Показано, что имеет место

Теорема 2. Точка (a_1, a_2, a_3, h), $|a_3|<1,\ h>0$ в пространстве коэффициентов квазиполинома (2) принадлежит области U_0^* в том, и только в том случае, когда выполнено одно из условий:

$$\text{i) } a_1 > |a_2|, |a_3| \le 1,$$

$$\text{ii) } a_2 > |a_1|, |a_3| < 1,\ h < h^*,$$

где h^* вычислено по формуле

$$h^* = \sqrt{\frac{1-a_3^2}{a_2^2-a_1^2}} \cdot \arccos\left(-\frac{a_1+a_2a_3}{a_2+a_1a_3}\right).$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 3. На всей границе области устойчивости U_0^*, кроме точки $a_1 = -\frac{1+a_3}{h},\ a_2 = \frac{1+a_3}{h},\ |a_3|<1$ имеет место устойчивость по Ляпунову. В точке $a_1 = -\frac{1+a_3}{h},\ a_2 = \frac{1+a_3}{h},\ |a_3|<1$ уравнение (1) неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В.М., Якименко А.А. К вопросу о распределении корней квазиполиномов // Доклады Акад. наук Беларуси. – 1996. – Т. 40. – № 3. – С. 36–41.

УДК 517.948

С.В. Пономарева[1], доц., канд. физ.-мат.наук;
О.Н. Пыжкова[2], зав. кафедрой ВМ, канд. физ.-мат.наук
[1](БГУ, г. Минск) [2](БГТУ, г. Минск)

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В данной работе обратимся к вопросу нахождения поточечных оценок решений задачи Коши для дробно-дифференциальных уравнений с использованием классической леммы Бихари.

Условия разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha} x(t) = \xi, \end{cases} \tag{1}$$

с дробной производной Римана–Лиувилля D^{α} порядка α, $0<\alpha<1$ в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0,T]$ определенных на отрезке $[0,T]$ и непрерывных на $(0,T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha}x(t)$ рассматривались в [1] и [2] при различных предположениях о правой части уравнения в (1).

Здесь дробная производная в форме Римана–Лиувилля определяется равенством (см. [1])

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}\right). \tag{2}$$

Функцию $f(t,u)$ будем предполагать непрерывной по совокупности переменных на множестве $(0,T]\times(-\infty,\infty)$.

Предположим, что нелинейность функции $f(t,u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t,u)|\le \mu(t)+\nu(t)|u|^{k} \qquad (0<t\le T,\ -\infty<u<\infty)\ , \tag{3}$$

(допускается неограниченный оператор в правой части дифференциального уравнения (1), для каждой непрерывной на отрезке функции можно найти степенную мажоранту по функциональному аргументу), где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции со свойствами

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds\in C_{1-\alpha},\quad \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)\,ds\in C_{1-\alpha}\ , \tag{4}$$

обеспечивающими ограниченность и полную непрерывность оператора $Ax(t)=\dfrac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds$ в пространстве $C_{1-\alpha}$, $k\ge 1$ (Обоснование выбора свойств (4) функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ приводится в [1]).

Решение задачи (1) сводится к отысканию неподвижных точек указанного оператора $Ax(t)$ (см. [1]). При определенных условиях на правую часть (1) мы можем гарантировать существование и даже единственность решения задачи (см. там же). Но при этом явный вид решения получить непросто, т.к. оператор дробного интегрирования даже элементарные функции переводит в сложные специальные, не говоря уже об их композиции. Часто может быть достаточно знать значение функции решения в определенной точке. Наиболее известными инструментами, позволяющими строить оценки обыкновенных дифференциальных уравнений, являются леммы Бихари и Гронуола-Беллмана (см., например, [3]). С помощью первой из них получим оценку решения дробно-дифференциального уравнения (1) в соответствующем функциональном пространстве.

Лемма Бихари и ее обобщения имеют многочисленные приложения. В частности, они оказываются полезными при исследовании таких вопросов теории дифференциальных уравнений, как доказательство единственности и существования решений, отыскание явных поточечных оценок решения нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе в частных производных, управляемость начально-краевых задач, асимптотическая устойчивость и т.д. – см., например, [3], [4], [5].

Напомним формулировку классической леммы Бихари.

Лемма (Бихари). Пусть функции $x(t)$, $f(t)$ непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a,b]$, причем

$$x(t) \le c + \int_a^t f(s) x^m(s) ds \text{ для всех } t \in [a,b),$$

$$\int_a^t f(s) ds < \frac{1}{(m-1)c^{m-1}} \text{ для всех } t \in [a,b),$$

где $m > 1$, $c > 0$ – некоторые константы. Тогда имеет место неравенство

$$x(t) \le c \cdot \left[1 - (m-1) \cdot c^{m-1} \cdot \int_a^t f(s) ds\right]^{1/(1-m)} \equiv \bar{x}(t) \text{ для всех } t \in [a,b].$$

Нужно заметить, что $x = \bar{x}(t)$ является решением уравнения $x(t) = c + \int_a^t f(s) x^m(s) ds \equiv c + F[x](t)$, равносильного соответствующей задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений со степенной по функциональному аргументу правой частью.

Перейдем к формулировке аналогичного этой лемме утверждения о поточечной оценке для задачи (1).

Утверждение. Пусть для функции $f(t, x(t)) \in C_{1-\alpha}$ выполняются условия (3) и (4). Тогда для решения задачи Коши (1) выполняется оценка

$$x(t) \le c \cdot \left[1 - (k-1) \cdot c^{k-1} \cdot \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) ds\right]^{1/(1-k)},$$

где $c = \left\| \left| \dfrac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds \right\|_{1-\alpha}$, норма пространства $C_{1-\alpha}$ определяется следующим образом: $\|x\|_{1-\alpha} = \sup\limits_{0<t<T} t^{1-\alpha} |x(t)|$.

Доказательство утверждения основывается на полной непрерывности оператора $Ax(t)$ в пространстве $C_{1-\alpha}$ (см. [1]), а также оценке

$$|Ax(t)| \le \left| \frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) |x(s)|^k ds,$$

вытекающей из (3).

При этом длина отрезка $[0, T]$, на котором гарантируется существование решения будет существенно зависеть от степени ограничения k по функциональному аргументу в (3). Эта зависимость нелинейна и может быть записана в виде

$$\left((k-1)^{\frac{1}{k}} + (k-1)^{-\frac{1}{k}} \right) \cdot c^{\frac{k-1}{k}} \cdot b^{\frac{1}{k}} \le 1,$$

где c – константа из утверждения, $b = \left\| \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) s^{k\alpha-k} ds \right\|_{1-\alpha}$.

Заметим, что в этом неравенстве число T – это длина отрезка, по которому берется супремум при вычислении нормы в константах c и b.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забрейко П. П., Пономарева С.В. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка. Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 13–20.

2. Забрейко П.П., Пономарева С.В. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля. Доклады НАН Беларуси, 62 (2018), №4, с. 391-397

3. А. В. Чернов. Об одном обобщении леммы Бихари на случай вольтерровых операторов в лебеговых пространствах. Матем. заметки, 2013, том 94, выпуск 5, с. 757–76.

4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations (North-Holland Mathematics Studies 204). Elsevier, 2006, 523 p.

5. А. Г. Бутковский, С. С. Постнов, Е. А. Постнова. Дробное интегродифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации. Автомат. и телемех., 2013, выпуск 4, с.3–42.