tau = 0$, $a_n = 1971$ м/с^2. **8.21.** $F = m\omega^2 A = 1$ мН. **8.22.** $F = 20$ мН, $\Pi_m =$ $= K_m = m\omega^2 A^2 / 2 = 0{,}5$ мДж. **8.23.** $k = 4\pi^2 m / T^2 = 98{,}6$ Н/м. **8.24.** $T =$ $= 2\pi\sqrt{l / (g + a)} = 1{,}79$ с, $T = 2\pi\sqrt{l / (g - a)} = 2{,}32$ с. **8.25.** $\omega_0 / \omega_1 \approx 0{,}7$. **8.26.** $T = 1{,}55$ с. **8.27.** Уменьшится в 1,5 раза. **8.28.** $l = 12{,}5$ см. **8.29.** $E =$ $= kA^2 / 2 = 0{,}4$ Дж. **8.30.** $a = l / (2\sqrt{3}) = 10{,}4$ см. **8.32.** $N = 1{,}75mg = 3{,}4$ Н. **8.33.** $T = 0{,}31$ с, $\nu = \sqrt{2\alpha / m} / 2\pi = 3{,}18$ Гц. **8.34.** $I = 8{,}9 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2. **8.35.** $T = 1{,}6$ с. **8.36.** $\beta = \ln n / t_1 = 0{,}004$ с$^{-1}$. **8.37.** $t_2 = t_1 \ln n_2 / \ln n_1 = 8$ мин. **8.38.** $\delta = 0{,}32$. **8.39.** $N = \ln n / \delta = 22$. **8.40.** $t \approx 7{,}95$ с, $N = \ln n / \delta = 20$. **8.41.** $\mu = m\ln 2 / t = 6{,}9 \cdot 10^{-5}$ кг/с. **8.42.** $\delta = 0{,}765$. **8.43.** $Q = \pi N / \ln n =$ $= 45{,}3$. **8.44.** $Q \leq 0{,}5$. **8.45.** 0,032. **8.46.** $t = k\pi T\delta = 9{,}42$ с. **8.47.** В 16 раз. **8.48.** $\nu = \sqrt{g / \Delta l} / 2\pi = 1727$ об/мин. **8.49.** $\upsilon = l\sqrt{k / m} / 2\pi = 51$ км/ч. **8.50.** $\nu_0 = \sqrt{2\nu^2 - \nu_р^2} = 10{,}4$ кГц. **8.51.** Ниже на 2 Гц. **8.52.** $A_р / A_0 = 1{,}55$.

8.53. $\delta = \sqrt{\Delta\nu / \nu_0} = 0{,}2$. **8.54.** $\mu = \sqrt{k / m} / 2mn$. **8.55.** $F = 2\pi\mu\nu_0 A_р$ = = 2,52 мН. **8.56.** ν = 4,74 кГц. **8.57.** $A_р = \nu_0 x_0 / \Delta\nu$ = 25 мм. **8.58.** $\Delta\varphi$ = = 88,2°; 91,8°. **8.59.** В 16 раз. **8.60.** $P_{ср}$ = 18,9 мВт.

9.1. $A(0, t) = 2\cos 1000\pi t$ (мм), $s(x, t)$ = –1,98 мм. **9.2.** υ = 340 м/с, u_m = = 1,57 м/с. **9.4.** x = 1,6 м, $\Delta\varphi = 3\pi$. **9.5.** υ = 360 м/с. **9.6.** E = 70 ГПа. **9.7.** υ = 1260 м/с, υ = 331 м/с. **9.8.** γ = 1,4. **9.9.** $\Delta T / \Delta z \approx$ 1,73 мК/м. **9.10.** $6n$, $6(n + 1/2)$ (см) (где n = 1, 2, 3, …). **9.11.** 1) 433,6 Гц; 2) 216,5 Гц. **9.12.** 10 см. **9.13.** 244 Гц. **9.14.** 57 мс. **9.15.** $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. **9.16.** ν_0 = = 400 Гц. **9.17.** 1,08 кГц, 0,93 кГц. **9.18.** $\Delta\nu / \nu$ = 0,14. **9.19.** u = 23,35 м/с, ν_0 = 696 Гц. **9.20.** υ = 23,1 м/с. **9.21.** u = 3,74 м/с. **9.22.** W = 0,1 Дж/с. **9.23.** A = 0,2 мм. **9.24.** $W = \pi I d^2 l / 4\upsilon$ = 0,569 мДж. **9.25.** $w_{ср} = P / 4\pi r^2\upsilon$ = = 0,135 Дж/м^3. **9.26.** P = 301 Вт, $w_{ср}$ = 0,45 мДж/м^3. **9.27.** $A = 32 \cdot 10^{-9}$ м. **9.28.** υ_{max} = 0,81 мм/с. **9.29.** $L_2 = L_1 + 20\lg(r_1 / r_2)$ = 45,5 дБ. **9.30.** $p_{эф}$ = = 16,4 Па.

10.1. $F_h = \rho_{воды} g a l^2$ = 11 Н, $F = \rho_{воды} g a b l$ = 73,5 мН. **10.2.** $\rho_0 = 8{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. **10.3.** $F_h = \pi\rho g D h^2 / 2$ = 7,7 кН. **10.4.** $H = p_0 / [(l / h - 1)\rho g]$ = 10,2 м. **10.5.** υ = 0,32 м/с. **10.6.** $d = \sqrt{4V_t / (\pi\sqrt{2gh})}$ = 14,1 мм. **10.7.** υ_2 = = $\upsilon_1(D / d_2)^2$ = 0,45 м/с. **10.8.** $p = \rho\upsilon^2 / 2$ = 0,25 МПа. **10.9.** В 3 раза. **10.10.** $\upsilon = \pi d^2\rho / 18\eta$ = 11,34 м/с. **10.11.** $\eta = (\rho_{ст} - \rho)d^2 g / 18\upsilon$ = = 0,685 Па · с. **10.12.** $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2\Delta p / \rho}$ = 4,76 м/с. **10.13.** $\upsilon = \sqrt{2gh}$ = = 10,2 м/с. **10.14.** $F = \rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)S / 2$ = 239,6 кН. **10.15.** $F = 4\rho Q^2 / \pi d^2$ = = 127 кН. **10.16.** $Q = S_2\sqrt{\rho g\Delta h / \left[1 - (S_2 / S_1)^2\right]}$ = 0,96 л/с. **10.17.** υ_2 = = 12,5 м/с, Δp = 78 кПа. **10.18.** υ = 23,6 м/с. **10.19.** $F = \rho\upsilon^2 S\sin\varphi$ = 5,5 Н. **10.20.** $s = 2\sqrt{(H - h)h}$ = 1,4 м. **10.21.** h = 0,8 м. **10.22.** Re = 1200, ламинарное течение. **10.23.** $Q_m = \pi d \mathrm{Re}_{кр}\eta / 4$ = 36,1 г/с. **10.24.** Re = = $d^3\rho(\rho - \rho_{св})g / 18\eta^2 = 4{,}1 \cdot 10^{-3}$, ламинарное течение. **10.25.** Δp = = $128 Q L\eta / \pi D^4$ = 2,95 кПа. **10.26.** $D = 2(VL\eta / \pi t\Delta p)^{1/4}$ = 9,1 см. **10.27.** η = = $\pi(d / 2)^4\Delta p / (8lQ)$ = 9,86 мкПа · с. **10.28.** $\Delta p_1 / \Delta p_2 = \rho Q / 16\pi\eta l$ = 0,2. **10.29.** $\beta = 1 / (\rho\upsilon^2) = 7{,}5 \cdot 10^{-10}$ м^2/Н. **10.30.** $\Delta l = \beta p L$ = 1,6 мм.

