УДК 517.949:517.966

В.В. Крахотко[1], доц., канд. физ.-мат. наук;
В.В. Горячкин[1], доц., канд. физ.-мат. наук;
В.В. Игнатенко[2], доц., канд. физ.-мат. наук
[1](БГУ, г Минск), [2](БГТУ, г. Минск)

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

В последние годы вырос интерес к исследованию динамических систем управления с последействием, с распределенным запаздыванием. У таких систем состояние в любой момент времени зависит от предыстории процесса. Обобщением таких систем являются интегро-дифференциальные системы.

В докладе рассматривается дискретный аналог непрерывной интегро-дифференциальной системы управления (системы Вольтерра) [1–2]. Для различных видов управляемости приводятся необходимые и достаточные условия управляемости, выраженные через параметры рассматриваемой системы управления. Полученные условия записываются в терминах решений определяющих уравнений, составленных по исходной системе.

Пусть процесс описывается системой

$$x(t+1)=\sum_{s=0}^{t}A(s)x(t-s)+Bu(t),\, t=0,1,2,...,\, x(0)=x_0, \qquad (1)$$

где $x,x_0\in R^n, u\in R^r$, $A(s), s=0,1,..., B-$матрицы соответствующих размеров.

Определение 1. Систему (1) назовём управляемой из нуля за время t_1, если для любого $c\in R^n$ найдется управление $u(t), t\in[0;t_1-1]$, такое, что $x(0)=0$, $x(t_1)=c$.

Определение 2. Систему (1) назовём управляемой в ноль за время t_1, если для любого $x_0\in R^n$ найдется управление $u(t), t\in[0;t_1-1]$, такое, что $x(0)=x_0$, $x(t_1)=0$.

Запишем решение $x(t), t\geq 0$, системы (1) в форме Коши.

Пусть $n\times n-$матричная функция удовлетворяет уравнению

$$F(t,\tau-1)=\sum_{s=0}^{\tau}F(t,\tau+s)A(s) \qquad (2)$$

с начальными условиями

$$F(t,t)=E_n,\quad F(t,\tau)\equiv 0, \tau>t. \qquad (3)$$

Тогда решение системы представимо в виде

$$x(t)=F(t,0)x_0+\sum_{i=0}^{t_1-1}\sum_{s=0}^{i}F(t-1,i)Bu(s). \qquad (4)$$

Введем определяющее уравнение системы (1). Оно имеет вид:

$$X(t+1)=\sum_{s=0}^{t}A(s)X(t-s)+BU(t), \qquad (5)$$

где $X(t)-(n\times r)-$матрица, $U(t)-(r\times r)-$матрица.

Обозначим $X^{(0)}(t)$- решение рекуррентного уравнения (5) при условиях:

$$U(0)=E_r, U(t)\equiv 0, t\neq 0, X(t)=0, t<0,$$

и решение $X^{(1)}(t)$, при условиях: $U(t)\equiv 0, \forall t, \quad X(0)=E_n$.

Из (2), (3), (4), (5) следует, что

$$X^{(0)}(t)=\sum_{i=0}^{t-1}F(t-1,i)B, t\geq 0, X^{(1)}(t)=F(t,0). \qquad (6)$$

Тогда справедливы утверждения.

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была относительно управляема из нуля на $[0;t_1]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\left\{X^{(0)}(t), t=1,2....,t_1\right\}=n.$$

Доказательство. Из (4) следует, что при $t=t_1$ выполняется равенство

$$c=\sum_{i=0}^{t_1-1}\sum_{s=0}^{t}F(t_1-1,i)Bu(s).$$

Таким образом, система (1) относительно управляема, тогда и только тогда, когда имеет решение относительно $u(s)$ система линейных уравнений

$$c=x(t_1)=\sum_{i=0}^{t_1-1}\sum_{s=0}^{t}F(t_1-1,i)Bu(s), \forall c\in R^n.$$

Из последнего соотношения вытекает, что для управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{pmatrix} p'\sum_{i=0}^{t_1-1}F(t_1-1,i)B \\ p'\sum_{i=0}^{t_1-2}F(t_1-1,i+1)B \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p'\sum_{i=0}^{1}F(t_1-1,i+t_1-2)B \\ p'F((t_1-1,t_1-1)B) \end{pmatrix}\neq 0, \qquad (7)$$

для любого $p \in R^n$, $\|p\| \neq 0$. Учитывая (6) заключаем, что из (7) следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. Система (1) управляема в ноль на $[0;t_1]$ тогда и только тогда , когда выполняется условие

$$rank\left\{X^{(0)}(t), t = 1,2....,t_1\right\} = rank\left\{X^{(1)}(t_1), X^{(0)}(t), t = 1,2....,t_1\right\}.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Заметим, что полученные результаты можно перенести на нестационарные дискретные системы Вольтерра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Мн: Институт математики НАН Беларуси, 2001, 400с.

2. Гайшун И. В. Линейные системы с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость. // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – С. 1544-1549.

УДК 336.781.5

М.В. Чайковский
(БГТУ, г. Минск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИЙ С ПОМОЩЬЮ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Решение о приобретении «объекта инвестиций» при постоянном и известном виде исчисляемого процента пригодно, если фактическое значение к моменту начала инвестиций неотрицательно. Это является предварительным условием при выборе решения из нескольких альтернатив, соответствующих нескольким объектам возможных инвестиций.

В предположении, что для объекта существует $n+1$ платежей $A_0, a_1, ..., a_n$ в моменты $0,1,2,...,n$ и n поступлений $b_1, b_2, ..., b_n$ в моменты $1,2,...,n$, инвестиция будет выгодной, если фактически полученное значение с учетом постоянного процента i будет большим или равным величине платежей, то есть если

$$\sum_{j=1}^{n} b_j (1+i)^{-j} \geq A_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j (1+i)^{-j},$$

или по-другому,

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)(1+i)^{-j} - A_0 \geq 0,$$