11.1. τ = 15,6 мкс. **11.2.** τ_0 = 63,3 мкс. **11.3.** $l \approx$ 0,72 м, $\alpha \approx$ 44°. **11.4.** υ = = 0,96c. **11.5.** l = 2 м. **11.6.** Δt = 24 мин. **11.7.** $\Delta t = 8 \cdot 10^{-9}$ с. **11.8.** Δt =

= 10 ч. **11.9.** 1) $\varphi \approx 48°$; 2) $\varphi = 90°$. **11.10.** 1) $l \approx 0{,}14l_0$; 2) $\rho \approx 50{,}2\rho_0$. **11.11.** $A = 7{,}7 \cdot 10^{-11}$ Дж. **11.12.** $\upsilon_0 = 0{,}98c$. **11.13.** $\upsilon_{02} = 0{,}345c$. **11.14.** $\Delta t \approx$ $\approx 12{,}94$ мкс. **11.15.** $\upsilon = 0{,}998c$, $l \approx 126$ м. **11.16.** 1) $a \approx 2{,}15 \cdot 10^{15}$ м/с^2; 2) $a \approx 3{,}68 \cdot 10^{14}$ м/с^2. **11.17.** $p = 1{,}576 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с, $a = 5{,}71 \cdot 10^{16}$ м/с^2; ускорение увеличится в $n \approx 1{,}33$ раза. **11.18.** $\upsilon = c\sqrt{1 - 1/(k+1)^2} =$ $= 0{,}94c$. **11.19.** $\upsilon = Ft / \sqrt{(Ft/c)^2 + m_0^2}$. **11.20.** $t \approx 7 \cdot 10^{12}$ лет. **11.21.** $\Delta m =$ $= 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ кг. **11.22.** $\Delta m \approx 10^{-5}$ кг. **11.23.** $\upsilon = 0{,}36c$. **11.24.** $E = 3{,}6 \times$ $\times 10^{-19}$ Дж. **11.25.** $m \approx 6912m_0$. **11.26.** $E = 1{,}08 \cdot 10^{14}$ Дж, $P = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ Вт. **11.27.** $\upsilon_0 = 0{,}999943c$. **11.28.** $F = 2{,}3 \cdot 10^{-13}$ Н. **11.29.** $\upsilon = c$. **11.30.** $p =$ $= 1{,}6 \cdot 10^{-21}$ кг · м/с.

12.1. $\Delta p \approx 0{,}4$ МПа. **12.2.** $n = mN_A / (MV) \approx 0{,}6 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$. **12.3.** $p_2 \approx$ $\approx 0{,}36$ МПа. **12.4.** $p_1 / p_2 \approx 1{,}3$. **12.5.** $\Delta p = kT\Delta N / V \approx 4{,}2$ кПа. **12.6.** $N_1 \approx$ $\approx 10^{23}$, $N_2 \approx 5 \cdot 10^{23}$. **12.7.** $\rho = 8{,}3$ кг/м^3. **12.8.** $p_2 < p_{max}$, не лопнет. **12.9.** $p =$ $= p_0(T_1 + T_0) / 2T_0 \approx 1{,}05 \cdot 10^5$ Па. **12.10.** $\Delta m = pSHM(1/T_1 - 1/T_2)/R =$ $= 3$ кг. **12.11.** $\Delta N = \Delta pV / (kT) \approx 1{,}2 \cdot 10^{21}$. **12.12.** $N_1 = 3\Delta N / 2 = 6 \cdot 10^{22}$, $N_2 = \Delta N / 2 = 2 \cdot 10^{22}$. **12.13.** $p_3 = p_1(p_2 / p_1)^{1/\gamma} \approx 0{,}52$ МПа. **12.14.** $\Delta m =$ $= \Delta pMV / (RT) \approx 33{,}7$ г. **12.15.** $N = 3{,}3 \cdot 10^{23}$. **12.16.** $m = pV\rho_0 T_0 / p_0 T \approx$ $\approx 0{,}56$ кг. **12.17.** $M = 28$ г/моль. **12.18.** $p \approx 10{,}8$ МПа. **12.19.** $p_3 = p_1 n^{1-\gamma} \approx$ $\approx 0{,}57$ атм. **12.20.** $m \approx 64{,}2$ г. **12.21.** $p \approx 302$ кПа. **12.22.** $\Delta m = 2{,}6$ г. **12.23.** $V_2 = pV_1M / (\rho RT) = 1{,}35$ л. **12.24.** $V_1 = 2\Delta V = 4$ л. **12.25.** $l =$ $= p_0(L - h) / (2(p_0 + \rho gh))$. **12.26.** $p_2 = p_1R_1^3 / (R_1^3 + R_2^3)$. **12.27.** $\Delta h =$ $= 4hP / (\pi D^2 p_0 + 4P) \approx 1{,}4$ см. **12.28.** $\Delta T = 0{,}3T_1 = 87$ К. **12.29.** $V_2 =$ $= 550$ см^3. **12.30.** $\Delta h = h\Delta T / T_1 \approx 1$ см. **12.31.** $F_{тр} = \pi p_0 \Delta T d^2 / 4T_0 \approx$ $\approx 11{,}7$ Н. **12.32.** $\gamma = \ln(p_0 / (p_0 + mg/S)) / \ln(1 - \Delta h / h) \approx 1{,}6$. **12.33.** $V_2 =$ $= p_1V_1 / p_0 = 0{,}25$ л, $p_2 = p_1(V_1 / V_2)^\gamma \approx 132$ кПа. **12.34.** $\alpha \approx 0{,}12$. **12.35.** $p_2 / p_1 = 1{,}25$. **12.36.** $N \approx 3{,}6 \cdot 10^{24}$. **12.37.** $N = N_A m(\alpha + 1) / M \approx 4{,}5 \times$ $\times 10^{23}$. **12.38.** $d \approx 0{,}36$ нм. **12.39.** $T = 260$ К. **12.40.** $a = 0{,}133$ Н · м^4/моль^2, $b = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. **12.41.** $n = 2{,}45$. **12.42.** $T_2 / T_1 \approx 1{,}85$ раза. **12.43.** $T \approx$ ≈ 364 К. **12.44.** $\rho = 8p_{кр}M / (3RT_{кр}) \approx 25$ кг/м^3. **12.45.** $V_{кр} \approx 95$ см^3. **12.46.** $V_{max} = 2{,}9$ л. **12.47.** $p_i = 27(T_{кр}p)^2 / (64T^2 p_{кр}) \approx 1{,}3$ кПа. **12.48.** $\varepsilon =$ $= pb / (RT) \approx 33\%$. **12.49.** $d \approx 0{,}29$ нм.

13.1. $\varepsilon_{вр} = 2E / (5\nu N_A) = 0{,}4 \cdot 10^{-20}$ Дж. **13.2.** $E_{вр} \approx 297$ Дж. **13.3.** $\varepsilon_{вр} =$ $= 3p / (2n) = 1{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж, $T \approx 725$ К. **13.4.** $\varepsilon_{Ne} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\varepsilon_{O_2} \approx$ $\approx 2{,}4 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\varepsilon_{H_2O} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-20}$ Дж. **13.5.** $p \approx 1$ атм. **13.6.** $E_{пост} \approx 5$ МДж,

$E_{вр} \approx 3{,}3$ МДж. **13.7.** $p_2 / p_1 = 4{,}5$. **13.8.** $\Delta T = 2T_1 = 580$ К. **13.9.** $n = 3pN_A / (M\upsilon_{кв}^2) = 7{,}2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$. **13.10.** $E_{вр} \approx 4{,}3$ кДж. **13.11.** $E = 50$ кДж. **13.12.** $\upsilon_{кв} = \sqrt{3pV / m} \approx 632$ м/с. **13.13.** $n = 10^{25}$ м$^{-3}$. **13.14.** $n_1 \approx 3{,}5 \times 10^{24}$ м$^{-3}$, $n_2 \approx 4{,}2 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **13.15.** $\upsilon_в = 1552$ м/с, $\overline{\upsilon} = 1752$ м/с, $\upsilon_{кв} = 1901$ м/с; $\Delta N / N \approx 0{,}5\%$. **13.16.** $\upsilon_{кв2} / \upsilon_{кв1} = \eta^{0,5}$. **13.17.** $N = m\upsilon_{кв}^2 / (3kT) \approx 2 \cdot 10^{23}$. **13.18.** $\upsilon_{кв2} \approx 537$ м/с, $\varepsilon_{пост} = 3pVM / (2N_A m) \approx 6{,}7 \cdot 10^{-21}$ Дж, $E = 12$ МДж. **13.19.** $\upsilon_{кв} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м/с, $\varepsilon \approx 5{,}9 \cdot 10^{-21}$ Дж. **13.20.** $\overline{\upsilon} \approx 545$ м/с. **13.21.** $\Delta N / N \approx 0{,}46\%$. **13.22.** $\Delta N / N \approx 57\%$. **13.23.** $T = M_{H_2} T_0 / M_{N_2} \approx 21$ К. **13.24.** $\upsilon = \sqrt{6 \ln 2 RT_1 / M}$. **13.25.** $\Delta N \approx 2{,}5 \cdot 10^{14}$. **13.26.** $\Delta N_1 / \Delta N_2 \approx 91$. **13.27.** $\Delta N / N \approx 3{,}4\%$. **13.28.** $\Delta N / N \approx 1{,}9\%$. **13.29.** $\Delta N / N \approx 43\%$. **13.30.** $\nu = 21{,}7$ Гц. **13.31.** $h = 4227$ м. **13.32.** $m \approx 10^{-24}$ кг, $d \approx 10^{-9}$ м. **13.33.** $p \approx 96$ кПа. **13.34.** $p \approx 80$ кПа, $n \approx 2 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **13.35.** $\rho_0 \approx 1{,}28$ кг/м^3, $\rho \approx 0{,}78$ кг/м^3.

14.1. $A = 6$ кДж, $\Delta U = 9$ кДж. **14.2.** $A = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1) / 2 = 180$ кДж, $\Delta U = 3(p_2V_2 - p_1V_1) / 2 = 480$ кДж, $Q = 660$ кДж. **14.3.** $A \approx 251$ кДж, $Q \approx 877{,}6$ кДж. **14.4.** $Q = (i + 2)p_0V(T_2 / T_1 - 1) \approx 1320$ кДж. **14.5.** $c_V \approx 718$ Дж/(кг · К), $c_p \approx 1007$ Дж/(кг · К). **14.6.** $c_V \approx 2{,}6$ кДж/(кг · К), $c_p \approx 3{,}7$ кДж/(кг · К). **14.7.** $c_p \approx 909$ Дж/(кг · К), $c_V \approx 649$ Дж/(кг · К). **14.8.** H_2, $C_p \approx 29{,}1$ Дж/(моль · К), $C_V \approx 20{,}8$ Дж/(моль · К). **14.9.** $A \approx 315$ Дж, $\Delta U \approx -750$ Дж, $Q \approx -435$ Дж. **14.10.** $Q \approx 76$ Дж. **14.11.** $M = R / (c_p - c_V) = 32$ г/моль, $c_V \approx 649$ Дж/(кг · К), $c_p \approx 909$ Дж/(кг · К). **14.12.** $\Delta T = 2\nu a(V_1 - V_2) / (iRV_1V_2) \approx -15{,}4$ К, $Q = \nu^2 a(V_2 - V_1) / (V_1V_2) \approx 957{,}6$ Дж, где $a = 27(T_{кр}R)^2 / 64p_{кр}$. **14.13.** $Q = 62{,}5$ кДж. **14.14.** $A \approx -2{,}5$ кДж. **14.15.** $c_V = 11R / 4M = 90$ Дж/(кг · К), $c_p = 17R / 4M = 139$ Дж/(кг · К). **14.16.** 1) $A \approx 11{,}5$ кДж; 2) $\Delta U = 0$; 3) $Q \approx 11{,}5$ кДж. **14.17.** $c_p \approx 978$ Дж/(кг · К), $c_V \approx 698$ Дж/(кг · К). **14.18.** $\gamma \approx 1{,}55$. **14.19.** $C = 3R \approx 24{,}9$ Дж/(моль · К). **14.20.** $V_2 = V_1 / n^{5/7} \approx 0{,}23$ м^3, $T_2 = T_1 n^{2/7} \approx 411$ К, $\Delta U \approx 82$ кДж. **14.21.** $m \approx 28{,}4$ г. **14.22.** $\Delta T \approx -12$ К. **14.23.** $C = 5R / 2 \approx 20{,}8$ Дж/(моль · К). **14.24.** $\Delta U = 325$ кДж, $A = 40$ кДж, $Q = 365$ кДж. **14.25.** $A_T - A_Q = 1{,}6$ кДж. **14.26.** $t_2 \approx 39$°C, $p_2 \approx 268$ кПа. **14.27.** $A \approx 1{,}5$ кДж, $\Delta U \approx 3{,}75$ кДж, $\gamma = 1{,}4$. **14.28.** $A \approx 5{,}9$ кДж, $\Delta U \approx 14{,}8$ кДж, $Q \approx 20{,}7$ кДж. **14.29.** $A = 5R \approx 41{,}6$ Дж. **14.30.** $A = 2{,}3$ кДж, $\Delta U = 68$ Дж. **14.31.** В 2,23 раза. **14.32.** $\Delta U \approx -4$ кДж, $A \approx 4$ кДж. **14.33.** Азот, $V_1 \approx 1{,}1$ м^3. **14.34.** $A \approx 2{,}1$ кДж. **14.35.** 1) $\upsilon = \sqrt{2(c(T_{пл} - T_1) + q)} \approx 358$ м/с; 2) $\upsilon \approx 321$ м/с. **14.36.** $Q \approx 5{,}8$ кДж. **14.37.** $M = 4$ г/моль. **14.38.** O_2, $c_p \approx$

$\approx$ 909 Дж/(кг · К), $c_V \approx$ 649 Дж/(кг · К). **14.39.** $A_{AC} / A_{ABC} = (n + 1) / 2$. **14.40.** $V_2 \approx 0{,}68$ м^3, $T_2 \approx 405$ К, $\Delta U \approx 213$ кДж. **14.41.** $\Delta U = 7{,}5RT_0$. **14.42.** $C_V \approx 20{,}8$ Дж/(моль · К).

15.1. $T_1 = 400$ К. **15.2.** $\eta = (4\ln n - 2) / (6 + 4\ln n) \approx 8{,}8\%$. **15.3.** $\eta \approx 13\%$. **15.4.** $A' = (\eta - 1)A = -180$ Дж. **15.5.** $n = (1 - \eta) / (1 - 2\eta) = 3$, где $\eta = (T_1 - T_2) / T_1$. **15.6.** $\eta_x = (1 - \eta) / \eta \approx 5{,}7$. **15.7.** 1) $\eta = 20\%$; 2) $T_1 / T_2 = 0{,}8$. **15.8.** $\eta \approx 1{,}8\%$. **15.9.** $\eta \approx 5{,}6\%$. **15.10.** $\eta = 1 - T_1\ln(T_2 / T_1) / (T_2 - T_1) \approx 31\%$. **15.11.** $n = 1 / (1 - \eta)^{3,5} \approx 2{,}2$. **15.12.** $\eta \approx 0{,}43$ кДж. **15.13.** $A = (n - 1)mR(T_2 - T_1) / M$. **15.14.** $n = 1 / (1 - \eta)^{1,5} \approx 1{,}5$. **15.15.** $\eta \approx 10{,}5\%$. **15.16.** $\eta \approx 6\%$. **15.17.** $\eta = 1 - \ln n / (n - 1) \approx 9\%$. **15.18.** $A = 0{,}5$ МДж. **15.19.** $\eta \approx 18{,}8\%$. **15.20.** $\eta = (T_1 + T_2 - 2T_3) / (T_1 + T_2) \approx 29\%$. **15.21.** $\Delta S \approx 0{,}94$ Дж/К. **15.22.** $\Delta S \approx 9{,}5$ мДж/К. **15.23.** $\Delta S \approx 0{,}69$ Дж/К. **15.24.** $\Delta S \approx 8{,}8$ Дж/К. **15.25.** $V = \text{const}$. **15.26.** $\Delta S_{\text{азот}} / \Delta S_{\text{гелий}} = 0{,}2$; не изменится. **15.27.** $\Delta S \approx 3{,}2$ Дж/К. **15.28.** $n = V_2 / V_1 \approx 5$. **15.29.** $\Delta S \approx 64{,}8$ Дж/К. **15.30.** $\Delta S \approx 430$ Дж/К. **15.31.** $\Delta S \approx -28{,}8$ Дж/К. **15.32.** $\Delta S \approx 66{,}5$ Дж/К. **15.33.** $\Omega_2 / \Omega_1 = \exp(3 \cdot 10^{21})$. **15.34.** $C = 2\alpha T^2$, $Q = 2\alpha(T_2^3 - T_1^3) / 3$. **15.35.** $V_m = \gamma p_0 / \alpha(1 + \gamma)$. **15.36.** $\Delta S = \nu C_V\ln(T_2 / T_1) + \nu R\ln((V_2 - \nu b) / (V_1 - \nu b))$. **15.37.** $\Delta S = R(\nu_1\ln(1 + n) + \nu_2\ln(1 + 1 / n))$. **15.38.** $\Delta S = C_V\ln((T_1 + T_2)^2 / 4T_1T_2)$. **15.39.** $\Delta S \approx 772$ Дж/К. **15.40.** $\Delta S \approx 0{,}54$ Дж/К. **15.41.** $\Delta S \approx 1{,}63$ кДж/К. **15.42.** $\Delta S \approx 26{,}3$ кДж/К. **15.43.** $\Delta S = -273{,}8$ Дж/К.

16.1. $\alpha = \Delta Er / (4\pi R^2(R - r)) \approx 70$ мН/м. **16.2.** $\Delta E \approx 1{,}2$ мкДж. **16.3.** $R = 3$ мм, $\Delta T = 3\alpha / 2c\rho r \approx 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ К. **16.4.** $V \approx 3 \cdot 10^{-29}$ м^3, $d \approx 0{,}3$ нм. **16.5.** $p = 1{,}04 \cdot 10^5$ Па. **16.6.** $A \approx 398$ мкДж. **16.7.** $d \approx 2{,}2$ мм. **16.8.** $F \approx 52{,}1$ мН; $\eta \approx 51\%$. **16.9.** $p \approx 1{,}29 \cdot 10^5$ Па. **16.10.** $h \approx 4{,}9$ м. **16.11.** $\Delta l \approx 4{,}7$ мм. **16.12.** $\rho \approx 2{,}7$ г/см^3. **16.13.** $A \approx 1$ мДж. **16.14.** $h \approx 3{,}1$ см. **16.15.** $\Delta t = 23{,}7$ мин. **16.16.** $R \approx 1{,}8$ мм. **16.17.** $F \approx 2{,}8$ кН. **16.18.** $\rho \approx 1{,}28 \cdot 10^3$ кг/м^3. **16.19.** $F = \alpha\pi^2D^4\rho / 8m \approx 1{,}15$ Н. **16.20.** $\Delta h \approx 5{,}6$ мм. **16.21.** $\theta \approx 67°$, смачивание. **16.22.** $\rho = 802$ кг/м^3. **16.23.** $m \approx 0{,}02$ г. **16.24.** $R \approx 745$ мкм. **16.25.** $\Delta m = 7{,}85$ мг. **16.26.** $\beta \approx 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ °С$^{-1}$. **16.27.** $V \approx 1{,}42$ м^3. **16.28.** $h = 72$ мм. **16.29.** $d \approx 0{,}122$ мм. **16.30.** $\rho = 13{,}35$ г/см^3. **16.31.** $t \approx 158$°С.

17.1. $d \approx 0{,}27$ нм. **17.2.** Увеличится в 21,5 раза. **17.3.** 1) 770 мПа; 2) 77 мПа; 3) 7,7 мПа. **17.4.** $z = 1{,}03 \cdot 10^{11}$; $\lambda = 17$ нм. **17.5.** $\tau \approx 0{,}16$ нс. **17.6.** $\lambda \approx 0{,}8$ нм. **17.7.** $\lambda \approx 182$ нм. **17.8.** 1) λ не изменится, τ уменьшится в $\sqrt{n}$ раз; 2) λ увеличится в n раз, τ – в $\sqrt{n}$ раз. **17.9.** 1) $\eta \sim \sqrt{T}$; 2) $\eta \sim \sqrt{T}$; 3) $\eta \sim \sqrt{T}$. **17.10.** 1) не зависит от p; 2) $\eta \sim \sqrt{p}$; 3) $\eta \sim p^{1/5}$. **17.11.** 1) $D \sim 1 / p$; 2) $D \sim \sqrt{p}$; 3) $D \sim p^{(\gamma-3)/2\gamma}$. **17.12.** 1) $D \sim T^{3/2}$; 2) $D \sim T^{1/2}$; 3) $D \sim 1 / T$. **17.13.** $n = \eta N_A / DM$. **17.14.** $D = 6{,}4 \cdot 10^{-5}$ м²/с. **17.15.** æ ≈ 12,9 мВт/(м · К). **17.16.** $D \approx 8{,}38 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\eta \approx 15$ мкПа · с. **17.17.** $\eta_{Ar} / \eta_{O_2} \approx 1{,}1$, $D_{Ar} / D_{O_2} \approx 0{,}9$, $æ_{Ar} / æ_{O_2} \approx 0{,}5$. **17.18.** æ ≈ ≈ 8,4 мВт/(м · К). **17.19.** $D_{H_2} / D_{O_2} \approx 11$; $\eta_{H_2} / \eta_{O_2} \approx 1{,}4$; $æ_{H_2} / æ_{O_2} \approx 11$. **17.20.** 1) D увеличится в 4 раза, η не изменится; 2) D увеличится в 8 раз, η увеличится в 2 раза. **17.21.** $D \approx 9 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\eta \approx 1{,}14 \cdot 10^{-5}$ Па · с. **17.22.** $m = 21{,}1$ мг. **17.23.** $d\rho / dx \approx 573$ кг/м⁴. **17.24.** $t = 1$ ч. **17.25.** $d_д =$ $= 3$ см. **17.26.** $Q \approx 1{,}66$ МДж. **17.27.** $t_3 = 660{,}6$°С. **17.28.** $q = 64{,}3$ кВт/м², $t_3 = 253{,}6$°С. **17.29.** $F \approx 2$ мкН. **17.30.** $\eta \approx 17$ мкПа · с. **17.31.** $p \approx 89{,}8$ кПа. **17.32.** $\upsilon \approx 720$ км/ч. **17.33.** $Q = 32{,}2$ кДж.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Основные тригонометрические формулы

Основные тождества
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \ \mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ \mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
Формулы суммы
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\ \pm\ \cos\alpha\sin\beta,$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\ \mp\ \sin\alpha\sin\beta,$ $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$
Сумма функций
$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2},$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},$ $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$
Двойные углы
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
Формулы понижения степени
$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \ \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \ \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$
Связь функций
$\sin^2\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha},\ \ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$
Формулы приведения
$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\ \ \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\ \ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$

Таблица П2

Таблица производных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
C	0	x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
e^x	e^x	a^x	$a^x\ln a$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица П3

Таблица интегралов

$\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a \neq 1$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$	$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
$\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$
$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left\lvert \dfrac{1-\cos x}{\sin x} \right\rvert + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left\lvert \dfrac{1+\sin x}{\cos x} \right\rvert + C$

Таблица П4

Греческий алфавит

Обозначения букв	Названия букв	Обозначения букв	Названия букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	тета	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

Таблица П5

Десятичные приставки к названиям единиц

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^{9}	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^{3}	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

Таблица П6

Физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Стандартное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль · К)
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Окончание табл. П6

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^{8}$ м/с
Атомная единица массы	1 а. е. м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

Таблица П7

Обозначения и названия некоторых единиц

Обозначение	Название	Обозначение	Название	Обозначение	Название
Å	ангстрем	°C	градус Цельсия	Н	ньютон
а. е. м.	атомная единица массы	Дж	джоуль	Па	паскаль
Б	бел	К	кельвин	рад	радиан
б	барн	кал	калория	с	секунда
Вт	ватт	л	литр	ср	стерадиан
г	грамм	м	метр	ч	час
Гц	герц	мин	минута	эВ	электрон-вольт
л. с.	лошадиная сила	мм рт. ст.	миллиметр ртутного столба	кгс	килограмм-сила

Таблица П8

Единицы величин в СИ

Величина	Единица величины в СИ	Величина	Единица величины в СИ
Длина	м	Плотность	кг/м^3
Время	с	Сила	Н
Скорость	м/с	Давление, напряжение	Па
Ускорение	м/с^2	Момент силы	Н · м
Частота колебаний	Гц	Импульс	кг · м/с
Циклическая частота	с$^{-1}$	Момент импульса	кг · м^2/с
Плоский угол	рад	Момент инерции	кг · м^2
Угловая скорость	рад/с	Энергия, работа	Дж
Угловое ускорение	рад/с^2	Мощность, поток энергии	Вт
Масса	кг	Плотность потока энергии	Вт/м^2

Окончание табл. П8

Величина	Единица величины в СИ	Величина	Единица величины в СИ
Количество вещества	моль	Теплоемкость	Дж/К
Температура	К	Энтропия	Дж/К
Теплота	Дж	Вязкость	Па · с

Таблица П9

Некоторые внесистемные единицы

Единица	Значение в СИ	Единица	Значение в СИ
1 ч	3600 с	1 Å	10^{-10} м
1 год	$3{,}15 \cdot 10^{7}$ с	1 а. е. м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
1 атм	101,33 кПа	1 эВ	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
1 мм рт. ст.	133,3 Па	1 л	10^{-3} м^3
1 кал	4,18 Дж	1° (угловой градус)	$\frac{\pi}{180}$ рад
1 л. с.	735,5 Вт	1 кгс	9,81 Н

Таблица П10

Физические характеристики Солнца, Земли и Луны

Космическое тело	Средний радиус, 10^6 м	Масса, кг	Средняя плотность, г/см^3	Вторая космическая скорость, км/с	Период обращения вокруг оси, сут
Солнце	695	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	1,40	618	25,4
Земля	6,37	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	5,52	11,2	1,0
Луна	1,74	$7{,}35 \cdot 10^{22}$	3,35	2,38	27,3

Таблица П11

Расположение и физические характеристики больших планет Солнечной системы

Планета	Среднее расстояние от Солнца, 10^6 км	Масса в единицах массы Земли	Радиус в радиусах Земли	Средняя плотность, г/см^3	Период обращения вокруг Солнца, лет
Меркурий	57,9	0,055	0,38	5,43	0,24
Венера	108,2	0,815	0,95	5,24	0,62
Земля	149,6	1,00	1,00	5,52	1,00
Марс	227,9	0,107	0,53	3,94	1,88
Юпитер	778,5	318	11,2	1,33	11,87
Сатурн	1434	95,2	9,4	0,70	29,67

Окончание табл. П11

Планета	Среднее расстояние от Солнца, 10^6 км	Масса в единицах массы Земли	Радиус в радиусах Земли	Средняя плотность, г/см^3	Период обращения вокруг Солнца, лет
Уран	2871	14,5	4,0	1,30	84,05
Нептун	4495	17,2	3,9	1,76	164,49

Таблица П12

Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	Масса, кг	Энергия покоя, МэВ
Электрон	$9{,}10 \cdot 10^{-31}$	0,511
Протон	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	938
Нейтрон	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	939
α-Частица	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	3727

Таблица П13

Постоянные газов

Газ	M, г/моль	d, нм	ρ, кг/м^3	æ, мВт/(м · К)	η, мкПа · с	υ, м/с
He	4	0,20	0,18	141,5	18,9	965
Ar	40	0,35	1,78	16,2	22,1	319
H_2	2	0,27	0,09	168,4	8,4	1284
N_2	28	0,37	1,25	24,3	16,7	334
O_2	32	0,36	1,43	24,4	19,2	314
CO_2	44	0,40	1,98	23,2	14,0	257
Воздух (сухой)	29	0,35	1,29	24,1	17,2	331,5
H_2O (пар)	18	0,30	0,79	15,8	9,0	410

Примечание. M – молярная масса газа; d – эффективный диаметр молекулы; ρ – плотность (при нормальных условиях); æ – теплопроводность (при нормальных условиях); η – вязкость (при нормальных условиях); υ – скорость звука (при 0°С).

Таблица П14

Критические параметры и постоянные Ван-дер-Ваальса

Газ	Критическая температура $T_{кр}$, К	Критическое давление $p_{кр}$, МПа	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
			a, Н · м^4/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль
N_2	126	3,39	0,135	3,86
O_2	155	5,08	0,136	3,17
H_2	33,2	1,30	0,024	2,72
CO_2	304	7,39	0,360	4,28

Окончание табл. П14

Газ	Критическая температура $T_{кр}$, К	Критическое давление $p_{кр}$, МПа	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
			a, Н · м^4/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль
Ar	151	4,86	0,134	3,22
H_2O	647	22,11	0,545	3,04
Ne	44,4	2,72	0,209	1,70
Cl_2	417	7,71	0,650	5,62

Таблица П15

Постоянные жидкостей

Вещество	c, кДж/(кг · К)	ρ, г/см^3	æ, Вт/(м · К)	η, мПа · с	σ, мН/м
Вода	4,18	1,00	0,596	1,00	72,75
Глицерин	2,42	1,26	0,290	1495	63,4
Ртуть	0,14	13,6	8,450	1,55	487
Ацетон	2,18	0,792	0,170	0,32	23,3
Керосин	2,43	0,85	0,121	1,50	24,0

Примечание. c – удельная теплоемкость; ρ – плотность (при 20°C); æ – теплопроводность (при 0°C); η – вязкость (при 20°C); σ – поверхностное натяжение (при 20°C).

Таблица П16

Упругие постоянные

Материал	E, ГПа	G, ГПа	μ
Алюминий	70	26	0,34
Медь	110	40	0,34
Свинец	17	5,6	0,44

Примечание. E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; μ – коэффициент Пуассона.

Таблица П17

Постоянные твердых тел

Вещество	ρ, г/см^3	$t_{пл}$, °C	λ, кДж/кг	æ, Вт/(м · К)	c, кДж/(кг · К)
Лед	0,916	0	333	2,22	2,09
Алюминий	2,7	660,4	321	202–236	0,90
Медь	8,9	1084,5	175	401	0,39
Серебро	10,5	961,9	88	430	0,23
Олово	7,4	231,9	59	67	0,23
Золото	19,3	1064,4	67	320	0,13
Железо	7,8	1539,0	270	92	0,46

Примечание. ρ – плотность; $t_{пл}$ – температура плавления; λ – удельная теплота плавления; æ – теплопроводность; c – удельная теплоемкость (при нормальных условиях).

Электроотрицательность атома элемента — Относительная атомная масса элемента (нуклида) — Атомный номер — Символ элемента — Электронная конфигурация атома — Название элемента

55,845
(1,64) **Fe** 26
ЖЕЛЕЗО
[Ar]$3d^6 4s^2$
+2 +3 +6

Степени окисления атома элемента (наиболее характерные выделены). Характер свойств оксидов и гидроксидов в зависимости от степени окисления атомов металла: ▒ — кислотный; □ — основный; ▤ — амфотерный;

ПЕРИОДЫ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA
1	1,00794 (2,10) **H** 1 ВОДОРОД $1s^1$ −1 +1																	4,002602 (5,50) **He** 2 ГЕЛИЙ $1s^2$
2	6,941 (0,97) **Li** 3 ЛИТИЙ $1s^2 2s^1$ +1	9,012182 (1,47) **Be** 4 БЕРИЛЛИЙ $1s^2 2s^2$ +2											10,811 (2,01) **B** 5 БОР $1s^2 2s^2 2p^1$ −3 +3	12,0107 (2,50) **C** 6 УГЛЕРОД $1s^2 2s^2 2p^2$ −4 +2 +4	14,00674 (3,07) **N** 7 АЗОТ $1s^2 2s^2 2p^3$ −3 +1 +2 +3 +4 +5	15,9994 (3,50) **O** 8 КИСЛОРОД $1s^2 2s^2 2p^4$ −2 −1 +2	18,9984032 (4,10) **F** 9 ФТОР $1s^2 2s^2 2p^5$ −1	20,1797 (4,84) **Ne** 10 НЕОН $1s^2 2s^2 2p^6$
3	22,98970 (1,01) **Na** 11 НАТРИЙ [Ne]$3s^1$ +1	24,3050 (1,23) **Mg** 12 МАГНИЙ [Ne]$3s^2$ +2											26,981538 (1,47) **Al** 13 АЛЮМИНИЙ [Ne]$3s^2 3p^1$ +3	28,0855 (1,74) **Si** 14 КРЕМНИЙ [Ne]$3s^2 3p^2$ −4 +2 +4	30,973761 (2,10) **P** 15 ФОСФОР [Ne]$3s^2 3p^3$ −3 +1 +3 +4 +5	32,066 (2,60) **S** 16 СЕРА [Ne]$3s^2 3p^4$ −2 +2 +4 +6	35,4527 (2,83) **Cl** 17 ХЛОР [Ne]$3s^2 3p^5$ −1 +1 +3 +5 +7	39,948 (3,20) **Ar** 18 АРГОН [Ne]$3s^2 3p^6$
4	39,0983 (0,91) **K** 19 КАЛИЙ [Ar]$4s^1$ +1	40,078 (1,04) **Ca** 20 КАЛЬЦИЙ [Ar]$4s^2$ +2	44,955910 (1,20) **Sc** 21 СКАНДИЙ [Ar]$3d^1 4s^2$ +3	47,867 (1,32) **Ti** 22 ТИТАН [Ar]$3d^2 4s^2$ +3 +4	50,9415 (1,45) **V** 23 ВАНАДИЙ [Ar]$3d^3 4s^2$ +2 +3 +4 +5	51,9961 (1,56) **Cr** 24 ХРОМ [Ar]$3d^5 4s^1$ +2 +3 +6	54,93805 (1,60) **Mn** 25 МАРГАНЕЦ [Ar]$3d^5 4s^2$ +2 +3 +4 +6 +7	55,845 (1,64) **Fe** 26 ЖЕЛЕЗО [Ar]$3d^6 4s^2$ +2 +3 +6	58,93320 (1,70) **Co** 27 КОБАЛЬТ [Ar]$3d^7 4s^2$ +2 +3	58,6934 (1,75) **Ni** 28 НИКЕЛЬ [Ar]$3d^8 4s^2$ +2 +3	63,546 (1,75) **Cu** 29 МЕДЬ [Ar]$3d^{10} 4s^1$ +1 +2 +3	65,39 (1,66) **Zn** 30 ЦИНК [Ar]$3d^{10} 4s^2$ +2	69,723 (1,82) **Ga** 31 ГАЛЛИЙ [Ar]$3d^{10} 4s^2 4p^1$ +3	72,61 (2,02) **Ge** 32 ГЕРМАНИЙ [Ar]$3d^{10} 4s^2 4p^2$ +2 +4	74,92160 (2,20) **As** 33 МЫШЬЯК [Ar]$3d^{10} 4s^2 4p^3$ −3 +3 +5	78,96 (2,48) **Se** 34 СЕЛЕН [Ar]$3d^{10} 4s^2 4p^4$ −2 +2 +4 +6	79,904 (2,74) **Br** 35 БРОМ [Ar]$3d^{10} 4s^2 4p^5$ −1 +1 +3 +5 +7	83,80 (2,94) **Kr** 36 КРИПТОН [Ar]$3d^{10} 4s^2 4p^6$ +2 +4
5	85,4678 (0,89) **Rb** 37 РУБИДИЙ [Kr]$5s^1$ +1	87,62 (0,99) **Sr** 38 СТРОНЦИЙ [Kr]$5s^2$ +2	88,90585 (1,11) **Y** 39 ИТТРИЙ [Kr]$4d^1 5s^2$ +3	91,224 (1,22) **Zr** 40 ЦИРКОНИЙ [Kr]$4d^2 5s^2$ +4	92,90638 (1,23) **Nb** 41 НИОБИЙ [Kr]$4d^4 5s^1$ +2 +3 +4 +5	95,94 (1,30) **Mo** 42 МОЛИБДЕН [Kr]$4d^5 5s^1$ +2 +3 +4 +5 +6	[98] (1,36) **Tc** 43 ТЕХНЕЦИЙ [Kr]$4d^5 5s^2$ +2 +4 +6 +7	101,07 (1,42) **Ru** 44 РУТЕНИЙ [Kr]$4d^7 5s^1$ +2 +3 +4 +6 +8	102,90550 (1,45) **Rh** 45 РОДИЙ [Kr]$4d^8 5s^1$ +2 +3 +4 +6	106,42 (1,35) **Pd** 46 ПАЛЛАДИЙ [Kr]$4d^{10} 5s^0$ +2 +4	107,8682 (1,42) **Ag** 47 СЕРЕБРО [Kr]$4d^{10} 5s^1$ +1 +2 +3	112,411 (1,46) **Cd** 48 КАДМИЙ [Kr]$4d^{10} 5s^2$ +2	114,818 (1,49) **In** 49 ИНДИЙ [Kr]$4d^{10} 5s^2 5p^1$ +3	118,710 (1,72) **Sn** 50 ОЛОВО [Kr]$4d^{10} 5s^2 5p^2$ +2 +4	121,760 (2,10) **Sb** 51 СУРЬМА [Kr]$4d^{10} 5s^2 5p^3$ −3 +3 +5	127,60 (2,01) **Te** 52 ТЕЛЛУР [Kr]$4d^{10} 5s^2 5p^4$ −2 +2 +4 +6	126,90447 (2,21) **I** 53 ИОД [Kr]$4d^{10} 5s^2 5p^5$ −1 +1 +3 +5 +7	131,29 (2,40) **Xe** 54 КСЕНОН [Kr]$4d^{10} 5s^2 5p^6$ +2 +4 +6 +8
6	132,90545 (0,86) **Cs** 55 ЦЕЗИЙ [Xe]$6s^1$ +1	137,327 (0,97) **Ba** 56 БАРИЙ [Xe]$6s^2$ +2		178,49 (1,23) **Hf** 72 ГАФНИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^2 6s^2$ +4	180,9479 (1,33) **Ta** 73 ТАНТАЛ [Xe]$4f^{14} 5d^3 6s^2$ +2 +3 +4 +5	183,84 (1,40) **W** 74 ВОЛЬФРАМ [Xe]$4f^{14} 5d^4 6s^2$ +2 +3 +4 +5 +6	186,207 (1,46) **Re** 75 РЕНИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^5 6s^2$ +2 +3 +4 +6 +7	190,23 (1,52) **Os** 76 ОСМИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^6 6s^2$ +3 +4 +6 +8	192,217 (1,55) **Ir** 77 ИРИДИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^7 6s^2$ +2 +3 +4 +6	195,078 (1,44) **Pt** 78 ПЛАТИНА [Xe]$4f^{14} 5d^9 6s^1$ +2 +4 +6	196,96655 (1,42) **Au** 79 ЗОЛОТО [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^1$ +1 +3	200,59 (1,44) **Hg** 80 РТУТЬ [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2$ +1 +2	204,3833 (1,44) **Tl** 81 ТАЛЛИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^1$ +1 +3	207,2 (2,10) **Pb** 82 СВИНЕЦ [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^2$ +2 +4	208,98038 (2,10) **Bi** 83 ВИСМУТ [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^3$ −3 +3 +5	[209] (2,10) **Po** 84 ПОЛОНИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^4$ −2 +2 +4 +6	[210] (2,10) **At** 85 АСТАТ [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^5$ −1 +1 +3 +5 +7	[222] (2,06) **Rn** 86 РАДОН [Xe]$4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^6$ +2 +4 +6
7	[223] (0,86) **Fr** 87 ФРАНЦИЙ [Rn]$7s^1$ +1	[226] (0,97) **Ra** 88 РАДИЙ [Rn]$7s^2$ +2		[261] **Rf** 104 РЕЗЕРФОРДИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^2 7s^2$	[262] **Db** 105 ДУБНИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^3 7s^2$	[263] **Sg** 106 СИБОРГИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^4 7s^2$	[264] **Bh** 107 БОРИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^5 7s^2$	[265] **Hs** 108 ХАССИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^6 7s^2$	[268] **Mt** 109 МЕЙТНЕРИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^7 7s^2$	[281] **Ds** 110 ДАРМШТАДТИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^9 7s^1$	[281] **Rg** 111 РЕНТГЕНИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^1$	[285] **Cn** 112 КОПЕРНИЦИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2$	[284] **Nh** 113 НИХОНИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^1$	[289] **Fl** 114 ФЛЕРОВИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^2$	[288] **Mc** 115 МОСКОВИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^3$	[293] **Lv** 116 ЛИВЕРМОРИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^4$	[294] **Ts** 117 ТЕННЕСИН [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^5$	[294] **Og** 118 ОГАНЕССОН [Rn]$5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^6$

Лантаниды

138,9055 (1,08) **La** 57 ЛАНТАН [Xe]$5d^1 6s^2$ +3	140,116 (1,08) **Ce** 58 ЦЕРИЙ [Xe]$4f^2 5d^0 6s^2$ +3 +4	140,90765 (1,07) **Pr** 59 ПРАЗЕОДИМ [Xe]$4f^3 5d^0 6s^2$ +3 +4	144,24 (1,07) **Nd** 60 НЕОДИМ [Xe]$4f^4 5d^0 6s^2$ +3	[145] (1,07) **Pm** 61 ПРОМЕТИЙ [Xe]$4f^5 5d^0 6s^2$ +3	150,36 (1,07) **Sm** 62 САМАРИЙ [Xe]$4f^6 5d^0 6s^2$ +2 +3	151,964 (1,01) **Eu** 63 ЕВРОПИЙ [Xe]$4f^7 5d^0 6s^2$ +2 +3	157,25 (1,11) **Gd** 64 ГАДОЛИНИЙ [Xe]$4f^7 5d^1 6s^2$ +3	158,92534 (1,10) **Tb** 65 ТЕРБИЙ [Xe]$4f^9 5d^0 6s^2$ +3 +4	162,50 (1,10) **Dy** 66 ДИСПРОЗИЙ [Xe]$4f^{10} 5d^0 6s^2$ +3 +4	164,93032 (1,10) **Ho** 67 ГОЛЬМИЙ [Xe]$4f^{11} 5d^0 6s^2$ +3	167,26 (1,11) **Er** 68 ЭРБИЙ [Xe]$4f^{12} 5d^0 6s^2$ +3	168,93421 (1,11) **Tm** 69 ТУЛИЙ [Xe]$4f^{13} 5d^0 6s^2$ +2 +3	173,04 (1,06) **Yb** 70 ИТТЕРБИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^0 6s^2$ +2 +3	174,967 (1,07) **Er** 71 ЛЮТЕЦИЙ [Xe]$4f^{14} 5d^1 6s^2$ +3

Актиниды

[227] (1,08) **Ac** 89 АКТИНИЙ [Rn]$6d^1 7s^2$ +3	232,0381 (1,11) **Th** 90 ТОРИЙ [Rn]$5f^0 6d^2 7s^2$ +3 +4	231,0359 (1,14) **Pa** 91 ПРОТАКТИНИЙ [Rn]$5f^2 6d^1 7s^2$ +3 +4 +5	238,0289 (1,22) **U** 92 УРАН [Rn]$5f^3 6d^1 7s^2$ +3 +4 +5 +6	[237] (1,22) **Np** 93 НЕПТУНИЙ [Rn]$5f^4 6d^1 7s^2$ +3 +4 +5 +6 +7	[244] (1,22) **Pu** 94 ПЛУТОНИЙ [Rn]$5f^6 6d^0 7s^2$ +3 +4 +5 +6 +7	[244] (1,20) **Am** 95 АМЕРИЦИЙ [Rn]$5f^7 6d^0 7s^2$ +2 +3 +4 +5 +6	[247] (1,20) **Cm** 96 КЮРИЙ [Rn]$5f^7 6d^1 7s^2$ +2 +3 +4 +6	[247] (1,20) **Bk** 97 БЕРКЛИЙ [Rn]$5f^9 6d^0 7s^2$ +2 +3 +4	[251] (1,11) **Cf** 98 КАЛИФОРНИЙ [Rn]$5f^{10} 6d^0 7s^2$ +2 +3 +4	[252] (1,20) **Es** 99 ЭЙНШТЕЙНИЙ [Rn]$5f^{11} 6d^0 7s^2$ +2 +3	[257] (1,20) **Fm** 100 ФЕРМИЙ [Rn]$5f^{12} 6d^0 7s^2$ +2 +3	[258] (1,20) **Md** 101 МЕНДЕЛЕВИЙ [Rn]$5f^{13} 6d^0 7s^2$ +2 +3	[259] (1,20) **No** 102 НОБЕЛИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^0 7s^2$ +2 +3	[260] (1,20) **Lr** 103 ЛОУРЕНСИЙ [Rn]$5f^{14} 6d^1 7s^2$ +3

Периодическая система химических элементов (таблица Менделеева)

ЛИТЕРАТУРА

1. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей: в 5 ч. Ч. 1: Механика / Д. В. Кленицкий. – Минск: БГТУ, 2010. – 123 с. – Режим доступа: https://elib.belstu.by/handle/123456789/9300. – Дата доступа: 03.06.2021.

2. Кленицкий, Д. В. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций для студентов инженерно-технических специальностей: в 5 ч. Ч. 2: Термодинамика. Молекулярная физика / Д. В. Кленицкий. – Минск: БГТУ, 2012. – 86 с. – Режим доступа: https://elib.belstu.by/handle/123456789/3401. – Дата доступа: 03.06.2021.

3. Мадьяров, В. Р. Физика [Электронный ресурс]: тексты лекций: в 5 ч. Ч. 2: Молекулярная физика и термодинамика / В. Р. Мадьяров. – Минск: БГТУ, 2011. – 100 с. – Режим доступа: https://elib.belstu.by/handle/123456789/9297. – Дата доступа: 03.06.2021.

4. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов. Механика. Молекулярная физика / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Выш. шк., 1992. – 431 с.

5. Кленицкий, Д. В. Физика. Сборник задач / Д. В. Кленицкий, В. Р. Мадьяров, В. В. Чаевский. – Минск: ИВЦ Минфина, 2014. – 216 с.

6. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – 416 с.

7. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1985. – 384 с.

8. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики / Т. И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1996. – 303 с.

9. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Высш. шк., 1988. – 527 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кленицкий Дмитрий Викентьевич
Буцень Андрей Викторович
Мадьяров Владимир Рафкатович и др.

ФИЗИКА
СБОРНИК ЗАДАЧ

В 3-х частях

Часть 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. С. Ватеичкина*
Компьютерная верстка *А. Н. Петрова*
Дизайн обложки *П. П. Падалец*
Корректор *Е. С. Ватеичкина*

Подписано в печать 07.12.2021. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 11,4. Уч.-изд. л. 11,8.
Тираж 300 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.